

二次系统的一类四次代数曲线同宿环 II

倪春霞, 黄梅华, 李学鹏

福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建福州 (350007)

E-mail: ncx850726@sina.com

摘要: 给出一类二次系统的四次不变代数曲线, 当给定参数满足一定条件下, 讨论了系统平衡点的稳定性态。运用 Dulac 函数法, 得到了系统不存在极限环的充分条件。最后, 得到其孤立闭分支构成系统的同宿环的充要条件, 并给出相应系统的全局相图。

关键词: 二次系统; 不变代数曲线; 同宿环

中图分类号: 0175

1. 引言

考虑具有鞍点的平面二次系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + y + a_1x^2 + a_2xy = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = x + cy - x^2 - b_2xy - b_1y^2 = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

这里 $|c| \leq 1, a_1, a_2, b_1, b_2$ 均为实参数。

文[1]考虑了与平面 $\{0, 1\}$ 方向上系统的无穷远奇点有四阶接触的四次不变代数曲线同宿环, 其形式为:

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 = 0 \quad (2)$$

本文寻求与系统(1)在平面 $\{0, 1\}$ 方向上的无穷远奇点有三阶接触和 $\{\delta, 1\}$ 方向上的无穷远奇点有一阶接触的四次不变代数曲线, 其形式为:

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + a_{30}x^2y + a_{21}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{40}x^3(x - \delta y) = 0 \quad (3)$$

由系统 (1) 的第一个方程知, 平面上 $v_1 = \{0, 1\}$ 方向的无穷远处有奇点 B_1 , 若曲线 (3) 为系统 (1) 的不变代数曲线, 则系统在平面上 $v_2 = \{\delta, 1\}$ 方向的无穷远处有奇点 B_2 。因为二次系统的无穷远处有三个奇点, 所以假设系统在无穷远处第三个奇点 B_3 的方向为 $v_3 = \{\gamma, 1\}$ 。

对系统做 Poincare 变换 $x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}$, 可知 δ, γ 必须满足关于 v 的二次方程:

$$v^2 + (a_1 + b_2)v + (a_2 + b_1) = 0,$$

于是由韦达定理可得: $a_1 + b_2 = -(\delta + \gamma), a_2 + b_1 = \delta\gamma$,

因此系统 (1) 可写成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + y + a_1x^2 + a_2xy = P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = x + cy - x^2 + (a_1 + \delta + \gamma)xy + (a_2 - \delta\gamma)y^2 = Q_1(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

这里 $|c| \leq 1, a_1, a_2, \delta, \gamma$ 均为实参数。

利用 Batin 公式^[8], $F(x, y)$ 必须满足下面的恒等式:

$$F_x(x, y)P_1(x, y) + F_y(x, y)Q_1(x, y) = L(x, y)F(x, y) \quad (5)$$

其中设 $F(x, y)$ 的协变因子 $L(x, y) = 2c + Ax + By$ 。

借助 Mathematic 软件计算, 比较各恒等式中各同类项的系数, 可得:

$A = \delta + 4a_1, B = 4a_2 - \delta\gamma$ 及系统 (4) 和曲线 (3) 的系数应满足如下 9 个方程:

$$\begin{cases} (2\gamma\delta + a_2)a_{03} = 0 \\ -(\gamma\delta + a_2)a_{12} + (3\gamma + 2\delta - a_1)a_{03} = 0 \\ \gamma\delta + 2a_2 + a_{12} + ca_{03} = 0 \\ -\delta - 2a_1 + ca_{30} + a_{21} = 0 \\ -2\gamma - \delta + 2a_1 + 2a_{21} + ca_{12} + 3a_{03} = 0 \\ 2 + \gamma\delta - 2a_2 + 3a_{30} + ca_{21} + 2a_{12} = 0 \\ (2c - \delta)a_{40} - (\delta + a_1)a_{03} - a_{21} = 0 \\ (\gamma\delta - a_2)a_{30} + (\gamma - a_1)a_{21} - 2(a_{12} + c\delta a_{40} - 2a_{40}) = 0 \\ -a_2a_{21} + (2\gamma + \delta - a_1)a_{12} - 3(\delta a_{40} + a_{03}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2. 主要结果

方程组 (6) 的代数流形解集是很丰富的。由于篇幅的限制, 本文仅讨论在 $a_{12} = a_{03} = 0$ 条件下方程组 (6) 的解集, 借助 Mathematic 软件计算, 经仔细筛选分析之后得到两组条件下系统 (4) 有同宿环的情形如下。

$$(1): \delta = -\frac{4c}{3+c^2}, \gamma = -\frac{c}{2}, a_1 = -\frac{c(1+c^2)}{2(3+c^2)}, a_2 = -\frac{c^2}{3+c^2}, a_{30} = -\frac{2+c^2}{3+c^2},$$

$$a_{21} = -\frac{3c}{3+c^2}, a_{12} = a_{03} = 0, a_{40} = \frac{c^2}{4(3+c^2)}$$

相应的系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + y - \frac{c(1+c^2)}{2(3+c^2)}x^2 - \frac{c^2}{3+c^2}xy \\ \frac{dy}{dt} = x + cy - x^2 - \frac{c(6+c^2)}{3+c^2}xy - \frac{3c^2}{3+c^2}y^2 \end{cases} \quad (7)$$

其不变代数曲线为:

$$F_1(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{2+c^2}{3+c^2}x^3 - \frac{3c}{3+c^2}x^2y + \frac{c^2}{4(3+c^2)}x^3(x + \frac{4c}{3+c^2}y) = 0$$

$$(2): c = \frac{(1-s)(1+4s+s^2)}{(1+s)(1+s+s^2)}, \delta = \frac{(s-1)(s+1)^3}{1+2s+2s^3+s^4}, \gamma = \frac{3(s^2-1)}{5+2s+5s^2},$$

$$a_1 = \frac{(s^2-1)(1+4s+s^2)(3-4s+3s^2)}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}, a_2 = -\frac{3(s-1)^2(s+1)^4}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)},$$

$$a_{30} = -\frac{4(1+s)^2(1+s^2+s^4)}{(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}, a_{21} = \frac{4(s^2-1)(1+s+s^2)^2}{(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)},$$

$$a_{12} = a_{03} = 0, a_{40} = \frac{2(s^2-1)^2(1+s+s^2)^2}{(5+2s+5s^2)^2(1+2s+2s^3+s^4)}$$

相应的系统为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(1-s)(1+4s+s^2)}{(1+s)(1+s+s^2)}x + y - \frac{(s^2-1)(1+4s+s^2)(3-4s+3s^2)}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}x^2 - \frac{3(s-1)^2(s+1)^4}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}xy \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{(1-s)(1+4s+s^2)}{(1+s)(1+s+s^2)}y - x^2 + \frac{(s^2-1)(19+44s+18s^2+44s^3+19s^4)}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}xy - \frac{9(s-1)^2(1+s)^4}{2(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}y^2 \end{cases} \quad (8)$$

不变代数曲线为:

$$F_2(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{4(1+s)^2(1+s^2+s^4)}{(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}x^3 + \frac{4(s^2-1)(1+s+s^2)^2}{(5+2s+5s^2)(1+2s+2s^3+s^4)}x^2y +$$

$$\frac{2(s^2-1)^2(1+s+s^2)^2}{(5+2s+5s^2)^2(1+2s+2s^3+s^4)}x^3(x - \frac{(s-1)(s+1)^3}{1+2s+2s^3+s^4}y) = 0$$

对第一种情形, 在 xoy 平面的 Poincare 紧化圆盘上画曲线图形。因在 $-1 \leq c < 0$ 的情形, 只要令 $x = -\bar{x}, y = \bar{y}, t = -\bar{t}, c = -\bar{c}$, 则系统形式不变, 故以下仅对 $0 \leq c \leq 1$ 的情形进行研究。

(i) 当 $c = 0$ 时, $F_1(x, y) = 0$ 退化为 $F_1(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{2}{3}x^3 = 0$ 。

令 $y = kx$ 得到 $F_1(x, y) = 0$ 的参数方程:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}(1-k^2) \\ y = \frac{3}{2}k(1-k^2) \end{cases} \quad (k \in R, k \text{ 为参数})$$

可知: 当 $k = 0$ 时, $x = \frac{3}{2}, y = 0$; 当 $k = \pm 1$ 时, $x = y = 0$ 。

(ii) 当 $0 < c < 1$ 时, 将 $y = kx$ 代入 $F_1(x, y) = 0$ 得:

$$1 - k^2 - \frac{2+3ck+c^2}{3+c^2}x + \frac{c^2(3+4ck+c^2)}{4(3+c^2)^2}x^2 = 0$$

解之得:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2(3+c^2)[2+3ck+c^2-(1+ck)\sqrt{4+4ck+c^2}]}{c^2(3+4ck+c^2)} \\ x_2 = \frac{2(3+c^2)[2+3ck+c^2+(1+ck)\sqrt{4+4ck+c^2}]}{c^2(3+4ck+c^2)} \end{cases}$$

从而可得 $F_1(x, y) = 0$ 的两个分支为:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1(c, k) \\ y = kx_1(c, k) \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = x_2(c, k) \\ y = kx_2(c, k) \end{cases}$$

令 $k_1 = -\frac{4+c^2}{4c}$, $k_2 = -\frac{1}{c}$, $k_3 = -\frac{3+c^2}{4c}$, 则当 $0 < c < 1$ 时, $k_1 < k_2 < k_3$ 。

由 x_1, x_2 的表达式可知: 当 $k < k_1$ 时, x_1, x_2 消失于复数域, 即 $y = kx$ 除原点外, 与 $F_1(x, y) = 0$ 没有交点。

故以下仅对当 $k \geq k_1$ 时的情况进行讨论。

(1) 当 $k = k_1$ 时, $x_1 = x_2 = -\frac{(c^2-4)(c^2+3)}{2c^2}$, 即 L_1 与 L_2 在点 $D_3(-\frac{(c^2-4)(c^2+3)}{2c^2}, \frac{(c^4-16)(c^2+3)}{8c^3})$ 汇合;

(2) 当 $k = k_2$ 时, $x_1 = x_2 = \frac{2(c^2+3)}{c^2}$, 即 L_1 与 L_2 在点 $D_2(\frac{2(c^2+3)}{c^2}, -\frac{2(c^2+3)}{c^3})$ 汇合;

(3) 当 $k \rightarrow k_3$ 时, $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow \frac{(9-c^2)(3+c^2)}{4c^2}$;

(4) 当 $k = -1$ 时, $x_1 = 0, x_2 = -\frac{4(2-c)(3+c^2)}{c^2(c-3)}$;

(5) 当 $k = 0$ 时, $x_1 = \frac{2(2+c^2-\sqrt{4+c^2})}{c^2}, x_2 = \frac{2(2+c^2+\sqrt{4+c^2})}{c^2}$;

(6) 当 $k = 1$ 时, $x_1 = 0, x_2 = \frac{4(2+c)(3+c^2)}{c^2(3+c)}$;

(7) 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow +\infty$ 。

因此, 当 k 从 0 连续增加变化到 1 再连续增加变化到 $+\infty$ 时, L_1 上的点连续变化路径

为: $C_1(\frac{2(2+c^2-\sqrt{4+c^2})}{c^2}, 0) \rightarrow O(0, 0) \rightarrow (0, 1)$ 方向上的无穷远点 \bar{B}_1 ;

当 k 从 0 连续减少变化到 -1 再连续减少变化到 k_3 时, L_1 上的点连续变化路径为:

$C_1 \rightarrow O \rightarrow (-\frac{4c}{c^2+3}, 1)$ 方向上的无穷远点 B_2 ;

当 k 从 k_3 连续减少变化到 k_2 再连续减少变化到 k_1 时, L_1 上的点连续变化路径为:

$(-\frac{4c}{c^2+3}, 1)$ 方向上的无穷远点 $\bar{B}_2 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3$;

当 k 从 0 连续增加变化到 $+\infty$ 时, L_2 上的点连续变化路径为:

$D_1(\frac{2(2+c^2+\sqrt{4+c^2})}{c^2}, 0) \rightarrow (0, 1)$ 方向上的无穷远点 B_1 ;

当 k 从 0 连续减少变化到 k_2 再连续减少变化到 k_1 时, L_2 上的点连续变化路径为:

$D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3$ 。

(iii) 当 $c=1$ 时, $F_1(x,y) = (x+y)(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - y) = 0$ 。可见, 四次曲线

$F_1(x,y) = 0$ 是由一直线 $y = -x$ 和三次曲线 $y = x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ 构成。

基于上述的计算和分析, 可绘出曲线 $F_1(x,y) = 0$ 的图形如下:

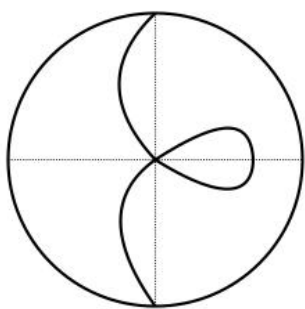


图 1 当 $c=0$ 时,

$F_1(x,y) = 0$ 的图形

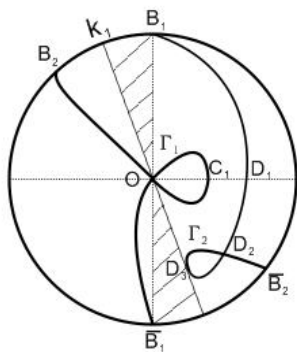


图 2 当 $0 < c < 1$ 时,

$F_1(x,y) = 0$ 的图形

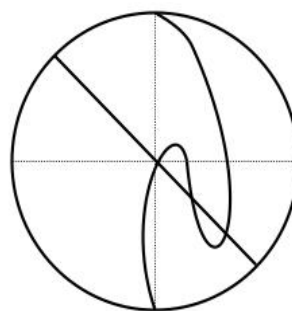


图 3 当 $c=1$ 时

$F_1(x,y) = 0$ 的图形

由图 2 可知, 当 $0 < c < 1$ 时, $F(x,y) = 0$ 有两个非孤立紧分支 Γ_1, Γ_2 。其中 Γ_1 位于区域

$\Omega_1 = \{(x,y) \mid y < x < +\infty\}$ 内, Γ_2 位于区域 $\Omega_2 = \{(x,y) \mid -\frac{4+c^2}{4c} < \frac{y}{x} < -\frac{1}{c}, x > 0\}$ 内。

采用类似于第一种情况的分析方法, 可画出第二种情况的不变代数曲线图形如下。经分析知,

$\frac{\sqrt{33}-5}{4} \leq s \leq \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ 对应 $|c| \leq 1$ 。当 $s=1$ 时, $c=0$; 当 $s = \frac{\sqrt{33}-5}{4}$ 时, $c=1$; 当

$s = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ 时, $c=-1$ 。令 $K_1 = \frac{s^2+1}{s^2-1}, K_2 = \frac{37-5\sqrt{33}}{21-5\sqrt{33}}$ (其中 K_1, K_2 为斜率)

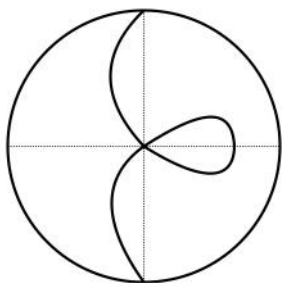


图 4 当 $s=1$ 时,

$F_2(x,y) = 0$ 的图形

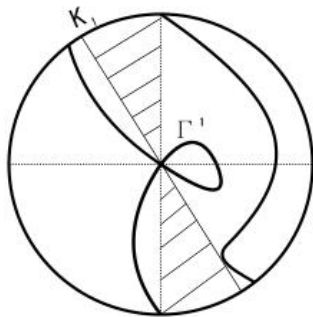


图 5 当 $\frac{\sqrt{33}-5}{4} < s < 1$ 时,

$F_2(x,y) = 0$ 的图形

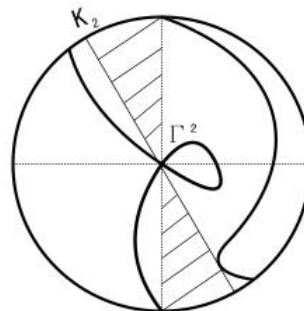


图 6 当 $s = \frac{\sqrt{33}-5}{4}$ 时,

$F_2(x,y) = 0$ 的图形

3. 系统 (7) 的定性分析

首先考虑无穷远奇点 xoy 平面上三个方向 $\{\nu_j, 1\}, j=1,2,3$, 相应的奇点记为 B_j , 其中

$$\nu_1 = 0, \nu_2 = \delta = -\frac{4c}{3+c^2}, \nu_3 = \gamma = -\frac{c}{2}.$$

其次考虑有限平面奇点。设系统 (7) 有限平面奇点所在的直线为 $y = kx$, 联立 $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$, 可得 k 及有限平面奇点的表达式:

$$\begin{cases} x=0, y=0 \\ k_1 = -\frac{c(5+c^2)}{3+3c^2+\sqrt{3(3-4c^2+c^4)}}, x_1 = \frac{2(3+c^2)}{3-c^2+\sqrt{3(3-4c^2+c^4)}}, y_1 = k_1 x_1 \\ k_2 = -\frac{1}{c}, x_2 = \frac{2(3+c^2)}{c^2}, y_2 = k_2 x_2 \\ k_3 = -\frac{3+3c^2+\sqrt{3(3-4c^2+c^4)}}{6c}, x_3 = \frac{(3+c^2)(3-c^2+\sqrt{3(3-4c^2+c^4)})}{c^2(3-c^2)}, y_3 = k_3 x_3 \end{cases}$$

记有限平面奇点为 $O(0,0), A_1(x_1, k_1 x_1), A_2(x_2, k_2 x_2), A_3(x_3, k_3 x_3)$

首先给出奇点的性态, 如表 1:

表 1 系统 (7) 的奇点性态表

	O	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
$c=0$	s	c	与 B_1 重合	与 B_1 重合	五重奇点	与 B_1 重合	与 B_1 重合
$0 < c < 1$	s	f	s	f^u	n^u	n^u	s
$c=1$	高次奇点	高次奇点	高次奇点	与 A_1 重合	n^u	高次奇点	s

其中 s, c, f, f^u, n, n^u 分别表示鞍点, 中心, 焦点, 不稳定焦点, 结点, 不稳定结点

由 A_1, A_2, A_3 的坐标表达式, 则容易证得:

引理 1 奇点 O, A_2 在不变代数曲线 $F_1(x, y) = 0$ 上, 奇点 A_1, A_3 不在不变代数曲线上。

引理 2 系统 (7) 不存在极限环。

证明：取 Dulac 函数 $D = F_1^{-1}(x, y)$ ，则有 $\text{div}(F_1^{-1}P, F_1^{-1}Q)_{(7)} = -\frac{c}{3+c^2}(x+cy)F_1^{-1}$ 。当 $0 < |c| < 1$ 时，四次代数曲线的两个紧分支位于直线 $x+cy=0$ 的两侧，故 $\text{div}(F_1^{-1}P, F_1^{-1}Q)_{(7)}$ 在四次不变代数曲线的两个紧分支内部不变号。由 Dulac 定理^[9]，可得系统 (7) 在四次不变代数曲线的紧分支内部无闭轨。又 O, A_2 在曲线 $F_1(x, y) = 0$ 上，而闭轨内部必含奇点，因此系统 (7) 在其他区域也无闭轨存在。

证毕

4. 系统 (7) 的全局相图

由前面的结论知系统 (7) 无极限环且奇点不消失于复空间，所以全局相图的分支曲线应由奇点的汇合分支所确定。

下面给出部分全局相图，如图

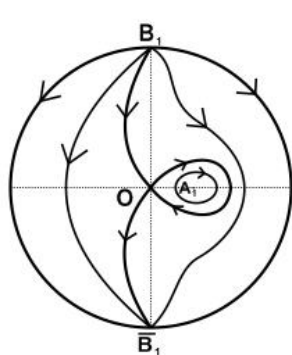


图 7 当 $c=0$ 时，系统 (7) 的全局相图

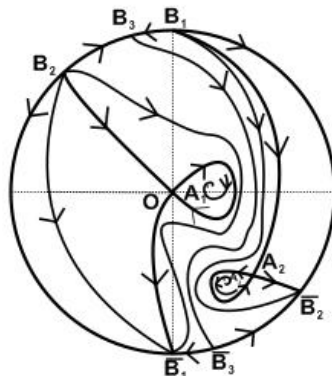


图 8 当 $0 < c < 1$ 时，系统 (7) 的全局相图

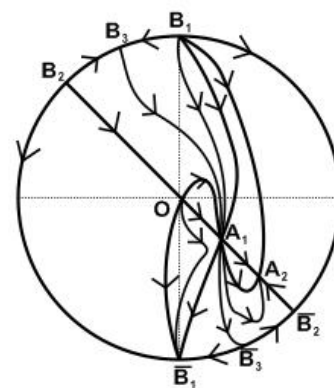


图 9 当 $c=1$ 时，系统 (7) 的全局相图

由图 7，图 8，图 9 及引理 1 可知：

定理 1 当 $c=0$ 时，原点 O 为鞍点，有连接 O 的同宿环，其内部奇点为中心；

当 $0 < c < 1$ 时，原点 O 与 A_2 均为鞍点，有连接 O 的内侧不稳定同宿环 Γ_1 位于区域

$\Omega_1 = \{(x, y) \mid |y| < x < +\infty\}$ 内，其内部奇点为稳定焦点；连接 A_2 的内侧稳定同宿环 Γ_2 位于

区域 $\Omega_2 = \left\{ (x, y) \mid -\frac{4+c^2}{4c} < \frac{y}{x} < -\frac{1}{c}, x > 0 \right\}$ 内，其内部奇点为不稳定焦点；

当 $-1 < c < 0$ 时， Γ_1, Γ_2 都存在，只是稳定性改变；

当 $c=1$ 时，原点 O 与 A_2 均为高次奇点；

系统 (7) 存在双同宿环的充要条件是 $0 < |c| < 1$ 。

考虑系统 (8) 的无穷远奇点 xoy 平面上三个方向 $\{v_j, 1\}, j=1, 2, 3$ ，相应的奇点记为

$$B_j', \text{ 其中 } v_1' = 0, v_2' = \delta = \frac{(s-1)(s+1)^3}{1+2s+2s^3+s^4}, v_3' = \gamma = \frac{3(s^2-1)}{5+2s+5s^2}.$$

设系统 (8) 有限平面奇点所在的直线为 $y = kx$, 联立 $P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0$, 可得 k 及有限平面奇点的表达式:

$$\begin{cases} x=0, y=0 \\ k_1 = \frac{-1-2s+2s^2+s^3}{1+2s+2s^2+s^3}, x_1 = \frac{5+12s+9s^2+20s^3+9s^4+12s^5+5s^6}{(1+s)^2(1+2s+12s^2+2s^3+s^4)}, y_1 = k_1 x_1 \\ k_2 = \frac{s^2+1}{s^2-1}, x_2 = \frac{5+12s+9s^2+20s^3+9s^4+12s^5+5s^6}{(s^2-1)^2(1+s+s^2)}, y_2 = k_2 x_2 \\ k_3 = \frac{7+26s+6s^2+26s^3+7s^4}{9(s-1)(s+1)^3}, x_3 = \frac{(2-5s-30s^2-5s^3+2s^4)(5+12s+9s^2+20s^3+9s^4+12s^5+5s^6)}{3(s-1)^2(s+1)^4(1-4s-3s^2-4s^3+s^4)}, y_3 = k_3 x_3 \end{cases} \quad (10)$$

记有限平面奇点为 $O(0, 0), A_1'(x_1, k_1 x_1), A_2'(x_2, k_2 x_2), A_3'(x_3, k_3 x_3)$

奇点的性态如表 2

表 2 系统 (8) 的奇点性态表

	O	A_1'	A_2'	A_3'	B_1'	B_2'	B_3'
$s=1$	s	c	与 B_1' 重合	与 B_1' 重合	五重奇点	与 B_1' 重合	与 B_1' 重合
$\frac{\sqrt{33}-5}{4} < s < 1$	s	f	n	s	n''	n''	s
$s = \frac{\sqrt{33}-5}{4}$	高次奇点	f	n	与 O 重合	n''	s	s

其中 s, c, f, f'', n, n'' 分别表示鞍点, 中心, 焦点, 不稳定焦点, 结点, 不稳定结点

由 A_1', A_2', A_3' 的坐标表达式可知, 奇点 O, A_2', A_3' 在不变代数曲线 $F_2(x, y) = 0$ 上, 奇点 A_1' 不在不变代数曲线上。当取 Dulac 函数 $D = F_2^{-1}(x, y)$ 时, 类似可证系统 (8) 不存在极限环。同时, 可绘出系统 (8) 的全局相图如下:

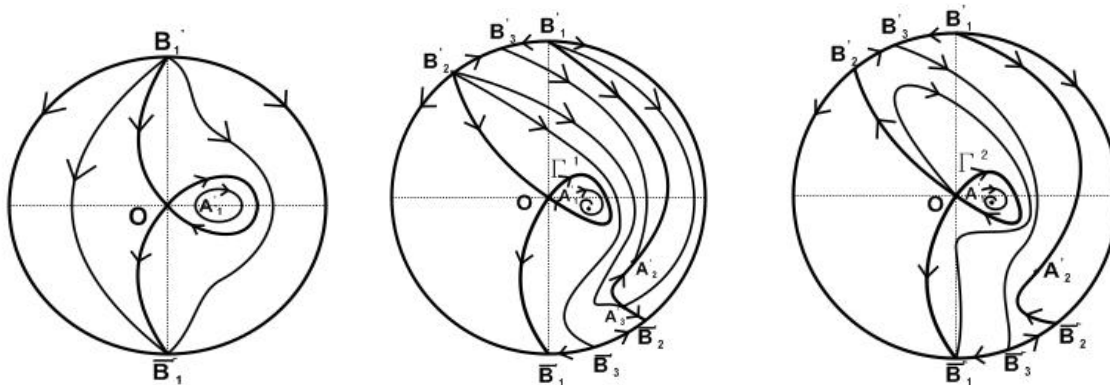


图 10 当 $s=1$ 时，
系统 (8) 的全局相图

图 10 当 $\frac{\sqrt{33}-5}{4} < s < 1$ 时，
系统 (8) 的全局相图

图 10 当 $s = \frac{\sqrt{33}-5}{4}$ 时，
系统 (8) 的全局相图

通过分析可知：

定理 1 当 $s=1$ 时，原点 O 为鞍点，有连接 O 的同宿环，其内部奇点为中心；

当 $\frac{\sqrt{33}-5}{4} < s < 1$ 时，原点 O 为鞍点，有连接 O 的内侧不稳定同宿环 Γ^1 位于区域

$\Omega_1 = \{(x, y) \mid |y| < x < +\infty\}$ 内，其内部奇点为稳定焦点；

当 $1 < s < \frac{\sqrt{33}+5}{2}$ 时，同宿环 Γ^1 存在，只是稳定性改变；

当 $s = \frac{\sqrt{33}-5}{4}$ 时，原点 O 为高次奇点，有连接 O 的内侧不稳定同宿环 Γ^2 位于区域

$\Omega_1 = \{(x, y) \mid |y| < x < +\infty\}$ 内，其内部奇点为稳定焦点；

系统 (8) 存在双同宿环的充要条件是 $\frac{\sqrt{33}-5}{4} \leq s \leq \frac{\sqrt{33}+5}{2}$ 。

A class of Quartic Algebraic Curves Homoclinic Cycles of Quadratic System II

NI Chunxia , Huang Meihua, LI Xuepeng

School of Mathmatics and Computer Science,Fujian Normal University,Fuzhou,Fujian (350007)

Abstract

The paper is devoted to the quartic invariant algebraic curves in quadratic system. By using stability methods,when the given parameter meets certain conditions,the stability of equilibrium is discussed.The sufficient condition for inexistence of the limited ring is gor by using the method of Dulac function.We obtain sufficient and necessary condition such that the homoclinic cycle of the

system is defined by the isolation of closed branch, and the corresponding global phase is drawn.

Key words: *uadratic system; algebra invariant; homoclinic*

参考文献

- [1] 黄梅华, 倪春霞, 李学鹏. 二次系统的一类四次代数曲线同宿环 I. 福建师范大学学报. 已投.
- [2] 郑艳红. 平面二次系统同宿环分枝中的若干问题. 福建师范大学硕士学位论文, 2002:1-21.
- [3] 林雪如, 李学鹏. 平面对称可积二次系统的代数曲线同宿环的稠密性[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2004, 20(2):27-31.
- [4] 郑艳红, 李学鹏. 二次系统的五次代数曲线同宿环 [J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2004, 20(3):6-11.
- [5] 李学鹏. 一类二次系统定义的双参数三次代数曲线族[J]. 数学年刊(A), 1998, 19(6):677-688.
- [6] Y. H. Zheng, X. P. Li. Quadratic Systems with Homoclinic Cycles Described by Quintic Curves[J]. Applied Mathematics E-Notes, 2001, 1:124-129.
- [7] H. M. Huang, X. P. Li. Quadratic Systems with Homoclinic Cycles Described by Quartic Curves[J]. Ann. of Diff. Eqs., 2009, 25(4):397-406.
- [8] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 北京:科技出版社, 1995..
- [9] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.