一类半正四阶三点边值问题的解和正解的存在性

施恂栋，杨成, 陈海量, 苏星星
中国矿业大学，数学系，江苏 徐州(221008)
E-mail: shixundong2006@126.com

摘 要: 考察了非线性四阶三点边值问题的解和正解的存在性. 其中允许非线性项有一个负的下界. 主要结论表明该问题可以具有正解, 只要非线性项在某些有界集上的“高度”是适当的.

关键词: 四阶三点边值问题; 半正非线性; 解和正解; 存在性
中图分类号: O175.8

1.引言

本文的目的是考察下列非线性四阶三点边值问题的解和正解的存在性.

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} x^{(4)}(t)=f(t,x(t)) \\ x(0)=x'(0)=x''(\eta)=x'''(1)=0 \end{cases}$$

其中$0\le t\le 1$，$\frac{1}{2}<\eta<1$. 这里问题(P)的正解x^*是指满足$x^*(t)>0$，$0<t\le 1$的解.

常微分方程的多点边值问题是一个热点课题，如由不同密度组成的N部分横切面的天线振动和弹性理论中的许多问题都可以归结为多点问题。其中二或三阶多点边值问题已经有了相当广泛的研究[1-5]. 本文在已有工作的基础上，利用锥上的不动点理论，在允许非线性项f有负的下界的情形下，证明了问题(P)的解和正解的存在性.

设$0<\mu<\nu\le\eta$并且$k=\dfrac{4\eta-2\eta^2-1}{8}$.

本文总是假设$M>0$并且$f:[0,1]\times[-kM,+\infty]\to[-M,+\infty]$是连续的.

2. 预备知识

设$C[0,1]$是赋予范数$\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$的 Banach 空间. 记

$$C^+[0,1]=\left\{x\in C[0,1],\ \min_{0\le t\le 1}x(t)\ge 0\right\}.$$

设$p(t)=\dfrac{t^4}{24}-\dfrac{t^3}{6}+\left(\dfrac{\eta}{2}-\dfrac{\eta^2}{4}\right)t^2$，$0\le t\le 1$，经计算有$\max\limits_{0\le t\le 1}p(t)=k$. 设$G(t,s)$是齐次问题$x'''(t)=0, 0\le t\le 1$; $x(0)=x'(\eta)=x''(1)=0$的 Green 函数，即

$$G(t,s)=\begin{cases} ts-\frac{1}{2}t^2 & 0\le s\le\eta, 0\le t\le s \\ \frac{1}{2}s^2 & 0\le s\le\eta, 0\le s\le t \\ \eta t-\frac{1}{2}t^2 & \eta\le s\le 1, 0\le t\le s \\ \frac{1}{2}s^2-ts+\eta t & \eta\le s\le 1, \eta\le s\le t \end{cases}$$

直接计算得到:

引理 2. 1 (1) $G:[0,1]\times[0,1]\to[0,+\infty)$ 连续

$$(2)\int_0^t\int_0^1 G(u,v)dvdu = p(t),\quad 0\le t\le 1$$

定义 $g(t,l)=f(t,l)+M$，$(t,l)\in[0,1]\times[-kM,+\infty)$，则

$$g:[0,1]\times[-kM,+\infty)\to[0,+\infty)$$

是连续的, 考察三点边值问题

$$\text{(P')}\quad \begin{cases} x^{(4)}(t)=g(t,x(t)-x_0(t)) \\ x(0)=x'(0)=x''(\eta)=x'''(1)=0 \end{cases}\qquad 0\le t\le 1$$

其中 $x_0(t)=Mp(t)$，自然，$\|x_0\|=M\max\limits_{0\le t\le 1}p(t)=kM$

对于 $0\le t\le 1$，定义算子 T 为:

$$(Tx)(t)=\int_0^t\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu$$

注意到对于任何 $x\in C^+[0,1]$，$\min\limits_{0\le t\le 1}[x(t)-x_0(t)]\ge -kM$，不难看出:

(i) 算子 $T:C^+[0,1]\to C[0,1]$ 有定义并且连续

(ii) 对于任何 $x\in C^+[0,1]$，$(Tx)(0)=(Tx)'(0)=(Tx)''(\eta)=(Tx)'''(1)=0$

简单核验后，我们得到

引理 2.2 (1) x^* 是问题(P)的解当且仅当 x^*+x_0 是(P')的解

(2) $\bar{x}\in C^+[0,1]$ 是问题(P')的解当且仅当 $\bar{x}$ 是算子 T 的不动点

设 $q(t)=\min\{\eta t,2\eta t-t^2\}$，$0\le t\le 1$. 由文献[6]，我们有

$$J(s)=\max_{0\le t\le 1}G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}s^2 & 0\le s\le\eta \\ \frac{1}{2}\eta^2 & \eta\le s\le 1\end{cases}\qquad (*)$$

令 $\theta(t)=\int_0^t q(s)ds$，经计算可知,

$$\theta(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\eta t^2 & 0\le t\le\eta \\ -\frac{t^3}{3}+\eta t^2-\frac{\eta^3}{6} & \eta\le t\le 1\end{cases}$$

显然，$0\le\theta(t)\le 1$，记 $K=\{x\in C[0,1]:x(t)\ge\theta(t)\|x\|\}$，则 K 是 $C[0,1]$ 中的一个非负函数锥，设 $A=[\max\limits_{0\le t\le 1}\int_0^t\int_0^1 G(u,v)dvdu]^{-1}$，$B=[\int_0^\eta\int_\mu^\nu G(u,v)dvdu]^{-1}$，$\sigma=\min\limits_{\mu\le t\le\nu}\theta(t)$，直接计算后，我们得到:

$$A=[\max_{0\le t\le 1}p(t)]^{-1}=\frac{8}{4\eta-2\eta^2-1}$$

$$B=\frac{24}{\mu^4-\nu^4+4\eta(\nu^3-\mu^3)}$$

$$\sigma=\frac{\eta\mu^2}{2}$$

显然$0<\sigma<1$，注意到

$$h(u)=\int_\mu^\nu G(u,v)dv=\begin{cases}\dfrac{\nu^2-\mu^2}{2}u-\dfrac{\nu-\mu}{2}u^2 & 0\le u<\mu\\ \dfrac{u^3-\mu^3}{6}+\dfrac{\nu^2u-\nu u^2}{2} & \mu\le u\le\nu\\ \dfrac{\nu^3-\mu^3}{6} & \nu<u\le 1\end{cases}$$

可知$h(u)=\int_\mu^\nu G(u,v)dv>0$，$0<u<1$，于是

$$0<\int_0^\eta\int_\mu^\nu G(u,v)dvdu<\int_0^\eta\int_0^1 G(u,v)dvdu\le\max_{0\le t\le 1}\int_0^t\int_0^1 G(u,v)dvdu$$

因此，$0<A<B$.

本文将使用下列控制函数，对$l>0$，我们记

$$\Phi(l)=\max\{g(t,c-x_0(t)):(t,c)\in[0,1]\times[0,l]\}$$
$$=\max\{f(t,c-x_0(t)):(t,c)\in[0,1]\times[0,l]\}+M$$

$$\Psi(l)=\min\{g(t,c-x_0(t)):(t,c)\in[\mu,\nu]\times[\sigma l,l]\}$$
$$=\min\{f(t,c-x_0(t)):(t,c)\in[\mu,\nu]\times[\sigma l,l]\}+M$$

显然有$\Phi(l)\ge\Psi(l)$.

引理 2.3[6]

$$G(t,s)\ge q(t)J(s),\quad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$$

引理 2.4 $T:C^+[0,1]\to K$ 是全连续的.

证明：根据引理 2.3 和(*)式，对任何的$x\in C^+[0,1]$，$0\le t\le 1$，我们有

$$\begin{aligned}(Tx)(t)&=\int_0^t\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu\\ &\ge\int_0^t q(u)du\int_0^1 J(v)g(v,x(v)-x_0(v))dv\\ &\ge\theta(t)\max_{0\le u\le 1}\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dv\\ &\ge\theta(t)t\cdot\max_{0\le u\le 1}\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dv\\ &=\theta(t)\int_0^t[\max_{0\le u\le 1}\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dv]du\\ &\ge\theta(t)\int_0^t\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu\end{aligned}$$

故$(Tx)(t)\ge\theta(t)\|Tx\|$

所以$T:C^+[0,1]\to K$，再根据 Arzela-Ascoli 定理可知T是全连续算子.

引理 2.5[7](Krasnosel'skii 不动点定理)

设 X 是一个 Banach 空间，K 是 X 中的锥，Ω_1 和 Ω_2 都是 K 中的有界开子集，满足 $0\in\Omega_1$，$\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$. 如果 $T:K\to K$ 是一个全连续算子使得下列条件之一成立:

(1) $\|Tx\|\le\|x\|$，$x\in\partial\Omega_1$，并且 $\|Tx\|\ge\|x\|$，$x\in\partial\Omega_2$

(2) $\|Tx\|\ge\|x\|$，$x\in\partial\Omega_1$，并且 $\|Tx\|\le\|x\|$，$x\in\partial\Omega_2$

则 T 在 $\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1$ 中有一个不动点.

3.主要结果

定理 3.1 假设存在两个正数 a,b 使得 $\Phi(a)\le aA$，$\Psi(b)\ge bB$，则问题(P)至少有一个解 x^* 满足 $x^*+x_0\in K$ 并且 $\min\{a,b\}\le\|x^*+x_0\|\le\max\{a,b\}$

此外，如果还有 $\min\{a,b\}>\dfrac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M$，则 x^* 是一个正解.

证明：因为 $A<B$，容易看出 $a\ne b$，不失一般性，假设 $a<b$. 记

$$K_l=\{x\in K:\|x\|<l\},\ \partial K_l=\{x\in K:\|x\|=l\}$$

如果 $x\in\partial K_a$，则 $\|x\|=a$，$0\le x(t)\le a$，$0\le t\le 1$，于是

$$0\le g(t,x(t)-x_0(t))\le\Phi(a)\le aA,\ 0\le t\le 1$$

根据引理 2.4，我们有

$$\|Tx\|\le\max_{0\le t\le 1}(Tx)(t)=\max_{0\le t\le 1}\int_0^t\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu$$

$$\le aA\cdot\max_{0\le t\le 1}\int_0^t\int_0^1 G(u,v)dvdu=a=\|x\|$$

如果 $x\in\partial K_b$，则 $\sigma b=\min\limits_{\mu\le t\le\nu}\theta(t)\|x\|\le x(t)\le\|x\|=b$，$\mu\le t\le\nu$，于是

$$g(t,x(t)-x_0(t))\ge\Psi(b)\ge bB,\ \mu\le t\le\nu$$

则有

$$\|Tx\|\ge(Tx)(\eta)=\int_0^\eta\int_0^1 G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu$$

$$\ge\int_0^\eta\int_\mu^\nu G(u,v)g(v,x(v)-x_0(v))dvdu\ge bB\cdot\int_0^\eta\int_0^1 G(u,v)dvdu=b=\|x\|$$

根据引理 2.2, 2.4, 2.5，问题(P)至少有一个解 x^* 满足

$$x^*+x_0\in K\text{ 并且 }a\le\|x^*+x_0\|\le b$$

现仍设 $a<b$ 并设 $a>\dfrac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M$，令 $H(t)=x_0(t)-a\theta(t)$，$0<t\le 1$，则有

$$H(t)=\begin{cases}\dfrac{M}{24}[t^4-4t^3+(12\eta-6\eta^2)t^2]-\dfrac{1}{2}a\eta t^2 & 0<t\le\eta\\ \dfrac{M}{24}[t^4-4t^3+(12\eta-6\eta^2)t^2]-a[-\dfrac{t^3}{3}+\eta t^2-\dfrac{\eta^3}{6}] & \eta\le t\le 1\end{cases}$$

(1) 当$0<t\le\eta$时

$$\frac{x_0(t)}{\theta(t)}=\frac{\frac{M}{24}[t^4-4t^3+(12\eta-6\eta^2)t^2]}{\frac{1}{2}\eta t^2}=\frac{M}{12\eta}(t^2-4t+12\eta-6\eta^2)$$

$$<\frac{M}{12\eta}(12\eta-6\eta^2)=M(1-\frac{1}{2}\eta)<\frac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M<a$$

所以$x_0(t)-a\theta(t)<0$，即当$0<t\le\eta$时，$H(t)<0$.

(2)当$\eta\le t\le 1$时

$$H(t)=\frac{M}{24}[t^4-4t^3+(12\eta-6\eta^2)t^2]-a[-\frac{t^3}{3}+\eta t^2-\frac{\eta^3}{6}]$$

对$H(t)$求两次导数得

$$H''(t)=\frac{M}{2}t^2+(2a-M)t+M(\eta-\frac{\eta^2}{2})-2a\eta$$

由于$a>\frac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M>\frac{M}{2}(1-\eta)$，所以$H''(t)\ge H''(\eta)=0$，从而$H'(t)$在$[\eta,1]$上递增. 又

$$H'(t)=\frac{M}{24}[4t^3-12t^2+(24-12\eta^2)t]-a(-t^2+2\eta t)$$

所以，$H'(t)\le H'(1)=\frac{M}{24}(-8+24\eta-12\eta^2)-a(2\eta-1)$

因$a>\frac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M$，所以$H'(t)\le H'(1)<0$，于是$H(t)$在$[\eta,1]$上是减函数，所以

$$H(t)\le H(\eta)=\frac{M}{24}(-5\eta^4+8\eta^3)-\frac{1}{2}a\eta^3$$

因$a>\frac{-3\eta^2+6\eta-2}{6(2\eta-1)}M>\frac{M}{12}(-5\eta+8)$，故$H(t)\le H(\eta)<0$

由(1), (2)可知在$(0,1]$上，$H(t)<0$，即$x_0(t)-a\theta(t)<0$

现在，对于$0<t\le 1$

$$x^*(t)=x^*(t)+x_0(t)-x_0(t)$$
$$\ge\theta(t)\|x^*+x_0\|-x_0(t)\ge a\theta(t)-x_0(t)>0$$

因此，x^*是一个正解，定理得证.

参考文献

[1] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equations[J] .J Math Anal Appl, 1992, (168) :540-551 .
[2] Feng W, Webb J R L. Solvability of a three-point Nonlinear Boundary Value Problem at Resonance [J] .Nonlinear Analysis , 1997, 30(6) :3227-3238 .
[3] Ma R. Y. Positive solutions for second-order three-point boundary value problems [J] .Applied Mathematics Letters, 2001, (14) :1-5 .
[4] Sun,Y.,Liu,L..Solvability for a nonlinear second-order three-point boundary value problem[J] .J Math Anal Appl, 2004, 296 (1) :265~275 .
[5] Guo Y,Ge W. Three positive solutions for second order m-point boundary value problems[J] .Appl Math Camp, 2004, 156 (3) :733-742 .
[6] Yao Qiuliu. Existence of positive solutions for a third-order boundary value problem with semipositone nonlinearity[J]. 数学研究与评论, 2003, 23(4): 591-596.
[7] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
[8] 葛渭高, 李翠哲, 王宏洲. 常微分方程与边值问题[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
[9] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

Existence of Solutions and Positive Solutions foSemipositone Forth-order Three-point Boundary Value Problems

Shi Xundong, Yang Cheng, Chen Hailiang, Su Xingxing
Department of Mathematics, China University of Miningand Technology,
Jiangsu Xuzhou (221008)

Abstract

The existence of solutions and positive solutions is considered for a nonlinear forth-order three-point boundary value problem where nonlinear is allowed to have a negative lower bound .The main results show that the problem may possess positive solutions provided the “height” of nonlinear term are appropriate on some bounded sets

Keywords: forth-order three-point boundary value problem; semipositone nonlinearity; solution and positive solution; existence.

作者简介：
施恂栋(1983-), 硕士研究生, 主要从事常微分方程边值问题的研究.