一类非线性四阶两点边值问题的可解性[1]

杨成，施恂栋，陈海亮，苏星星
中国矿业大学理学院，江苏 徐州（221008）
Email: jssuqianyc@163.co

摘 要：考察了一类非线性项含有一阶、二阶与三阶导数的四阶两点边值问题的解和正解.通过构造适当的 Banach 空间并且利用相应的积分方程建立了两个存在定理.主要工具是 Lerry-Shauder 不动点定理.

关键词：四阶常微分方程；两点边值问题；解和正解；解的存在性
中图分类号：O175.8

1.引言

长度为 l 的细长直杆，其频率为 ω 的横向线性无阻尼振动由 Euler-Bernoulli 方程 $\frac{d^2}{dx^2}(EI(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x))=A(x)\rho\omega^2u(x)(0\le x\le l)$ 描述.其转化形式 $(Y(x)u''(x))''=\lambda\alpha(x)u(x),0\le x\le 1$. 上述四阶线性方程结合一定的边界条件，可以描述梁的静态或刚体运动，并且在理论和实际中还有着许多其它应用.

本文考察下列非线性四阶两点边值问题的解和正解的存在性：

$$\begin{cases}u^{(4)}=f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),0\le t\le 1\\ u'(0)=A,u''(0)=B,u'''(0)=C,ku(1)=u'''(1)\end{cases} \quad \text{(p)}$$

其中 k 为常数.假定 f 在其定义域内连续，并设范数 $\|y\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|y(t)|,y\in[0,1]$.我们称 y^* 为问题（p）的一个正解，如果 y^* 为问题（p）的解且 $y^*(t)>0,0<t<1$.

2005 年，张建国，刘进生在文献[1]中利用锥拉伸与锥压缩不动点定理讨论了问题

$$\begin{cases}u^{(4)}=f(u(x)),0\le x\le 1,\\ u'(0)=u''(0)=u'''(0),ku(1)=u'''(1)\end{cases}$$

正解的存在性与多重性，比较而言，问题（p）的一个显著特点是增加了导数项，这无疑提高了难度.只要非线性项 f 在其定义域的某个有界子集上的“高度”是适当的，该问题必然存在一个解，这种存在性不要求非线性项 f 有界或问题（p）有上下解，因此本文的结论是新的.

2. 预备知识

直接验证，即可得到

引理 2.1 当 $k\ne 0$ 时，问题（p）等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds+\frac{1}{6}Ct^3+\frac{1}{2}Bt^2$$
$$+At+(\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C-\frac{B}{2}-A \quad (1)$$

其中 $Green$ 函数

本课题得到国家自然科学基金项目（10771212）的资助.

$$G(t,s)=\frac{1}{6}\begin{cases}[(t-s)^3+\frac{6}{k}-(1-s)^3],0\le s\le t\le 1,\\ [\frac{6}{k}-(1-s)^3],0\le t\le s\le 1.\end{cases} \tag{2}$$

利用 $Green$ 函数的表达式（2），易证

引理 2.2 在有界闭区域 $D=\{(t,s)\,|\,0\le t\le 1,0\le s\le 1\}$ 上，当 $0<k\le 6$ 时，$G(t,s)\ge 0$；当 $k<0,$ 时 $G(t,s)<0$；当 $k>6$ 时，$G(t,s)$ 变号.

引理 2.3[2]（Leray-Schauder 不动点定理）

设 D 是实线性赋范空间 X 中的有界闭凸子集，$F:D\to D$ 全连续，则 F 在 D 上必有不动点.

3 主要结论

记 $\varphi(t)=\frac{1}{6}Ct^3+\frac{1}{2}Bt^2+At+(\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C-\frac{B}{2}-A,$

$\lambda_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi(t)|$，$\lambda_1=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi'(t)|$，$\lambda_2=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi''(t)|$，$\lambda_3=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi'''(t)|$，

$M_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|\int_0^1 G(t,s)ds|$，$M_1=\max\limits_{t\in[0,1]}|\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}ds|$，$M_2=\max\limits_{t\in[0,1]}|\int_0^1\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}ds|$，

$M_3=\max\limits_{t\in[0,1]}|\int_0^1\frac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3}ds|$

设 $R=(-\infty,+\infty),R_+=[0,+\infty),R_-=(-\infty,0]$,本文获得如下存在性结论

定理 1 设 $f:[0,1]\times R\times R\times R\times R\to R$,如果存在正数 d 使得

$\max\{|f(t,y_0,y_1,y_2,y_3)|:t\in[0,1],y_i\in[-d,d],i=0,1,2,3\}\le L$,则问题（p）有一个解 $y^*\in C^4[0,1]$ 满足 $\|(y^*)^{(i)}\|\le d,i=0,1,2,3$.

证明：由引理 1 知，问题（p）等价于积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds+\frac{1}{6}Ct^3+\frac{1}{2}Bt^2$$
$$+At+(\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C-\frac{B}{2}-A \tag{Q}$$

定义算子 T 为：对于 $u\in C^3[0,1],$

$$(Tu)(t)=\varphi(t)+\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds,t\in[0,1] \tag{3}$$

则积分方程（Q）等价于不动点方程 $u=Tu,u\in C^3[0,1]$.对（3）式两边求导可得

$$(Tu)'(t)=\varphi'(t)+\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds,$$

$$(Tu)''(t)=\varphi''(t)+\int_0^1\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds,$$

$$(Tu)'''(t)=\varphi'''(t)+\int_0^1\frac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds,$$

其中

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-s)^2,0\le s\le t\le 1,\\ 0,0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}=\begin{cases}t-s,0\le s\le t\le 1,\\ 0,0\le t\le s\le 1.\end{cases}$$

$$\frac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3}=\begin{cases}1,0\le s\le t\le 1,\\ 0,0\le t\le s\le 1.\end{cases}$$

根据 $Arela-Ascoli$ 定理可以证明 $T,(T(\cdot))',(T(\cdot))'',(T(\cdot))''':C^3[0,1]\to C[0,1]$ 均为全连续算子.因此 $T:C^3[0,1]\to C[0,1]$ 为全连续算子.

考察赋予范数 $|||y|||=\max\{\|u\|,\|u'\|,\|u''\|,\|u'''\|\}$ 的 $Banach$ 空间 $C^3[0,1]$.

取 $d=\max\{d_0,d_1,d_2,d_3\}$, 设 $V_d=\{u\in C^3[0,1]:|||u|||\le d\}$, 则 V_d 为 $C^3[0,1]$ 中的有界凸闭集.如果 $u\in V_d$ ，则 $\|u^{(i)}\|\le d,i=1,2,3,t\in[0,1]$. 于是对于 $0\le t\le 1$, 有

$$|f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)|\le L$$

由此可得

$$\|Tu\|=\max|\varphi(t)+\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds|$$

$$\le\max_{t\in[0,1]}|\varphi(t)|+\max_{t\in[0,1]}|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s)ds|$$

$$\le\lambda_0+LM_0=d_0\le d$$

$$\|(Tu)'\|=\max_{t\in[0,1]}|\varphi'(t)+\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds|$$

$$\le\max_{t\in[0,1]}|\varphi'(t)|+\max_{t\in[0,1]}|\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s)ds|$$

$$\le\lambda_1+LM_1=d_1\le d$$

$$\|(Tu)''\|=\max_{t\in[0,1]}|\varphi''(t)+\int_0^1\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds|$$

$$\le\max_{t\in[0,1]}|\varphi''(t)|+\max_{t\in[0,1]}|\int_0^1\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds|$$

$$\le\lambda_2+LM_2=d_2\le d$$

$$\|(Tu)'''\|=\max_{t\in[0,1]}|\varphi'''(t)+\int_0^1\frac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3}f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds|$$

$$\le \max_{t\in[0,1]} |\varphi'''(t)| + \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 \frac{\partial^3 G(t,s)}{\partial t^3} f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))ds\right|$$

$$\le \lambda_3 + LM_3 = d_3 \le d$$

所以$Tu \in V_d$，根据 Leray-Schauder 不动点定理知，存在$u^* \in V_d$，使得$Tu^* = u^*$,注意到

$$(u^*)^{(4)}(t) = (Tu^*)^{(4)}(t) = f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)), t\in[0,1],$$

因此问题（p）有一个解$u^* \in C^4[0,1]$, 使得$\|(u^*)^{(i)}\| \le d, i = 0,1,2,3.$

定理 3. 2 设 $f:[0,1]\times R_+ \times R\times R\times R \to R_+, B\le 0, C\ge 0, B+C\le 0,\ 0<k\le 6$，$(\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C - \frac{B}{2} - A \ge 0$, 如果存在正数$d$，使得

$$\max\{f(t,y_0,y_1,y_2,y_3): 0\le t\le 1, 0\le y_0\le d, -d\le y_i\le d, i=1,2,3\} \le L,$$

则问题（p）有一个非负解 $u^* \in C^4[0,1]$, 满足$\|(u^*)^{(i)}\| \le d, i=0,1,2,3.$ 此外，如果 $A^2+B^2+C^2 \ne 0$,则u^*是一个正解.

证明：因为$\varphi''(0) = B\le 0, \varphi''(1) = C+B \le 0,$ 所以$\varphi''(t) = Ct + B \le 0, t\in[0,1].$

从而$\varphi(t)$在$[0,1]$上是凹函数.又因为$\varphi(0) = (\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C - \frac{B}{2} - A \ge 0,$

$\varphi(1) = \frac{C}{6} + \frac{B}{2} + A + (\frac{1}{k}-\frac{1}{6})C - \frac{B}{2} - A = \frac{C}{k} \ge 0$，故$\varphi(t)\ge 0, t\in[0,1].$

下面构造辅助函数

$$\tilde f(t,y_0,y_1,y_2,y_3,) = \begin{cases} f(t,y_0,y_1,y_2,y_3), (y_0,y_1,y_2,y_3)\in R_+\times R\times R\times R, \\ f(t,0,y_1,y_2,y_3), (y_0,y_1,y_2,y_3)\in R_-\times R\times R\times R. \end{cases}$$

则 $\tilde f:[0,1]\times R\times R\times R\times R \to R$ 连续，并且

$$\max\{|\tilde f(t,y_0,y_1,y_2,y_3)|: 0\le t\le 1, -d\le y_i\le d, i=0,1,2,3\}$$

$$= \max\{f(t,y_0,y_1,y_2,y_3): 0\le t\le 1, 0\le y_0\le d, -d\le y_i\le d, i=0,1,2,3\}$$

$$\le L,$$

由定理 1，边值问题

$$u^{(4)} = \tilde f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)), 0\le t\le 1$$

$$u'(0) = A, u''(0) = B, u'''(0) = C, ku(1) = u'''(1)$$

有一个解$u^* \in C^4[0,1]$, 满足$\|(y^*)^{(i)}\| \le d, i=0,1,2,3,$ 且对于$0\le t\le 1$, 有

$$u^*(t) = \varphi(t) + \int_0^1 G(t,s)\tilde f(s,u^*(s),(u^*)'(s),(u^*)''(s),(u^*)'''(s))ds,$$

因为

$$\tilde f(t,u^*(t),(u^*)'(t),(u^*)''(t),(u^*)'''(t)) \ge 0, \varphi(t)\ge 0, t\in[0,1].$$

又由引理 2 知 $G(t,s) \geq 0, t \in [0,1]$. 根据 $\tilde{f}$ 的定义，这表明对于 $0 \leq t \leq 1$,

$$\tilde{f}(t,u^*(t),(u^*)'(t),(u^*)''(t),(u^*)'''(t)) = f(t,u^*(t),(u^*)'(t),(u^*)''(t),(u^*)'''(t)),$$

因此 u^* 是问题（p）的一个非负解.

如果 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, 则 A, B, C 不全为零，必有 $\varphi(t) \neq 0, t \in [0,1]$, 于是 $\|\varphi\| > 0$.

因为 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上的非负函数，有 $u^* \geq \varphi(t) > 0, t \in (0,1)$, 故 u^* 是问题（p）的一个正解.

参考文献

[1]张建国，张福伟，刘进生.一类四阶方程边值问题正解的存在性与多解性[J]工程数学学报，2005，22（5）：865-868

[2]郭大钧.非线性泛函分析（第二版）[M]，济南：山东科学技术出版社，2003.

[3]姚庆六.一类非线性四阶三点边值问题的可解性[J]山东大学学报，2006，41（1）：12-15

Solvability of a class of nonlinear fourth-order two-point boundary value problems

Yang Cheng, Shi Xundong, Chen Hailiang, Su Xingxing

College of Science, CUMT, Jiangsu, Xuzhou（221008）

Abstract

The solution and positive solution are considered for a class of fourth-order two-point boundary value problems whose nonlinear term contains first,second,and third derivatives. By constructing suitable Banach space and corresponding integral equation,two existence theorems are established.The main integredient is the Leray-Schauder fixed point theorem.

Keywords: fourth-order ordinary differential equation; two-point boundary value problem; solution and positive solution；existence of solution