一类二阶差分方程边值问题多个解的存在性

张国栋　孙红蕊

(兰州大学数学与统计学院, 甘肃, 兰州,730000)

Email：hrsun@lzu.edu.cn

摘要: 本文运用 Brezis 和 Rabinowitz 建立的两个临界点定理研究了一类二阶差分方程在 Dirichlet 边值条件下多个解的存在性, 并通过例子说明的定理结论的有效性.

关键词：差分方程, 边值问题, 多解, 临界点.

§1　引言

差分方程在物理, 工程等众多领域有着广泛的应用, 其中差分方程边值问题尤为重要. 近年来随着对微分方程边值问题研究的发展, 差分方程边值问题也引起了人们的关注, 本文考虑下面经典的带有 Dirichlet 边值条件的二阶差分方程：

$$\Delta^2 y(k-1) + f(k, y(k)) = 0, \quad k \in [1, T], \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(T+1) = 0, \tag{1.2}$$

其中 $f \in C(\mathbb{Z}\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$, Δ 代表向前差分算子, 定义为：$\Delta y(k-1) = y(k) - y(k-1)$, $\Delta^2 y(k-1) = \Delta(\Delta y(k-1))$, $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ 分别表示实数集和整数集, 记 $[1, T] = \{1, 2, \cdots, T\}$. 在文献 [1],[5],[7] 中, 作者运用上下解和不动点方法等研究了差分方程边值问题. 众所周知, 临界点理论是建立微分方程边值问题解的存在性的强有力工具, 在 [9] 中, 作者利用临界点理论和 Morse 理论研究了二阶微分方程在 Dirichlet 边值条件下的三个解的存在性. 但临界点理论在差分方程边值问题上的应用的研究还相对较少, 在 2003 年, 郭和庾在 [4] 中首次利用临界点理论研究了下面二阶差分方程:

$$\Delta^2 x_{n-1} + f(n, x_n) = 0$$

的周期解和次调和解的存在性, 随后在文献 [2] 中,R.P.Agarwal 研究了 (1.1),(1.2) 在奇异和非奇异情况下多个正解的存在性. 在 [11], 作者应用非光滑的三临界点定理得到了 (1.1)(1.2) 在非线性项不连续情况下多个解的存在性, 在 [6],[10] 中, 作者分别借助强单调算子和临界点理论研究了 (1.1) 在混合边值条件下解的存在结果. 为了进一步得到非线性项与方程解的存在性关系, 本文利用 Brezis 和 Rabinowitz 建立的两个临界点定理研究了与此方程相关矩阵的特征值有关的多个解的存在性.

[1]基金项目：国家自然科学基金 (10801065), 甘肃省自然科学基金 (0803RJZA096).

§2 预备知识

定义函数空间 $H = \{y : [0, T+1] \to R | y(0) = y(T+1) = 0\}$. 在 H 上定义内积为:$(y, z) = \sum_{k=1}^{T} y(k)z(k)$, $\|\cdot\|$ 是由内积诱导出的范数. 则 H 是一个 Hilbert 空间. 在 H 上定义泛函 I,

$$I(y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{T+1} |\Delta y(k-1)|^2 - \sum_{k=1}^{T} F(k, y(k)) = \frac{1}{2} y^\top A y - \sum_{k=1}^{T} F(k, y(k)),$$

其中 $F(k, s) = \int_0^s f(k, \xi) d\xi$, $y^\top = (y(1), \cdots y(T))$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{T \times T}. \tag{2.1}$$

显然 A 是正定对称矩阵, 其特征值为 $\lambda_k = 4\sin^2 \frac{k\pi}{2(T+1)}, k = 1, 2 \ldots, T$, 且满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_T$. 设 η_j 是 λ_j 对应的特征函数, 并且

$$(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

因 I 是 Frechet 可微的, 对任意的 $h \in H, y \in H$, 由

$$\sum_{k=1}^{T} \Delta^2 y(k-1)h(k) = -\sum_{k=1}^{T+1} \Delta y(k-1)\Delta h(k-1),$$

可得

$$I'(y)h = \sum_{k=1}^{T+1} \Delta y(k-1)\Delta h(k-1) - f(k, y(k))h(k) = -\sum_{k=1}^{T} [\Delta^2 y(k-1) + f(k, y(k))]h(k),$$

所以 $y \in H$ 是 I 的临界点当且仅当 y 是 (1.1),(1.2) 的解. 这样就把求 (1.1)(1.2) 解的存在性问题转化为寻找其对应的泛函临界点问题.

下面给出一些重要的概念.

设 E 是实的 Banach 空间,$J \in C^1(E, R)$ 表示 J 是 E 上的连续的 Frechet 可微泛函. 称 J 满足 (PS) 条件, 如果对任意的 $\{u_n\} \subset E$, 使得 $\{J(u_n)\}$ 有界且当 $n \to \infty$ 时,$J'(u_n) \to 0$, (这时称 $\{u_n\}$ 为 (PS) 序列), 则 $\{u_n\}$ 在 E 中有收敛子列.

令 B_ρ 是 E 中以 ρ 为半径, O 为中心的开球, ∂B_ρ 表示它的边界.

引理2.1. [3] 设 X 是实的 Banach 空间, $X = X_1 \oplus X_2, X_2$ 是有限维空间, $F \in C^1(X,R), F(0) = 0$ 且满足 (PS) 条件, 假设存在 $R > 0$, 使得

(C1) $F(u) \geq 0, u \in X_1, \|u\| \leq R$,

(C2) $F(u) \leq 0, u \in X_2, \|u\| \leq R$.

若 F 是下方有界的, 且 $\inf_X F < 0$. 那么,F 至少有两个非零的临界点.

引理2.2. [8] X 是实的有限维 Banach 空间,$dim(X) = n, I \in C^1(X,R)$ 且是偶的, 并满足 (PS) 条件,$I(0) = 0$. 如果 $X = V \bigoplus W$, 其中 $dim(V) = k < n$. 假设 I 满足:

$(C3)$ 存在 $\rho, \alpha > 0$, 使得 $I(x) \geq \alpha > 0,\ x \in \partial B\rho \bigcap W$.

$(C4)$ 对任意的子空间 $\tilde{E} \subseteq X$, 存在 $R = R(\tilde{E})$, 使得 $I(x) \leq 0, x \in \tilde{E} \setminus B_R$.

那么,I 至少有 $n-k$ 对不同的临界点.

§3 主要结果

定理3.1. 假设 f 满足下列条件:

(i) 存在 $k_0 \in [1, T-1], \lambda_{k_0} < \liminf_{s\to 0} \frac{f(k,s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \frac{f(k,s)}{s} < \lambda_{k_0+1},\ k \in [1,T]$, 其中 λ_{k_0} 和 λ_{k_0+1} 分别是 A 的第 k_0 个和第 k_0+1 个特征值.

(ii) $\limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(k,s)}{s} < \lambda_1,\ k \in [1,T]$.

那么 (1.1),(1.2) 至少有两个非平凡解.

证明: 设 $H_1 = span\{\eta_1, \cdots, \eta_{k_0}\}$, H_2 是 H_1 的正交补, 则 $H = H_1 \bigoplus H_2$. 由条件 (i) 知, 存在 $\epsilon > 0$(ϵ 可充分小), $\delta > 0$, 使得当 $|\ s\ | < \delta, s \neq 0$ 时, 对 $k \in [1,T]$ 有

$$\lambda_{k_0} + \epsilon < \frac{f(k,s)}{s} < \lambda_{k_0+1} - \epsilon.$$

从而

$$\int_0^s (\lambda_{k_0} + \epsilon)\xi d\xi < F(k,s) = \int_0^s f(k,\xi)d\xi < \int_0^s (\lambda_{k_0+1} - \epsilon)\xi d\xi.$$

即

$$\frac{\lambda_{k_0} + \epsilon}{2} s^2 < F(k,s) < \frac{\lambda_{k_0+1} - \epsilon}{2} s^2, \quad |\ s\ | < \delta, k \in [1,T]$$

所以当 $x \in H_1$ 且 $\|x\| \to 0$ 时, 对任意的 $k \in [1,T], |x(k)|$ 可以充分小, 使得

$$\sum_{k=1}^{T} F(k,x(k)) > \sum_{k=1}^{T} \frac{\lambda_{k_0}+\epsilon}{2} x^2(k) = \frac{\lambda_{k_0}+\epsilon}{2}\|x\|^2.$$

从而

$$I(x) \le \frac{1}{2}\lambda_{k_0}\|x\|^2 - \frac{\lambda_{k_0}+\epsilon}{2}\|x\|^2 = -\frac{\epsilon}{2}\|x\|^2 \le 0. \tag{3.1}$$

那么, 存在 $R_1 > 0$, 使得

$$I(x) \le 0, \quad x \in H_1, \|x\| \le R_1.$$

同理, 存在 $R_2 > 0$, 使得

$$I(y) \ge 0, \quad y \in H_2, \|y\| \le R_2.$$

取 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 那么,$I(x) \le 0, x \in H_1, \|x\| \le R; I(y) \ge 0, y \in H_2, \|y\| \le R$. 引理 2.1 中的条件 (C1),(C2) 成立.

此外由 (3.1) 可知, 存在 $x^* \in H_1$, 只要 $\|x^*\|$ 充分小, 且 $x^* \neq 0$ 可使得 $I(x^*) < 0$, 所以,$\inf_H I < 0, I(0) = 0$ 是明显的.

下面验证 I 是下方有界的.

由条件 (ii) 可知, 存在 $\epsilon \in (0,\lambda_1)$ 及 N 使得当 $|s| > N$ 时,$\frac{f(k,s)}{s} < \lambda_1 - \epsilon$, 所以, 存在 $a > 0$ 使得 $F(k,s) < \frac{\lambda_1-\epsilon}{2}s^2 + a, s \in \mathbb{R}$. 则对任意的 $y \in H$,

$$I(y) = \frac{1}{2}y^\top Ay - \sum_{k=1}^{T} F(k,y(k)) \ge \frac{1}{2}\lambda_1\|y\|^2 - \frac{\lambda_1-\epsilon}{2}\|y\|^2 - aT = \frac{\epsilon}{2}\|y\|^2 - aT \ge -aT. \tag{3.2}$$

所以 I 是下方有界的.

对任意的 $\{x_n\} \subset H$, 使得 $I(x_n)$ 有界且 $I'(x_n) \to 0, n \to \infty$, 又由 (3.2) 式可知 I 是强制的, 所以 $\{x_n\}$ 有界. 又 H 是有限维空间, 因此 $\{x_n\}$ 在 H 中有收敛子列, (PS) 条件满足, 从而, 由引理 2.1 即得结论.

定理3.2. 如果 f 满足:

(i) $f(k,s) = -f(k,-s)$, $k \in [1,T], s \in \mathbb{R}$,

(ii) $\limsup_{|s|\to 0} \frac{f(k,s)}{s} < \lambda_{k_0}$, $k \in [1,T]$, 其中 λ_{k_0} 为 A 的第 k_0 个特征值, $k_0 \in [1,T]$,

(iii) $\liminf_{|s|\to\infty} \frac{f(k,s)}{s} > \lambda_T$, $k \in [1,T]$.

那么,(1.1), (1.2) 至少有 $(T-k_0+1)$ 对不同的解.

证明：设 $H = V \bigoplus W$, 其中 $V = span\{\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{k_0-1}\}, W$ 是 V 的正交补. 由条件 (ii) 可知存在 $\epsilon > 0, \delta > 0$, 当 $|s| < \delta$ 时, $\frac{f(k,s)}{s} < \lambda_{k_0} - \epsilon$, 从而 $F(k,s) < \frac{\lambda_{k_0}-\epsilon}{2}s^2$. 则当 $x \in W$ 且 $\|x\|$ 充分小时,

$$\sum_{k=1}^{T} F(k, x(k)) < \frac{\lambda_{k_0} - \epsilon}{2} \sum_{k=1}^{T} x^2(k) = \frac{\lambda_{k_0} - \epsilon}{2} \|x\|^2.$$

所以

$$I(x) \geq \frac{1}{2}\lambda_{k_0}\|x\|^2 - \frac{\lambda_{k_0} - \epsilon}{2}\|x\|^2 = \frac{\epsilon}{2}\|x\|^2 \geq 0.$$

那么, 存在常数 $\rho, \alpha > 0$, 使得

$$I(x) \geq \alpha > 0, \ x \in \partial B_\rho \cap W.$$

引理 2.2 中的条件 (C3) 成立.

假设 $\tilde{E}$ 是 H 的任意子空间, 对任意的 $x \in \tilde{E}$,

$$I(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - \sum_{k=1}^{T} F(k, x(k)),$$

由条件 (iii) 知存在 $\epsilon > 0, N > 0$, 当 $|s| > N$ 时,$\frac{f(k,s)}{s} > \lambda_T + \epsilon$. 所以存在 $m > 0$ 使得 $F(k,s) > \frac{\lambda_T+\epsilon}{2}s^2 - m, \ k \in [1,T], \ s \in R$. 则

$$\sum_{k=1}^{T} F(k, x(k)) > \sum_{k=1}^{T} \frac{\lambda_T + \epsilon}{2} x^2(k) - mT,$$

从而

$$I(x) \leq \frac{1}{2}\lambda_T\|x\|^2 - \frac{\lambda_T + \epsilon}{2}\|x\|^2 + mT = -\frac{\epsilon}{2}\|x\|^2 + mT.$$

所以, 存在充分大的 $R = R(\tilde{E})$, 使得 $I(x) \leq 0, x \in \tilde{E} \setminus B_{R(\tilde{E})}$, 即引理 2.2 中 (C4) 成立.

下面验证 (PS) 条件. 取 (PS) 序列 $\{x_n\} \subset H$, 则存在 $M > 0, \ I(x_n) \geq -M$, 由上面的讨论可知泛函 I 在 H 上反强制 (取子空间 $\tilde{E} = H$), 所以 $\{x_n\}$ 有界, 从而 $\{x_n\}$ 在 H 上有收敛子列.

再有条件 (i) 易知 I 在 H 上是偶泛函. 那么通过引理 2.2 可得结论.

例3.3. 考虑二阶边值问题 (1.1), (1.2).

(1) 若 $f(k,y) = \frac{\lambda_{k_0}+\lambda_{k_0+1}}{2}y - ky^3, k \in [1,T], \lambda_{k_0}, \lambda_{k_0+1}$ 分别是 (2.1) 中的 $T \times T$ 矩阵 A 的第 k_0, k_0+1 个特征值. 则 $\lambda_{k_0} < \liminf_{s\to 0} \frac{f(k,s)}{s} < \lambda_{k_0+1}, k \in [1,T], \limsup_{|s|\to\infty} \frac{f(k,s)}{s} = -\infty < \lambda_1, \ k \in [1,T]$. 定理 3.1 中的假设满足. 所以由定理 3.1 知此时问题 (1.1),(1.2) 至少有两个非平凡解.

(2) 若 $f(k,s) = \frac{1}{k}\sin\lambda_1 s + \lambda_T s^3, k \in [1,T]$. 则易知定理 3.2 的假设满足。因此由定理 3.2 知边值问题 (1.1),(1.2) 有 $T-1$ 对不同的解.

参考文献

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, P.J.Y. Wong, Positive Solutions of Differential, Difference, and Integral Equations, Kluwer Academic, Dordrecht, 1999.

[2] R.P. Agarwal, K. Perera, D. O'Regan, Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods, Nonlinear Anal. 58 (2004) 69-73.

[3] H.Brezis, Remarks on finding critical points, Commun. Pure. Appl. Math. 44 (1991) 939-963.

[4] 郭志明, 庾建设, 二阶超线性差分方程的次调和解的存在性, 中国科学 (A), 2003,33(3):226-235.

[5] Z. He, J. Yu, On the existence of positive solutions of fourth-order difference equations, Appl. Math. Comput. 161 (2005) 139-148.

[6] L.Q.Jiang ,Z. Zhou,Existence of nontrivial solutions for discrete nonlinear two point boundary value problems, Appl. Math. Comput. 180 (2006) 318＋332.

[7] Y. Li, L. Lu, Existence of positive solutions of p-Laplacian difference equations, Appl. Math. Lett. 19 (2006) 1019-1023.

[8] P. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, in: CBMS Reg. Conf., vol. 65, Amer. Math. Soc., 1986.

[9] 舒小保, 朱全新, 一类二阶常微分方程边值问题的三个解, 中山大学学报, 2005,44:5-7.

[10] 宋兰芳, 郭志明, 一类差分方程边值问题正解的存在性, 广州大学学报,2009,8:46-48.

[11] G.Q. Zhang, W.G. Zhang, S.Y. Liu, Multiplicity result for a discrete eigenvalue problem with discontinuous nonlinearities, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007) 1068-1074.

Existence of multiple solutions of BVPs for a class second order difference equaitons

ZHANG Guodong, SUN Rui

School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000

Abstract

In this paper we study the existence of multiple solutions of boundary value problem for a class second order difference equation, by using the critical point theorem established by Brezis and Rabinowitz respectively. Some examples are also given to illustrate the resutls.

Keywords:difference equation;boundary value problem;multiple solution;critical point