源于流体边界层理论的两类非线性奇异边值问题

尚晓吉[1]，刘文斌[2]，张凤婕[1]，侯麟[2]
（1. 中国矿业大学力学系，江苏 徐州 221008;
2. 中国矿业大学数学系，江苏 徐州 221008）

摘要：本文利用上下解方法及 Schauder 不动点定理，从流体边界层理论中一些非线性奇异边值问题出发，分别研究了两类具有代表性的非奇异边值问题，并给出了相应的解的存在唯一性定理及证明。

关键词：边值问题；存在唯一性；上下解方法；Schauder 不动点定理

Two Nonlinear Singular Boundary Value Problems Arising in Boundary Layer Theory of Fluids

Shang Xiaoji[1], Liu Wenbin[2], Zhang Fengjie[1], Hou Lin[2]
(1. Department of Mechanics, China University of Mining Mechanics ,Xuzhou 221008;
2. Department of Mathmatics, China University of Mining ,Xuzhou 221008)

Abstract: In this paper, two types of nonlinear singular boundary value problems are studied . These problems are arising in the fluid boundary layer theory. By using upper and lower solution method and the Schauder fixed point theorem, the existence of two solutions uniqueness theorem and proof are given.

Keywords:boundaryvalue problem;existence and uniqueness;upper and lower solutions Schauder fixed point theorem

1 引言

奇异边值问题在自然科学，应用技术科学的许多问题的研究中均有应用，如空气动力学中的边界层理论 [1]和半球形岩石壳的扰动问题[2]等。而在流体边界层理论中， 很多层流边界层控制方程都可转化为对常微分方程奇异边值问题正解的研究。在对不可压缩流体绕流半无限长平板的层流边界层问题的研究中，Callegari 和 Friedman[3],Callegari 和 Nachman[4]分别研究了奇异边值问题

$$\begin{cases} g^{p}(x)g''(x)+\dfrac{x}{p}=0, & 0<x<1 \\ g'(0)=0, & g(1)=0 \end{cases}$$，其中 p=1 对应于牛顿流体。p>1 对应于非牛顿流体。

并确立了问题正解的存在性和唯一性。

程建刚[5]研究了以上边值问题的推广形式

$$\begin{cases} y''(t)+g(t,y(t))=0, & t\in(0,1); \\ y'(0)=0, & g(1)=b\geq 0. \end{cases}$$

Zheng liancun, Su Xiaohong, Zhang Xinxin[6]在研究幂律流体边界层时也推导出类似的边界层方程。

刘文斌[7]教授将此类边值问题一般化，研究了奇异边值问题

作者简介：尚晓吉（1988-），女，硕士，主要研究方向：工程力学. E-mail: xj2900@126.com

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, & t\in(0,1); \\ h(x(0),x'(0)=0, & x(1)=0. \end{cases}$$

的正解存在性。

受到上述工作的启发，本文讨论如下更具有一般形式的非线性奇异边值问题：

（Ⅰ） $$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, \\ x'(0)=\lambda<0, x(1)+cx'(1)=0. \end{cases}$$

（Ⅱ） $$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, \\ h(x(0),x'(0))=0, x(1)+cx'(1)=0. \end{cases}$$

其中，$c\ge 0$。

为行文方便，给出如下假设：恒设 $f(t,x)$：$[0,1]\times(0,\infty)\to R^{+}$ 连续，且关于 x 单调不增。

2 主要结果及证明

2.1 SBVP$(2.1)_{\lambda\nu}$ 解的唯一性定理

首先考察 SBVP

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, \\ x'(0)=\lambda<0, x(1)+cx'(1)=\nu>0. \end{cases} \qquad (2.1)_{\lambda\nu}$$

其中 $c\ge 0$。

引理 2.1 SBVP$(2.1)_{\lambda\nu}$ 有唯一解 $x_{\lambda\nu}(t)$。

证明：先证解的存在性。作变换 T:

$$Tx(t)=l(t)+\int_0^1 H(t,s)f(s,x(s))ds, \qquad (2.2)$$

其中

$$l(t)=\lambda t-(1+c)\lambda+\nu$$

$$H(t,s)=\begin{cases} 1-t+c, 0\le s\le t\le 1 \\ 1-s+c, 0\le t\le s\le 1 \end{cases}$$

根据对 $f(t,x)$ 的假设，易见 $Tx(t)\ge \lambda t-(1+c)\lambda+\nu \overset{\Delta}{=} \underline{\omega}(t)$，且当 x(t) $\ge \underline{\omega}(t)$ 时，

$Tx(t)\le \underline{\omega}(t)+\int_0^1 H(t,s)f(s,\underline{\omega}(s))ds \overset{\Delta}{=} \varpi(t)$。

若记 $\Omega=\{x(t)\in C[0,1]:\underline{\omega}(t)\le x(t)\le \varpi(t)\}$，则 T 是 $\Omega\to\Omega$ 上的完全连续算子。由 Schauder 不动点定理知映射（2.2）有不动点 $x_{\lambda\nu}(t)$，且此为边值问题$(2.1)_{\lambda\nu}$ 的一个解。

再证解的唯一性。用反证法。假设 SBVP$(2.1)_{\lambda\nu}$ 有两个不同解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，不妨设 $x_1(t)>x_2(t)$，$t\in[0,1)$，则由对

$$x_2(t)x_1''(t)-x_1(t)x_2''(t)=x_1(t)f(t,x_2(t))-x_2(t)f(t,x_1(t))\text{，}$$

两边积分得到

$$\int_0^1\left[x_2(t)x_1''(t)-x_1(t)x_2''(t)\right]dt=\int_0^1[x_1(t)f(t,x_2(t))-x_2(t)f(t,x_1(t))]dt\text{。}$$

由于 f 单调不增，易得右式≥0；而左式

$$=x_2(t)x_1'(t)\big|_0^1-x_1(t)x_2'(t)\big|_0^1=\frac{v[x_2(1)-x_1(1)]}{c}+\lambda[x_1(0)-x_2(0)]<0$$

此时，左式<0 与右式≥0 矛盾。唯一性得证。

引理 2.2 SBVP（2.1）$_{\lambda v}$ 的解 $x_{\lambda v}(t)$ 关于 v 单调不减，关于 λ 单调不增。

证明：关于 v 的单调性可仿引理 2.1 的唯一性证明。关于 λ 的单调性，用反证法，设 $\lambda_1>\lambda_2$ 则有 $x_{\lambda_1 v}(t)>x_{\lambda_2 v}(t)$， $t\in[0,1)$。由 $f(t,x)$ 的单调性可知，在 $[0,1)$ 上

$$x_{\lambda_1 v}''(t)=-f(t,x_{\lambda_1 v})\geq -f(t,x_{\lambda_2 v})=x_{\lambda_2 v}''(t)\text{。}$$

对此不等式两边从 t 到 1 积分，整理，得到

$$x_{\lambda_1 v}'(t)\leq x_{\lambda_2 v}'(t)+x_{\lambda_1 v}'(1)-x_{\lambda_2 v}'(1)\leq x_{\lambda_2 v}'(t)\text{。}$$

特别地，当 $t=0$ 时有 $\lambda_1\leq\lambda_2$，此与假设矛盾。

2.2 两个定理的给出及证明

定理 2.1 SBVP

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, \\ x'(0)=\lambda<0, x(1)+cx'(1)=0. \end{cases} \tag{2.1.a}$$

存在唯一解。即当 $v=0$ 时，SBVP $(2.1)_{\lambda 0}$ 存在唯一解 $x_{\lambda 0}(t)$。

证明： 易于验证，对于任意的 $\lambda<0$，解序列 $\{x_{\lambda v}(t)\}$ 关于 v 在[0,1]上一致收敛。事实上，任取 v_1， v_2，不妨设 $0<v_1<v_2$，由引理 2.2 可得

$$0<x_{\lambda v_2}(t)-x_{\lambda v_1}(t)=v_2-v_1+\int_0^1 H(t,s)\left[f(s,x_{\lambda v_2}(s))-f(s,x_{\lambda v_1}(s))\right]ds\leq v_2-v_1 \quad \text{（2.1.b）}$$

从而存在 $x_{\lambda_0}(t)\in C[0,1]$，使得于 $[0,1]$ 上 $\lim\limits_{v\to 0}x_{\lambda v}(t)\overset{\text{一致}}{=}x_{\lambda_0}(t)$。对等式

$$x_{\lambda v}(t)=\lambda t+v-(1+c)\lambda+\int_0^1 H(t,s)f(s,x_{\lambda v}(s))ds$$

取极限 $v\to 0^+$，得到

$$x_{\lambda 0}(t)=\lambda t-(1+c)\lambda+\int_0^1 H(t,s)f(s,x_{\lambda 0}(s))ds\text{，}$$

即 $x_{\lambda 0}(t)$ 是 SBVP $(2.1)_{\lambda 0}$ 唯一解。

引理 2.3 SBVP

$$\begin{cases} x''+f(t,x)=0, \\ x(0)=\alpha\ge 0, x(1)+cx'(1)=\beta\ge 0. \end{cases} \tag{2.3}_{\alpha\beta}$$

有唯一正解 $\overline{x_{\alpha\beta}}(t)$。特别地，当 $\alpha=\beta=0$ 时，SBVP $(3.4)_{00}$ 有唯一正解 $\overline{x_{00}}(t)$。

证明：同引理 2.1。

定理 2.2 设

（1）存在 $\overline{\omega}(t),\underline{\omega}(t)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), 0\le\underline{\omega}(t)\le\overline{\omega}(t), t\in[0,1], \underline{\omega}(t),\overline{\omega}(t)$ 在 0，1 点的导数或者存在，或者分别有 $\underline{\omega}'(0)=+\infty, \underline{\omega}'(1)=-\infty, \overline{\omega}'(0)=-\infty, \overline{\omega}'(1)=+\infty$，并且使得

$\overline{\omega}''(t)+f(t,\overline{\omega}(t))\le 0, \underline{\omega}''(t)+f(t,\underline{\omega}(t))\ge 0, t\in(0,1)$。

（2）$h(x,y)\in C(R^2)$,关于 y 单调不减，且当 $\underline{\omega}'(0),\overline{\omega}'(0)$ 有限时，$h(\underline{\omega}(0),\underline{\omega}'(0))\ge 0$，$h(\overline{\omega}(0),\overline{\omega}'(0))\le 0$；当 $\underline{\omega}'(0),\overline{\omega}'(0)$ 无限时，$h(\underline{\omega}(0),\underline{\omega}'(0))=+\infty$，$h(\overline{\omega}(0),\overline{\omega}'(0))=-\infty$，于是，当 $\underline{\omega}(1)+c\underline{\omega}'(1)\le\beta\le\overline{\omega}(1)+c\overline{\omega}'(1)$ 时，奇异方程

$$x''+f(t,x)=0, 0<t<1 \tag{2.2.a}$$

有满足非线性边值条件

$$h(x(0),x'(0))=0, x(1)+cx'(1)=\beta \tag{2.2.b}$$

的解 $x(t)$，且在 $[0,1]$ 上满足不等式 $\underline{\omega}(t)\le x(t)\le\overline{\omega}(t)$。

证明：由引理 2.3 知，对于任意 $\alpha,\beta\ge 0$，边值问题 $(2.3)_{\alpha\beta}$ 的解 $\overline{x_{\alpha\beta}}(t)$ 存在。下面证明当 $\underline{\omega}(0)\le\alpha\le\overline{\omega}(0)$，$\underline{\omega}(1)+c\underline{\omega}'(1)\le\beta\le\overline{\omega}(1)+c\overline{\omega}'(1)$ 时，$\overline{x_{\alpha\beta}}(t)$ 在 $[0,1]$ 上满足不等式 $\underline{\omega}(t)\le\overline{x_{\alpha\beta}}(t)\le\overline{\omega}(t)$。

反设右边不等式不成立，则存在 $[t_1,t_2]\subset[0,1]$，使得 $\overline{x_{\alpha\beta}}(t_1)=\overline{\omega}(t_1), \overline{x_{\alpha\beta}}(t_2)=\overline{\omega}(t_2)$, 且 $\overline{x_{\alpha\beta}}(t)>\overline{\omega}(t), t\in(t_1,t_2)$，作函数 $m(t)=\overline{\omega}(t)-\rho(t)$，其中 $\rho(t)$ 满足条件

$\rho''=\rho', -\min(\delta,\varepsilon)\le\rho(t)\le 0$，$t\in[t_1,t_2], \rho'(t)>0, t\in(t_1,t_2), \delta>0$ 充分小，ε 满足

$$2\varepsilon=\max_{t\in[t_1,t_2]}[\overline{x_{\alpha\beta}}(t)-\overline{\omega}(t)].$$

显然 $m(t)\ge\overline{\omega}(t), t\in(t_1,t_2)$，且存在 $t_0\in(t_1,t_2)$ 使得

$$\overline{x_{\alpha\beta}}(t_0)-m(t_0)=\max_{t\in[t_1,t_2]}[\overline{x_{\alpha\beta}}(t)-\overline{\omega}(t)]>0, \overline{x_{\alpha\beta}}''(t_0)-m''(t_0)\le 0.$$

由于当 $t\in(t_1,t_2)$ 时，

$$m''(t)=\overline{\omega}''(t)-\rho''(t)\le -f(t,\overline{\omega}(t))-\rho'(t)<-f(t,m(t))$$

所以

$$\overline{x''_{\alpha\beta}}(t_0)-m''(t_0)>-f(t_0,\overline{x_{\alpha\beta}}(t_0))+f(t_0,m(t_0))\ge 0,$$

矛盾。同理可证$\underline{\omega}(t) \le \overline{x_{\alpha\beta}}(t), (0 \le t \le 1)$成立。

下面证明，存在$\alpha_0 \in \left[\underline{\omega}(0), \overline{\omega}(0)\right]$，使得$\overline{x_{\alpha_0\beta}}(t)$满足条件(2.2.b)。

如果$\underline{\omega}(0) = \overline{\omega}(0) = \alpha$，则$\underline{\omega}'(0) \le \overline{x}_{\alpha\beta}'(0) \le \overline{\omega}'(0)$，所以

$$0 \le h(\underline{\omega}(0), \underline{\omega}'(0)) \le h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0)) \le h(\overline{\omega}(0), \overline{\omega}'(0)) \le 0$$

即 $h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0)) = 0$，从而$\overline{x}_{\alpha\beta}(t)$就是(2.2.a)(2.2.b)的解，以下不妨设$\underline{\omega}(0) < \overline{\omega}(0)$。反设所证结论不成立，则存在$\varepsilon_0 > 0$，对于任意$\alpha \in \left[\underline{\omega}(0), \overline{\omega}'(0)\right]$，有

$$\left|h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0))\right| \ge \varepsilon_0。$$

定义集合$S = \left\{\overline{x}_{\alpha\beta}(t) : h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0)) \ge \varepsilon_0\right\}$。由条件（2）知，当$\alpha = \underline{\omega}(0)$时，$h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0)) \ge \varepsilon_0$，而当$\alpha = \overline{\omega}(0)$时，$h(\overline{x}_{\alpha\beta}(0), \overline{x}_{\alpha\beta}'(0)) \le -\varepsilon_0$，所以 S 非空，若记$\alpha_0 = \sup\left\{\alpha : \overline{x}_{\alpha\beta}(t) \in S\right\}$，则$\underline{\omega}(0) \le \alpha_0 \le \overline{\omega}(0)$，且由微分方程解的连续性，当$\underline{\omega}'(0) = +\infty$时，上不等式之左端为严格不等式，再注意到$\overline{x}_{\alpha\beta}(t), \overline{x}_{\alpha\beta}'(t)$关于$\alpha$的单调性，记 S 中解元素的一致极限为$x_0(t)$，则$x_0(t)$是方程（2.2.a）的解，且满足

$$x_0(0) = \alpha_0, x_0(1) + cx_0'(1) = \beta, h(x_0(0), x_0'(0)) \ge \varepsilon_0 \quad , \qquad (2.2.c)$$

又因为$\alpha_0 < \overline{\omega}(0)$，取充分大的 N,使得$\alpha_0 + 1/N \le \overline{\omega}(0)$。令$\alpha_n = \alpha_0 + 1/n, n > N$，则

$\overline{x}_{\alpha_n\beta}(t) \ge \overline{x}_{\alpha\beta}(t), t \in [0,1]$，且存在$\overline{x}_0(t) \in C[0,1]$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \overline{x}_{\alpha_n\beta}(t) \overset{\text{一致}}{=} \overline{x}_0(t)。$$

显然，$\overline{x}_0(t)$是$(2.3)_{\alpha\beta}$的一个解，且由$h(\overline{x}_{\alpha_n\beta}(0), \overline{x}_{\alpha_n\beta}'(0)) \le -\varepsilon_0$得到

$h(\overline{x}_0(0), \overline{x}_0'(0)) \le -\varepsilon_0$。又因为$(2.3)_{\alpha\beta}$的解的唯一性，所以$x_0(t) \equiv \overline{x}_0(t), t \in [0,1]$，进而$h(x_0(0), x_0'(0)) \le -\varepsilon_0$，此与（2.2.c）矛盾，定理证毕 。

参考文献

[1] Vajravela K, Soewono E, Mohapatra R N, et al. On Solutions of Some Singular, Nonlinear Differential Equations Arising in Boundary Layer Theory[J]. J Math Anal Appl, 1991, 155:499-512
[2] Baxley J V .A Singular Nonlinear Boundary Value Problem: MembraneResponse of a Spherical Cap[J]. SIAM J Appl Math ,1988,48(3) :497-505
[3] Callegari A J, Friedman M B. An analytical solution of nonlinear singular boundary value problem in the theory of viscous fluids[J]. J Math Anal Appl, 1968,21:510-529
[4] Nachman A, Callegari A J. A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplasitic fluids[J]. SIAM J Appl Math, 1980,38:275-281

[5] 程建纲．二阶微分方程边值问题的多重正解[[J]．应用数学学报，2003,26(2):272-279
[6] Zheng Liancun , Su Xiaohong , Zhang Xinxin. Similarity Solutions for boundary layer flow on a moving surface in an otherwise quiescent fluid medium[J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics,2005,19(4):541-552
[7] 刘文斌 .非线性奇异边值问题[J].吉林大学自然科报 ,1996,115(1):5～8