

# 基于容纳量阻滞的单种群捕获策略模型

陈春香

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221008)

**摘要:** 通过分析环境因素对单种群的限制作用, 引入内禀损耗率的概念, 运用微积分和生态学等理论和方法, 讨论了各年龄组鱼群的数量关于时间的变化关系, 给出了实现可持续捕获的条件, 建立了在此条件下得到最高年收获量的数学模型, 并用软件 MATLAB 求得了模型的最优解, 数值计算结果表明本文所建的模型是实际可行的。

**关键词:** 微分方程; 单种群; 数学模型; 内禀损耗率; 捕捞强度

中图分类号: O 224

## Harvest model for a single race by the capacity blocked

Chen Chunxiang

(School of Sciences, China University of Mining and Technology, JiangSu XuZhou 221008)

**Abstract:** Considering stock of fish are restricted by environmental factor, we introduce the new concept-inner regret probability, by using the theories and methods of ecology and calculus, we discuss the relations between the number of each kind of fish and time and present a mathematical model to maximal sustainable yield in each year. The optimum result is solved by matlab. Numerical results indicate that the new model is quite applicable.

**Keywords:** differentialequation; singlerace; mathematicalmodel; innerregretprobability; catching intensity

## 0 引言

资源的枯竭已经使人类的生存面临严重的威胁, 如何合理的开发和利用资源, 特别是可再生资源这一问题, 越来越受到学术界的重视。

白利华等在可持续捕获的前提下, 得出种群系统稳定的结论, 并进而得到了最优可持续捕获的策略<sup>[1]</sup>。王玮明等采用点面结合的思想, 建立可持续捕获策略模型<sup>[2]</sup>。汪宏喜把鱼群作为一个整体来研究, 建立了动态综合模型<sup>[3]</sup>。郭炳艳通过建立具有最大环境容纳量限制的控制模型, 得到渔场的最优捕获策略<sup>[4]</sup>。武亦文将各年龄段鱼群作为一个整体, 建立了一个以捕捞强度为参数的非线性差分方程组模型<sup>[5]</sup>。李银山等借用 Leslie 人口模型来描述种群动力系统模型, 得出鱼群数量稳定的条件<sup>[6]</sup>。刘国玲等在满足可持续捕获要求下, 建立了微分方程模型, 得到了满足要求的最优捕获策略<sup>[7-10]</sup>。但这些研究大都倾向于具体问题的探讨, 且是以损耗率为常数建立的各年龄组鱼群数量的微分方程表达式, 而缺乏对可持续捕获策略的微观研究。

由于鱼群的生长受自然资源和环境条件的限制, 因此环境容纳量就显得尤为重要了。本文将在此基础上, 综合运用生态学<sup>[11, 12]</sup>, 数学建模<sup>[13, 14]</sup>和微分方程<sup>[15, 16]</sup>等理论与方法, 以渔场容纳量作为出发点, 建立可持续捕获策略模型, 并利用 Matlab 编程<sup>[17]</sup>求得最优解, 以期对渔业资源的可持续发展提供科学的依据和理论指导。

## 1 问题的提出

资源的枯竭已经使人类的生存面临严重的威胁, 为了保护人类赖以生存的自然环境, 可

---

作者简介: 陈春香(1984-), 女, 硕士, 常微分方程. E-mail: chunxiang\_chen@sina.com

再生资源的开发必须适度。一种合理、简化的策略是，在实现可持续收获的前提下，追求最大的产量或最佳效益。本文考虑一类基于渔场容纳量阻滞的某种鱼的最优捕获策略。该种鱼有如下的基本特征：

具有稳定的年龄结构，且其为季节性集中产卵繁殖，低龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后几个月，卵孵化并成长为 1 龄鱼。考虑到鱼的繁殖期，渔业管理部门规定，每年只允许在产卵孵化期前进行捕捞作业，且只捕捞高龄鱼。

文中将考虑如下问题：

1) 出于经济效率的考虑，渔场对其内的鱼群数量有最低要求，在该限制下，如何实现可持续捕获？

2) 在 (1) 的前提下，所能获得的最高年收获量是多少？

## 2 模型的假设及符号说明

### 2.1 名词解释

(1) 内禀损耗率：指在各种不利因素的情况下鱼群的损耗率；

(2) 低龄鱼：指  $i$  龄鱼 ( $i = 1, 2, \dots, j$ )；

(3) 高龄鱼：指  $i$  龄鱼 ( $i = j + 1, \dots, n$ )。

### 2.2 模型的假设

(1) 渔场是非开放式渔场，不与其它水域发生关系，构成独立的生态群落，鱼群是一个独立的种群，不存在与其它生物的竞争，若有竞争，其影响也只局限在鱼的内禀损耗内；

(2) 各年龄组鱼群的每个个体是同质的。虽然鱼群量本身是离散的，但是突然增加或减少的只是少数个体，与整体相比很微小，故渔场中各年龄组鱼群的数量是时间的连续可微函数；

(3) 鱼群分  $n$  个年龄组，前  $j$  个年龄组不具备产卵能力，为低龄鱼。从第  $j + 1$  个年龄组开始为高龄鱼，平均每条高龄鱼的产卵量为  $q_i$  ( $i = j + 1, \dots, n$ )。各年龄组每条鱼的平均重量为  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )， $n$  龄鱼存活一年后仍为  $n$  龄鱼；

(4) 以年为时间单位，将 1 年分为两个阶段，第一阶段为捕捞期，即前  $a$  时间段内进行捕捞作业，第二阶段为禁捕期。且捕捞是一个连续过程，不是在某一时刻突发。捕捞强度系数  $E_i$  ( $i = j + 1, \dots, n$ ) 每年均固定，但对不同年龄的高龄鱼的捕捞强度系数不同，即  $E_i$  之间的关系为： $F(E_{j+1}, E_{j+2}, \dots, E_n) = 0$ ；

(5) 高龄鱼在禁捕期集中产卵，并在开始时刻进行，且为瞬时完成。而卵的孵化是在禁捕期结束时刻进行的，也是瞬时完成的。鱼卵孵化后的成活率为  $\beta$ 。孵化成活的幼鱼进入一龄鱼组；

(6) 各年龄组鱼的内禀损耗率在每年的年初时刻均为  $r$ ，损耗是一个连续过程，不是在某一时刻突发。且受渔场容纳量的限制，该种鱼的内禀损耗率为各年龄组鱼群数目  $x_i^T(t)$  的函数  $r(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，即随着渔场中各年龄组鱼数量的减少，鱼群的内禀损耗率亦减少，而渔场的容纳量要求各年龄组鱼的数量最低均为  $x_{\min}$ ，该值视实际情况而定。

### 2.3 符号的说明

$r(x)$ : 鱼群的内禀损耗率;

$x_i^T(t)$ :  $i$  龄鱼在第  $T$  年的  $t$  时刻实际存活的数量 ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $t \in [0,1]$ ;

$x_{i1}^T(t)$ :  $i$  龄鱼在第  $T$  年的第一阶段  $t$  时刻实际存活的数量 ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $t \in [0,a]$ ;

$x_{i2}^T(t)$ :  $i$  龄鱼在第  $T$  年的第二阶段  $t$  时刻实际存活的数量 ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $t \in [a,1]$ ;

$\mu_i^T$ : 第  $T$  年年初  $i$  龄鱼的数量;

$E_i$ : 对高龄鱼的捕捞强度系数;

$\beta$ : 鱼卵孵化后的成活率 ( $\beta = \delta / (\delta + Q^T)$ )。

## 3 模型的分析

### 3.1 各年龄组鱼在任一时刻的内禀损耗率

由题知,若设定该种鱼的内禀损耗率为常数  $r$ ,记时刻  $t=0$  时鱼的数量为  $x_0$ ,时刻  $t$  的数量为  $x(t)$ 。 $t$  到  $t+\Delta t$  时间段内鱼的增量为:  $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -rx(t)$ 。于是  $x(t)$  满足微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -rx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

解该微分方程,得  $x(t) = x_0 e^{-rt}$ 。

表明:  $t \rightarrow \infty$  时,  $x(t) \rightarrow 0 (r > 0)$ ,即说明鱼群将以指数规律无限减少。而事实上,随着鱼群数量的减少,自然资源、环境条件等因素对鱼群数量减少的限制作用越来越显著,使得鱼群的损耗率不能再为一个常数。如果当鱼群数量较多时鱼群的损耗率可以看作常数的话,那么当鱼群数量减少到一定数量以后,这个损耗率就要随着鱼群数量的减少而降低,这样,鱼群数量的减少速度便没有指数模型预测的那么快,于是应该对指数模型关于鱼群的内禀损耗率是常数的假设进行修改。

由假设知,该种鱼的内禀损耗率为各年龄组鱼群数目  $x_i^T(t)$  的函数  $r(x)$ ,为简单且不失一般性,设定  $r(x) = r - \frac{s}{x}$ ,  $r, s > 0$ 。由于渔场容纳量有最低值的限制,则当  $x = x_{\min}$  时鱼

群的损耗率应为 0,即  $r(x_{\min}) = 0$ 。于是  $s = rx_{\min}$ ,代入  $r(x) = r - \frac{s}{x}$  中,得

$$r(x) = r(1 - \frac{x_{\min}}{x})。$$

### 3.2 各年龄组鱼的捕捞强度系数

只考虑捕捞对鱼群变化的影响,则在  $t$  到  $t+\Delta t$  的这段时间内,鱼类数量由捕捞产生的变化量为  $x(t+\Delta t) - x(t)$ 。单位时间的捕捞量是  $\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ 。当它与鱼群的大小成正

比时应该有关系： $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -Ex(t)$ 。这个关系应该对任何时间间隔  $\Delta t$  都成立。于

是，令  $\Delta t \rightarrow 0$  就得到方程  $\frac{dx(t)}{dt} = -Ex(t)$ 。捕捞强度系数应该为满足这个关系的量  $E$ 。

### 3.3 产卵期产卵总数的计算

题中要求产卵孵化期是每年的最后几个月，而且是集中繁殖，在不失生物学的真实前提下，由假设，设定鱼群的个体在禁捕期的第一天集中一次产卵。

由于低龄鱼不产卵，平均每条高龄鱼的产卵量为  $q_i$  ( $i = j+1, \dots, n$ )，则第  $T$  年度产卵

期产卵总量为： $Q^T = \sum_{i=j+1}^n q_i \cdot x_{i1}^T(a)$ 。

### 3.4 渔场中 $t$ 时刻各年龄鱼的数量 $x_i^T(t)$

通过前面的分析知，鱼群的内禀损耗率是关于各年龄组鱼群数目  $x_i^T(t)$  的函数  $r(x)$ ，将  $r(x)$  代入 (1) 式，有

$$\begin{cases} \frac{dx_i^T(t)}{dt} = -r\left(1 - \frac{x_{\min}}{x_i^T(t)}\right)x_i^T(t) \\ x_i^T(0) = x_0, x_i^T(t) \geq x_{\min} \end{cases} \quad (2)$$

解之得  $x_i^T(t) = (x_0 - x_{\min})e^{-rt} + x_{\min}$ 。

#### 3.4.1 在 $T$ 年低龄鱼的数量 $x_i^T(t)$

由题知，捕捞仅限于高龄鱼，在第  $T$  年度  $t$  时刻低龄鱼的数量满足式 (2)，由

$$\begin{cases} \frac{dx_i^T(t)}{dt} = -r\left(1 - \frac{x_{\min}}{x_i^T(t)}\right)x_i^T(t) \\ x_i^T(0) = \mu_i^T, x_i^T(t) \geq x_{\min} \end{cases}$$

得  $x_i^T(t) = (\mu_i^T - x_{\min})e^{-rt} + x_{\min}$ 。

#### 3.4.2 在 $T$ 年高龄鱼的数量 $x_i^T(t)$

1) 捕捞期的  $x_{i1}^T(t)$  ( $0 \leq t \leq a$ )

考虑到总是采用固定努力量的捕捞方式，故有

$$\begin{cases} \frac{dx_{i1}^T(t)}{dt} = -r\left(1 - \frac{x_{\min}}{x_{i1}^T(t)}\right)x_{i1}^T(t) - E_i x_{i1}^T(t) \\ x_{i1}^T(0) = \mu_i^T, x_{i1}^T(t) \geq x_{\min} \end{cases}$$

解之得

$$x_{i1}^T(t) = \left(\mu_i^T - \frac{r x_{\min}}{r + E_i}\right) e^{-(r+E_i)t} + \frac{r x_{\min}}{r + E_i} \quad (3)$$

2) 产卵和孵化期的  $x_{i2}^T(t)$  ( $a \leq t \leq 1$ )

由式 (3) 可求得捕捞期结束时的数量

$$x_{i1}^T(a) = \mu_i^T e^{-(r+E_i)a} + \frac{r}{r+E_i} x_{\min} (1 - e^{-(r+E_i)a})$$

而产卵孵化期的  $x_{i2}^T(t)$  也应满足式 (2), 因此, 由

$$\begin{cases} \frac{dx_{i2}^T(t)}{dt} = -r(1 - \frac{x_{\min}}{x_{i2}^T(t)})x_{i2}^T(t) \\ x_{i2}^T(0) = x_{i1}^T(a), x_{i2}^T(t) \geq x_{\min} \end{cases}$$

可求得:

$$x_{i2}^T(t) = (x_{i1}^T(a) - x_{\min})e^{-rt} + x_{\min} \quad (4)$$

结合 (3) 和 (4) 式, 可得在 T 年高龄鱼的数量为:

$$x_i^T(t) = \begin{cases} (\mu_i^T - \frac{rx_{\min}}{r+E_i}) e^{-(r+E_i)t} + \frac{rx_{\min}}{r+E_i}, & t \in [0, a] \\ (x_{i1}^T(a) - x_{\min})e^{-rt} + x_{\min}, & t \in [a, 1] \end{cases} \quad (5)$$

### 3.5 实现可持续捕获的条件

要实现可持续捕获, 即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群数目不变。由假设知, 各年龄鱼间的状态转化情况如图 1 所示:

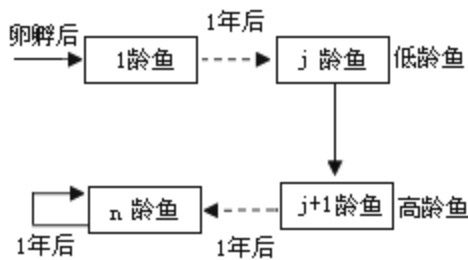


图 1 各年龄鱼间的状态转化情况

Fig.1 The situation of the fish conversion

通过前面的分析, 要实现可持续捕获, 即  $\mu_i^{T-1} = \mu_i^T = \mu_i^{T+1} (T=1, 2, \dots)$ , 则各年龄组鱼的初始数据需满足如下条件:

$$\mu_1^T = \beta Q^{T-1}, \mu_2^T = x_1^{T-1}(1) \dots, \mu_{n-1}^T = x_{n-2,2}^{T-1}(1), \mu_n^T = x_{n-1,2}^{T-1}(1) + x_{n,2}^{T-1}(1)。$$

### 3.6 捕获高龄鱼的数量 $m_i^T$ 和年捕捞总重量

在 T 年, 捕获高龄鱼 i 的数量  $m_i^T$  为:

$$m_i^T = E_i \int_0^a x_{i1}^T(t) dt。$$

则年捕捞总重量  $M_T$  为:

$$M_T = \sum_{i=j+1}^n m_i^T w_i = \sum_{i=j+1}^n w_i E_i \int_0^a x_{i1}^T(t) dt。$$

## 4 模型的建立及求解

### 4.1 模型的建立

在基于渔场环境容纳量阻滞的情况下，要实现可持续捕获，获得最高年收获量，通过前面的分析，建立如下的数学模型：

$$\begin{aligned} \max M_T &= \sum_{i=j+1}^n m_i^T w_i = \sum_{i=j+1}^n w_i E_i \int_0^a x_{i1}^T(t) dt \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \mu_1^T = \beta Q^{T-1} \\ \mu_2^T = x_1^{T-1}(1) \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{n-1}^T = x_{n-2,2}^{T-1}(1) \\ \mu_n^T = x_{n-1,2}^{T-1}(1) + x_{n,2}^{T-1}(1) \\ Q^{T-1} = \sum_{i=j+1}^n q_i \cdot x_{i1}^{T-1}(a) \\ F(E_{j+1}, E_{j+2}, \dots, E_n) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

### 4.2 模型的求解

选取某渔场，其中具有 4 个年龄段分布的鱼群，在实现可持续收获的前提下，追求最大的年收获量。结合上述模型的参数记法，现将数据罗列如下：

$$\begin{aligned} n &= 4, \quad j = 2, \quad r = 0.8, \quad a = \frac{2}{3}, \quad E_3 : E_4 = 0.42 : 1, \quad w_1 = 5.07, \quad w_2 = 11.55, \\ w_3 &= 17.86, \quad w_4 = 22.99, \quad q_3 = 0.5 \times 1.109 \times 10^5, \quad q_4 = 1.109 \times 10^5, \\ \beta &= \frac{1.22 \times 10^{11}}{1.22 \times 10^{11} + Q^T}, \quad x_{\min} = \frac{1}{50} (\mu_1^T + \mu_2^T + \mu_3^T + \mu_4^T). \end{aligned}$$

假设  $E_4 = E$ ，则  $E_3 = 0.42E$ ，将数据代入模型 (6)，运用 Matlab 进行编程求解，得到全年的最大捕获总量为： $M_T = 5.836 \times 10^{11}$ 。此时求得  $E = 12.120$ 。则有 3、4 年龄组鱼群的年捕捞强度系数分别为： $E_3 = 5.090$ ， $E_4 = 12.120$ 。

从而得到在可持续捕捞条件下，各年龄组鱼群年初数量分别为：

$$\mu_1 = 8.681 \times 10^{10}, \quad \mu_2 = 4.067 \times 10^{10}, \quad \mu_3 = 1.994 \times 10^{10}, \quad \mu_4 = 3.526 \times 10^9.$$

## 5 结论

### 5.1 论文的优点与创新

(1) 本文综合运用生态学和微积分的理论与方法，探讨了可持续最优捕获策略机理模型，由于笔者对问题中的每个数据的实际背景做了认真细致的分析，并讨论了基于环境容纳量阻滞的单种群的最优捕获问题，引入了内禀损耗率的概念，进而导出了各年龄鱼的数量关于时间的函数关系，因此认为所建模型理论的推导比较严谨，而且比较切合实际。

(2) 在求解时, 利用 Matlab 编程求得最优解, 提高了结果的准确性和科学性, 这些对相关研究及应用具有一定的参考价值。

## 5.2 论文的不足与改进方向

文中设定每年的捕捞强度固定, 进而降低了建模的难度。因此在以后的工作中, 值得进一步考虑的问题是捕捞强度系数是关于鱼群数量变化的函数, 这样可能会更贴近实际情况。

## 5.3 模型的适用性

本文所建立的最优捕获模型重在从微观方面探讨渔业资源的可持续发展及利用, 这种研究方法所建立的模型可推广到其它类似的可再生资源(如人口、林业资源等)的开发问题上去。

### [参考文献] (References)

- [1] 白利华, 何尚录, 栗永安. 按固定努力量捕捞方式的最优捕鱼策略[J]. 兰州: 兰州铁道学院学报, 1997,3,16(1):83-86.
- [2] 王玮明, 林素青. 可持续发展捕鱼策略模型及其应用[J]. 黑龙江: 黑龙江大学自然科学学报, 2004,6,21(2):18-24.
- [3] 汪宏喜. 最优捕鱼策略的动态综合模型研究[J]. 安徽: 安徽农业科学, 2000,28(5):676-677.
- [4] 郭炳艳. 渔场捕鱼稳定性模型研究[J]. 湖北: 长江大学学报(自科版), 2006,6,3(2):493-494.
- [5] 武亦文. 具有年龄结构的单种群最优捕获策略模型研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2006.
- [6] 李银山, 张建明, 卢准炜. 最优捕鱼策略的 Scheafer-Leslie 模型[J]. 太原: 太原理工大学学报, 1998,1,29(1):57-61.
- [7] 刘国玲, 屈华波, 郑群英. 最优捕鱼模型[J]. 数学的实践和认识, 1997,21(1):25-28.
- [8] 黄成涛, 张耀新, 沈廷虎. 最佳捕鱼策略的数学模型[J]. 数学的实践和认识, 1997, 27(1):21-24.
- [9] 罗君, 刘鹏, 周鸣炜. 最优捕鱼策略模型[J]. 数学的实践和认识, 1997,27(1):50-57.
- [10] 唐进, 曾宁, 李静. 最优捕鱼策略[J]. 数学的实践和认识, 1997,27(1):58-61.
- [11] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都: 四川科技出版社, 2003.
- [12] 文祯中, 陆健健. 应用生态学 2 版[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004.
- [13] 赵静, 但琦. 数学建模与数学实验(第 2 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [14] 李传东. 最优捕鱼策略—利用微分、差分方程建立数学模型. 重庆大学数理学院.
- [15] 王树禾. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.
- [16] 阮炯. 差分方程和常微分方程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002.
- [17] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 Matlab 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.