一类 p-Laplacian 方程边值问题解的存在性

陈丙凯，张寅
（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221008）

摘要：本文考虑下面一维 p-Laplacian 算子型奇异两点边值问题正解的存在性：其中 h（t）允许在 0，1 处奇异。本文通过将原问题转化为等价的算子不动点问题进行讨论，通过运用锥压缩拉伸不动点定理得出了上述问题存在一个正解的充分条件。在已有工作启发下，本文处理的是 f 含有一阶导数项问题，一般文献讨论的多是不含导数项的边值问题，在 f 满足一定条件下，得出了正解存在定理。

关键词：p-Laplacian 算子； 奇异边值问题； 锥；不动点定理；正解

中图分类号：O175.14

The positive solutions for a class of differential equations involing P-Laplacian operator

Chen Bingkai, Zhang Yin
(China Universtity Mining And Technology,JiangSu Xuzhou 221008)

Abstract: In this paper ,we mainly discuss the positive solutions for one two-point singular p-Laplacian boundary value problem.we introduce the operator equation which is equivalent to our problem, we assume f and h satisfied a series conditions .By using fixed-point theorem on a cone ,we get sufficient conditions for the existence of one positive solution to our problem, the key difficult we encounter is f contains the item .Inspired by former works，when f satisfies certain conditions，we obtain the existence of positive solution theoremn this paper.

Keywords:p-laplacian operator;singular boundary problems;cone;fixed-point theorem;positive solution

0 引言

带 p-Laplace 算子或 Laplace-like(拉普拉斯型)算子的微分方程边值问题是二阶微分方程边值问题的推广。这类问题产生于非牛顿流体理论和多空介质中气体的湍流理论，最早提出的模型是

$$(\Phi_p(u'))' = q(t)f(t,u,u')$$

及边值条件

$$u(0)=a, u(1)=b \text{ 或 } u'(0)=a, u(1)=b$$

其中 $\Phi_p(s)=|s|^{p-2}$ $(p>1)$ 称为 p-拉普拉斯算子(p-Laplacian operator)或拟线性算子(quasilinear operator)。易知 Φ_p 是奇函数，且单调增。p-Laplacian 算子

有一些简单性质：

作者简介：陈丙凯（1987-），男，学生，基础数学. E-mail: kkchen1987@163.com

$$\Phi_p(-s) = -\Phi(s), s\Phi(s) > 0 \text{当} s \neq 0$$

$$\Phi_p(st) = \Phi(s)\Phi(t), {\Phi_p}^{-1} = \Phi_q$$

$$\Phi_p(s+t) \leq \begin{cases} \Phi_p(s) + \Phi_p(t), 1 < p < 2; s,t > 0 \\ 2^{p-1}(\Phi_p(s) + \Phi_p(t)), p \geq 2; s,t > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_p(0) = 0, \Phi_p(1) = 1, \Phi_p(-1) = -1$$

在上世纪 80 年代初期，人们在非牛顿流体力学、多孔介质中的气体湍流、弹性理论、血浆问题、宇宙物理等大量的应用领域中对非线性偏微分方程的径向解的研究发现，它们可归结为微分方程:

$$(\phi_p(u'))' = q(t)f(t,u,u'), 0 < t < 1 \tag{1.30}$$

在边值条件：

$$u(0) = a, u(1) = b \tag{1.31}$$

$$u'(0) = a, u(1) = b \tag{1.32}$$

的研究。自此以后,许多专家学者均对此类问题进行了研究，并且得到了一些很好的结果，极大地推动了这一领域研究工作的进一步发展。

1 准备知识

1.1 一些定义

定义 1.1 锥[5]：

设 E 是实 Banach 空间，如果 P 是 E 中某非空凸闭集，且满足下面两个条件:

(I) $x \in P, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

(II) $x \in P, -x \in P \Rightarrow x = \theta, \theta$ 表示 E 中零元素，；则称 P 是 E 中的一个锥

用 P^0 表示 P 的内点集，若 $P^0 \neq \Phi$ 则称 P 是一个体锥

定义 1.2 紧集：

设 X 是度量空间,M 是 X 的子集,则 M 是 X 的紧集的充要条件是对 M 中任何点列$\{x_n\}$均存在子列$\{x_{n_k}\}$收敛于 M 中一元素 x_0

定义 1.3 一致有界：

设 $x \in I$，若存在 $M > 0$，使得对任意的 $x \in I$，均有$|f(x)| < M$，则称 $f(x)$ 在 I 上一致有界

定义 1.4 等度连续：

设函数列$\{f_n(x)\}$定义在区间 I 上，若对任意正数ε，存在正数$\delta = \delta(\varepsilon)$，

使得当 $x_1, x_2 \in I$ 且$|x_1 - x_2| < \delta$ 时，对一切的 n，有 $f_n(x_1) - f_n(x_2) < \varepsilon$，则称$\{f_n(x)\}$在 I 上等度连续。

定义 1.5 紧算子：

设 E_1, E_2 为 Banach 空间，$D \in E_1$，算子 A：$D \to E_2$

若 A 将 D 中任何有界集 S 映成列紧集，(即 A(S)是相对紧集，亦即它的闭包$\overline{A(S)}$是 E_2 中的紧集

定义 1.6 全连续：

若算子 $A:D\to E_2$ 连续，且是紧的，则称 A 是映 D 入 E_2 得全连续算子

1.2 本文用到的几个引理

引理 1.7 Ascoli-Arela 定理[5]

集 $H\subset C[J_0,E]$ 相对紧的充要条件是：H 是等度连续的，且对于每个 $t\in J_0$，$H(t)$ 是 E 中的相对紧集，其中 $H(t)=\{x(t):x\in H\}$

引理 1.8 锥拉伸与压缩不动点定理[5]

设 E 是 Banach 空间，P 是 E 的锥，Ω_1,Ω_2 是 E 的两个有界开子集，且 $\theta\in\Omega_1$，$\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$，$A:P\cap\left(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1\right)\to P$ 全连续，如果满足下面两个条件之一：

(i) $\|Ax\|\le x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;\|Ax\|\ge x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2;$

(ii) $\|Ax\|\le x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2;\|Ax\|\ge x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$

则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$ 上至少有一个不动点

引理 1.9 Lebesgue 控制收敛定理[6]

(1) $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列

(2) $|f_n(x)|\le F(x)$ a.e.于 E，n=1，2，…且 F(x)在 E 上可积分

(3) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$

则 f(x)在 E 上可积分，且有 $\lim\limits_{n}\int_E f_n(x)=\int_E f(x)dx$

2 问题的提出及主要结果、证明

2.1 问题的提出

本文讨论如下含 p-Laplacian 微分方程边值问题：

$$\begin{cases}(\Phi_p(u'))'+h(t)f(t,u,u')=0,0<t<1\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}\tag{1.1}$$

称 u 是(1.1)的正解，是指满足(1.1)，$u(t)>0,t\in(0,1)$ 且 $\Phi_p(u')$ 在[0,1]上绝对连续

设 $E=\{u(t):u(t)\text{是定义在[0,1]上的绝对连续函数}\}$，则易知 E 是 Banach 空间，定义其上的范数为

$$\|u\|=\max_{0\le t\le 1}|u(t)|$$

令 K={$u\in E\,|u$ 是[0,1]上非负连续可导凹函数}，此处凹函数是指满足于下面定义的 x：对 $\forall t_1,t_2\in[0,1],s\in[0,1]$，有 $x(st_1+(1-s)t_2)\ge sx(t_1)+(1-s)x(t_2)$

则显然 K 是 E 上的锥

假设

(F1)f 是定义在 E 上的非负连续范函

(F2)对任何固定的 $t\in[0,1]$ 和 $u\in[0,+\infty)$，存在 M>0, 使得 $\sup\limits_{v\in R}f(t,u,v)<M$

(F3)h 是定义在(0，1)上的非负连续函数，允许 h 在 t=0，1 处具有奇性，即 $\lim_{t\to 0^+} h(t)=+\infty, \lim_{t\to 1^-} h(t)\to +\infty$，存在某个 $t_0\in(0,1)$ 使得 $h(t_0)\neq 0$ 且满足 $\int_0^1 h(t)dt<\infty$

(F4) $0<\int_0^{1/2}\Phi_q[\int_s^{1/2} h(r)dr]ds+\int_{1/2}^{1}\Phi_q[\int_{1/2}^{s} h(r)dr]ds<\infty$

2.2 准备工作

引理 2.21[2]

假设条件(F4)成立，则，则存在常数 $\theta\in(0,1/2)$，满足

$$0<\int_{1-\theta}^{\theta} h(s)ds<+\infty \tag{1.2}$$

引理 2.22

设 $x\in K$， θ 满足(1.2)式,则 $x(t)\geq\theta\|x\|$，其中 $t\in[\theta,1-\theta]$

证明：

设 $\tau=\inf\{\xi\in[0,1]\,\Big|\,\sup_{x\in[0,1]} x(t)=x(\xi)\}$

下面分三种情况讨论：

(i)若 $\tau\in[0,\theta]$，则由 x(t)的凹性知，两点 $(\tau,x(\tau)),(1,x(\tau))$ 弦上的每一点都在 $x(t)$ 的图像之下，故有

$$x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau), t\in[\theta,1-\theta]$$

从而有

$$\begin{aligned}x(t)&\geq \min_{\theta\leq t\leq 1-\theta}[x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau)]\\&=x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(1-\theta-\tau)\\&=\frac{1-\theta-\tau}{1-\tau}x(1)+\frac{\theta}{1-\tau}x(\tau)\\&\geq\theta x(\tau)\end{aligned}$$

(ii) $\tau\in[\theta,1-\theta]$ 若 $t\in[\theta,\tau]$，同样的，有

$$x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(0)-x(\tau)}{0-\tau}(t-\tau), t\in[\theta,\tau]$$

故有

$$\begin{aligned}x(t)&\geq \min_{t\in[\tau,1-\theta]}[x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau)]\\&=\frac{\theta}{1-\tau}x(\tau)+\frac{1-\theta-\tau}{1-\tau}x(1)\geq\theta x(\tau)\end{aligned}$$

$$x(t)\geq \min_{t\in[\theta,1-\theta]}[x(\tau)+\frac{x(0)-x(\tau)}{0-\tau}(t-\tau)]$$
$$=\frac{\theta}{\tau}x(\tau)+(1-\frac{\theta}{\tau})x(0)\geq \theta x(\tau)$$

若$t\in[\tau,1-\theta]$，同样有

$$x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau)，\quad t\in[\tau,1-\theta]$$

则有

$$x(t)\geq \min_{t\in[\theta,1-\theta]} x(\tau)+\frac{x(1)-x(\tau)}{1-\tau}(t-\tau)$$
$$=\frac{\theta}{1-\tau}x(\tau)+\frac{1-\theta-\tau}{1-\tau}x(1)$$
$$\geq \theta x(\tau)$$

得到$x(t)\geq \theta\|x\|,t\in[\theta,1-\theta]$

(iii) $\tau\in[1-\theta,1]$，有 $x(t)\geq x(\tau)+\frac{x(0)-x(\tau)}{0-\tau}(t-\tau),t\in[\theta,1-\theta]$

因此有

$$x(t)\geq \min_{t\in[\theta,1-\theta]}[x(\tau)+\frac{x(0)-x(\tau)}{0-\tau}(t-\tau)]$$
$$=\frac{\theta}{\tau}x(\tau)+(1-\frac{\theta}{\tau})x(0)$$
$$\geq \theta x(\tau)$$

故同样得出相同的结果 □

命题：令$\lambda(t)=\int_\theta^t \Phi_q(\int_s^t h(u)du)ds+\int_t^{1-\theta}\Phi_q(\int_t^s h(u)du)ds,t\in[\theta,1-\theta]$，

则有$\lambda:[\theta,1-\theta]\to[0,\infty)$连续，且$L=\min_{t\in[\theta,1-\theta]}\lambda(t)>0$

证明：

易知λ在$[\theta,1-\theta]$上连续，令

$\lambda_1(t)=\int_\theta^t\Phi_q[\int_s^t h(r)dr]ds,\lambda_2(t)=\int_t^{1-\theta}\Phi_q[\int_t^s h(r)dr]ds$，由(F4)知$\lambda_1$在$[\theta,1-\theta]$上单调增，且有$\lambda_1(\theta)=0;\lambda_2$在$[\theta,1-\theta]$上单调减，且$\lambda_2(1-\theta)=0$，故$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$在$[\theta,1-\theta]$上是正的，从而有最小值 L

因为 $(\Phi_q(u'))'=-h(t)f(t,u,u')\leq 0$，而$\Phi_q$增，故$u'$递减，这证明$u$是凹的

为叙述方面，引入下面记号和一些需要的条件：

$$f_0^+=\lim_{u\to 0^+}\sup\max_{t\in[0,1]}\sup_{v\in R}\frac{f(t,u,v)}{u^{p-1}}$$

$$f_{0-}=\lim_{u\to 0^+}\inf\min_{t\in[0,1]}\inf_{v\in R}\frac{f(t,u,v)}{u^{p-1}}$$

$$f_{\infty}^{+}=\lim_{u\to+\infty}\sup\max_{t\in[0,1]}\sup_{v\in R}\frac{f(t,u,v)}{u^{p-1}}$$

$$f_{\infty-}=\lim_{u\to+\infty}\inf\max_{t\in[0,1]}\inf_{v\in R}\frac{f(t,u,v)}{u^{p-1}}$$

则在上面的几个条件下，定义算子$A:K\to K$如下：$(Au)(t)$

$$(Au)(t)=\begin{cases}\int_0^t\Phi_q(\int_s^\sigma h(r)f(r,u,u')dr)ds,t\in[0,\sigma]\\ \int_t^1\Phi_q(\int_\sigma^s h(r)f(r,u,u')dr)ds,t\in[\sigma,1]\end{cases}\tag{2.1}$$

其中σ的确定如下：

设 $z(x)=\int_0^x\Phi_q(\int_s^x h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)ds-\int_x^1\Phi_q(\int_x^s h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)ds,0<x<1$ (2.2)

则显然地，$z(x)$连续在(0，1)内严格增，且有$z(0+)<0<z(1-)$，故$z(x)$在(0，1)内有零解，令σ是其中的一个零解即可

引理 2.23：Au的所有不动点都是(1.1)的解，且$A(K)\subset K$

证明：

对$\forall u\in K$，下证$Au\subset K$且满足(1.1)及相应边值条件

易见$Au(\sigma)$是在$Au(t)在t\in[0,1]$上的最大值，又因为

$$\left(Au(t)\right)'=\begin{cases}\Phi_q(\int_t^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)\ge0,0<t\le\sigma\\ -\Phi_q(\int_\sigma^t h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)\le0,\sigma\le t<1\end{cases}$$

故$\left(Au(\sigma)\right)'=0$，又因$(\Phi_p((Au(t))')'=-h(t)f(t,u(t),u'(t),0<t<1$，故$\left(Au\right)'$连续非增且$Au$是非负凹函数，则$AK\subset K$，又由上式可得$Au$满足(1.1)，即 A 在 K 中的不动点就是(1.1)的解

引理 2.24：上述定义的算子 A 是全连续算子

证明：

(i)设$D\subset K$是任一有界子集，

$\exists M>0$使得$\|u\|\le M,u\in D$。设$M_D=\sup\{f(t,u,u'):u\in D,u'\in R,t\in[0,1]\}$，则对$\forall u\in D$，

$$\|Au\|=(Au)(\sigma)=\int_0^\sigma\Phi_q(\int_s^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)ds$$

$$\le\Phi_q(M_D)\int_0^\sigma\Phi_q(\int_s^\sigma h(r)dr)ds$$

故 A(D)在E中有界

(ii)对$\forall u\in D$，当$0\le t_1<t_2\le\sigma$时，有

$$\left|(Au)(t_1)-(Au)(t_2)\right| \le \int_{t_1}^{t_2}\Phi_q(\int_s^{\sigma} h(r)f(r,u(r).u'(r)dr)ds$$

$$\le \Phi_q(M_D)\Phi_q(\int_0^{\sigma} h(r)dr)\left|t_1-t_2\right|$$

当$\sigma \le t_1 < t_2$时，有

$$\left|(Au)(t_1)-(Au)(t_2)\right| \le \int_{t_1}^{t_2}\Phi_q(\int_{\sigma}^{s} h(r)f(r,u(r).u'(r)dr)ds$$

$$\le \Phi_q(M_D)\Phi_q(\int_{\sigma}^{1} h(r)dr)\left|t_1-t_2\right|$$

当$t_1 \le \sigma \le t_2$时，有

$$\begin{aligned}
&\left|(Au)(t_1)-(Au)(t_2)\right| \\
&\le \left|(Au)(t_1)-(Au)(\sigma)\right| + \left|(Au)(\sigma)-(Au)(t_2)\right| \\
&\le \int_{t_1}^{\sigma}\Phi_q(\int_s^{\sigma} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)ds + \int_{\sigma}^{t_2}\Phi_q(\int_{\sigma}^{s} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)ds \\
&\le \Phi_q(M_D)\Phi_q(\int_0^{\sigma} h(r)dr)(\sigma-t_1) + \Phi_q(M_D)\Phi_q(\int_{\sigma}^{1} h(r)dr)(t_2-\sigma) \\
&\le \max\{(\int_0^{\sigma} h(r)dr),(\int_{\sigma}^{1} h(r)dr)\}\Phi_q(M_D)\left|t_2-t_1\right|
\end{aligned}$$

因此 A(D)等度连续,则可知，A 是紧算子。下证 A 连续

(iii)设$u_{i,}u_0 \in K, \left\|u_i-u_0\right\| \to 0(i\to\infty)$。由 A(u)的定义式知

$$(Au_i)(t)=\begin{cases}\int_0^t \Phi_q\left(\int_s^{\sigma} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr\right)ds, 0<t<\theta_i \\ \int_t^1 \Phi_q\left(\int_{\theta_i}^{s} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr\right)ds, \theta_i<t<1\end{cases} \tag{2.3}$$

其中$\theta_i \in [0,1](i=0,1,2...)$是与(2.2)相似形式的方程所确定的一个零解，则$\{\theta_i\}$有收敛子列，不妨仍记为$\{\theta_i\}$，设$\{\theta_i\}\to\theta_0$

故由(i)中证明知

$$Au_i(\theta_i) < \Phi_q(M_D)\int_0^1 \Phi_q(\int_s^1 h(r)dr)ds \tag{2.4}$$

则利用勒贝格控制收敛定理，对(2.3)两边取极限，可得

$$\lim_{i\to\infty}(Au_i)(t)=\begin{cases}\int_0^t \Phi_q\left(\int_s^{\theta_0} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr\right)ds, 0<t<\theta_0\\ \int_t^1 \Phi_q\left(\int_{\theta_0}^{s} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr\right)ds, \theta_0<t<1\end{cases}$$

即 $\lim_{i\to\infty}(Au_i)(t)=(Au_0)(t)$

于是 A 在 K 上连续，由(i)(ii)(iii)知算子 A 在 K 上全连续

下面给出本文的主要定理，为方便记

$$\Omega_R=\left\{x\in K\|x\|<R\right\}, \partial\Omega_R=\left\{x\in K\|x\|=R\right\},\ A=\left[\Phi_q\left(\int_0^1 h(t)dt\right)\right]^{-1},\ B=2(\theta L)^{-1}$$

2.3 一个正解存在定理

假设(F1)(F2)(F3)(F4)成立，且满足下列条件之一：

(H1) $f_0^+<A^{p-1}, f_{\infty-}>(B)^{p-1}$

(H2) $f_{0-}>(B)^{p-1}, f_\infty^+<A^{p-1}$

则边值问题(1.1)至少有一个正解

证明：(H1)成立，则有 $f_0^+<A^{p-1}$，故对 $\forall v\in R,\exists r>0$，使得当 $u\in E, 0\le\|u\|\le r$ 时，有 $f(t,u,v)\le(Au)^{p-1}$，则对 $\forall x\in K\cap\partial P_r$ 时，有

$$\|Au\|=\int_0^\sigma \Phi_q\left(\int_s^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)\right)ds$$

$$\le\int_0^1 \Phi_q\left(\int_s^1 h(r)f(r,u(r),u'(r)dr)\right)ds$$

$$\le\int_0^1 Ar\Phi_q(\int_0^1 h(r)dr)ds=Ar[\Phi_q(\int_0^1 h(r)dr)]=r=\|u\|$$

故对 $\forall x\in K\cap\partial\Omega_r$，有 $\|Au\|\le\|u\|$

当 $f_{\infty-}>(B)^{p-1}$ 时，对 $\forall v\in R,\exists R>r$，使得当 $\|u\|\ge R$ 时有 $f(t,u,v)\ge(Bu)^{p-1}$

对 $x\in K\cap\partial\Omega_R$，根据 Au 的定义，分下列三种情况：

(i) 如果 $\sigma\in[\theta,1-\theta]$，则对 $\forall x\in\Omega_R$

$$2\|Au\|=2(Au)(\sigma)\ge$$

$$\int_0^\sigma \Phi_q[\int_s^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds+\int_\sigma^1 \Phi_q[\int_\sigma^s h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\ge\int_\theta^\sigma \Phi_q[\int_s^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds+\int_\sigma^{1-\theta} \Phi_q[\int_\sigma^s h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\ge\int_\theta^\sigma \Phi_q[\int_s^\sigma h(r)(BR)^{p-1}dr]ds+\int_\sigma^{1-\theta} \Phi_q[\int_\sigma^s h(r)(BR)^{p-1}dr]ds$$

$$\geq B\theta R[\int_{\theta}^{\sigma}\Phi_q[\int_{s}^{\sigma}h(r)dr]ds+\int_{\sigma}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{\sigma}^{s}h(r)dr]ds]$$

$$=B\theta R\lambda(\sigma(x))\geq 2(\theta L^{-1})\theta LR=2\|u\|$$

(ii) 如果$\sigma\in[0,\theta]$, 则对$\forall u\in\partial\Omega_R$，有

$$\|Au\|=(Au)(\sigma)\geq\int_{\sigma}^{1}\Phi_q[\int_{\sigma}^{s}h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\geq\int_{\theta}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{\theta}^{s}h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\geq\int_{\theta}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{\theta}^{s}h(r)(B\theta R)dr]ds$$

$$\geq B\theta R\int_{\theta}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{\theta}^{s}h(r)dr]ds=B\theta R\lambda(\theta)$$

$$\geq 2(\theta L)^{-1}\theta LR=2R>\|u\|$$

(iii) 如果$\sigma\in[1-\theta,1]$则对 $\forall u\in\partial\Omega_R$，有

$$\|Au\|=(Au)(\sigma)\geq\int_{0}^{\sigma}\Phi_q[\int_{s}^{\sigma}h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\geq\int_{\theta}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{s}^{1-\theta}h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$\geq\int_{\theta}^{1-\theta}\Phi_q[\int_{s}^{1-\theta}h(r)(B\theta R)^{p-1}dr]ds$$

$$\geq B\theta R\lambda(\theta)=2(\theta L)^{-1}\theta RL>R=\|u\|$$

故不管哪种情况，均有$\forall x\in K\cap\partial\Omega_R,\|Au\|\geq\|u\|$，由引理 2.8 知，

A 有不动点$u\in K\cap(\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1)$且满足$0<r\leq\|u\|\leq R$

假设条件(H2)成立，则由 $f_0^{+}>\mathrm{B}^{p-1}$ 知，对$\forall v\in R,\exists r>0$使得当$u\in E,0\leq\|u\|\leq r$时，有 $f(t,u,v)\geq(Bu)^{p-1}$,则对$\forall u\in K,\|u\|=r$，有类似于上面几步：(i)(ii)(iii)的过程，可得$\|Au\|\geq\|u\|$。因此对于$\forall x\in K\cap\partial\Omega_r$有$\|Au\|\geq\|u\|$

又由 $f_\infty^{+}<A^{p-1}$，知$\exists N>0$，当$\|u\|>N$时，有 $f(t,u,v)\leq(\frac{A}{2}u)^{p-1}$

选择 R 满足：

$$R>2\max\{f^{q-1}(t,u,v):0\leq\|u\|\leq N\}\Phi_q[\int_{0}^{1}h(r)dr]$$

则对$x\in K\cap\partial\Omega_R$，有

$$\|Au\| = (Au)(\sigma) = \int_0^\sigma \Phi_q[\int_s^\sigma h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]$$

$$\le \Phi_q[\int_0^1 h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]ds$$

$$= \Phi_q[\int_{\|u\|>N} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr + \int_{\|u\|\le N} h(r)f(r,u(r),u'(r)dr]$$

$$\le \frac{A}{2}\|u\|\Phi_q[\int_0^1 h(r)dr] + \max\{f^{q-1}(t,u,u') : 0 \le \|u\| \le N\}\Phi_q[\int_0^1 h(r)dr]$$

$$\le \frac{A}{2}\|u\|\Phi_q[\int_0^1 h(r)dr] + \frac{1}{2}R$$

$$\le \frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}R \le R = \|u\|$$

因此对 $\forall u \in K \cap \partial\Omega_R$，均有 $\|Au\| \le \|u\|$，故由引理 2.8 知 A 有一个不动点 $x \in K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$，且满足 $0 < r \le \|u\| \le R$

综上所述，(H1)(H2)只要一个成立，则边值问题(1.1)至少有一个正解.

3 总结

本文的主要工作是在假设下面几个条件成立下进行讨论的：

(F1)f 是定义在 E 上的非负连续范函

(F2)对任何固定的 $t \in [0,1]$ 和 $u \in [0,+\infty)$，存在 M>0, 有 $\sup_{v\in R} f(t,u,v) < M$

(F3)h 是定义在(0，1)上的非负连续函数，允许 h 在 t=0，1 处具有奇性，即 $\lim_{t\to 0^+} h(t) = +\infty, \lim_{t\to 1^-} h(t) \to +\infty$，存在某个 $t_0 \in (0,1)$ 使得 $h(t_0) \ne 0$ 且满足 $\int_0^1 h(t)dt < \infty$

(F4) $0 < \int_0^{1/2} \Phi_q[\int_s^{1/2} h(r)dr]ds + \int_{1/2}^1 \Phi_q[\int_{1/2}^s h(r)dr]ds < \infty$

利用锥压缩拉伸不动点定理证明了在满足下面两个条件之一时：

(H1) $f_0^+ < A^{p-1}, f_{\infty-} > (B)^{p-1}$

(H2) $f_{0-} > (B)^{p-1}, f_\infty^+ < A^{p-1}$

问题(1.1)至少存在一个正解

[参考文献] (References)

[1] 葛渭高.非线性常微方程边值问题.北京：科学出版社.2007
[2] Wang J Y. The existence of positive solution for the one dimensional p-Laplacian[J] . Proc Amer Math Soc . 1997 . 125 . 2275-2283.
[3] 李必文.具 p-Laplacian 算子型奇异边值问题正解的存在性.数学物理学报.. 2003.23A (3)：257- 264.
[4] 袁红秋.一维 p-Laplacian 方程奇异边值问题的正解[硕士学位论文].曲阜：曲阜师范大学，2007
[5] 郭大钧.非线性泛函分析.济南：科学技术出版社.2003
[6] 程其襄.张奠宙等.实变函数与泛函分析基础(第二版).北京：高等教育出版社.2003.7
[7] 张恭庆,林源渠.泛函分析讲义（上）.北京大学出版社.1987.4