一类 p-Laplacian 方程多点边值问题共振情况下解的存在性

车晓飞
（中国矿业大学理学院，江苏徐州 221116）

摘要：p-Laplacian 方程在非线性弹性力学、冰川学、燃烧理论、生物学以及多种非线性流体等领域都有广泛应用，具有重要的理论意义和实用价值。大部分作者都是研究 p-Laplacian 方程多点边值问题非共振情况下解的存在性，讨论共振情况下解的存在性的文章比较少。为了研究 p-Laplacian 方程多点边值问题共振情况下解的存在性，利用 Mawhin 连续定理，得到了该边值问题至少存在一个解的充分条件，该文将已有的 m 点边值问题推广到了双 m 点进行了讨论。

关键词：p-Laplacian 方程；多点边值问题；Mawhin 连续定理
中图分类号：O175.8

Existence theorem for multi-point boundary value problems with p-Laplacian at resonance

CHE Xiaofei
(School of Science,China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116)

Abstract: The p-laplacian equation is widely used in fields such as non-linear elasticity, glaciology, combustion theory, biology and a variety of non-linear fluid, and has important theoretical and practical value. Most studies of the p-Laplacian equation is multi-point boundary value problem in the non-resonance case, there exist few essays discussing the existence of solutions at resonance. In order to study the existence of solutions for multi-point boundary value problems with p-Laplacian at resonance, by means of theory of coincidence degree, sufficient conditions for the existence of at least one solution are established, and spread the conclusion from m points to double m points.

Key words: p-Laplacian operator; Multi-point boundary value problems; Theory of coincidence degree

0 引言

自1970年，Landsman和Lazer[1]首先研究半线性椭圆方程边值共振问题解的存在性开始，国内外许多学者投入到非线性微分方程边值共振问题的研究中，并且已经获得了大量的结果[2-5]。近年来，p-Laplacian方程边值问题的研究受到人们的广泛关注。已经有部分文献用不动点定理研究*p-Laplacian*方程*m*点边值条件下解的存在性[6-8]，但用Mawhin连续定理研究*p-Laplacian*方程*m*点边值问题解的存在性的文献却很少，因为*p-Laplacian*方程在非线性情况下不能直接运用Mawhin连续定理。

Feng Hanying[6]运用 *Krasnoselskiis* 不动点定理讨论了 *m* 点边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, t\in(0,1)\\ u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i), u(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i u(\xi_i)\end{cases}.$$

至少一个正解存在性。*Zhu Yanling*[2]运用迭合度理论研究了边值问题

作者简介：车晓飞（1985-），男，硕士，研究方向为微分方程. E-mail: cxfsx0401@163.com

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'(t)=f(t,u,u'),t\in(0,1)\\ u'(0)=0,u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iu(\xi_i)\end{cases}$$

至少一个解的存在性。

在此，笔者讨论了以下 *p-Laplacian* 方程多点边值共振问题：

$$\begin{cases}(\varphi_p(u'))'(t)=f(t,u,u'),t\in(0,1)\\ \varphi_p(u'(0))=\sum_{i=1}^{m-2}a_i\varphi_p(u'(\xi_i)),u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}b_iu(\eta_i)\end{cases}\tag{1}$$

满足

$\varphi_p(x)=|x|^{p-2}x,p>1,(\varphi_p)^{-1}=\varphi_q,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,m\geq3,a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,m-2,0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\cdots<\xi_{m-2}<\eta_{m-2}<1,\sum_{i=1}^{m-2}a_i=1,\sum_{i=1}^{m-2}b_i=1$。

笔者利用迭合度定理证明了该边值共振问题解的存在性，是将文献[2]中的 m 点边值问题推广到了双 m 点进行了讨论。并且当（1）中的 $a_i=0$ 时，（1）即为文献[2]中的情形，也就是说，文献[2]是本研究的一种特殊情况。

1 预备知识

为了使用 *Mawhin* 连续定理，特将以上方程转化为如下形式

$$\begin{cases}x_1'(t)=\varphi_q(x_2(t))\\ x_2'(t)=f(t,x_1(t),\varphi_q(x_2(t)))\\ 0=x_2(0)-\sum_{i=1}^{m-2}a_ix_2(\xi_i)\\ 0=x_1(1)-\sum_{i=1}^{m-2}b_ix_1(\eta_i)\end{cases}\tag{2}$$

显然，若 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 为（2）的解，则 $x_1(t)$ 为(1)的解。

在此做出以下定义：

$X=\left\{x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in C[0,1]\times C[0,1]\right\}$，$\|x\|=\max\left\{|x_1|_0,|x_2|_0\right\}$，满足 $|x|_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$。

$Y=\left\{y=(y_1,y_2,c_1,c_2)^{\mathrm{T}}\in C[0,1]\times C[0,1]\times\mathbb{R}^2\right\}$，$\|y\|=\max\left\{|y_1|_0,|y_2|_0,|c_1|,|c_2|\right\}$，$|x|_0=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$。

显然，X,Y 均为 *Banach* 空间。

分别定义算子 L,N 如下：

$L:D(L)\to Y:Lx=L(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(x_1',x_2',0,0)^{\mathrm{T}}$，满足：

$$D(L)=\left\{x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X\,\middle|\,x_1'(t)=\varphi_q(x_2(t)),x_1(1)=\sum_{i=1}^{m-2}b_ix_1(\eta_i),x_2(0)=\sum_{i=1}^{m-2}a_ix_2(\xi_i)\right\}$$

$$ImL=\left\{y=(y_1,y_2,0,0)^{\mathrm{T}}\in Y\left|\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}y_1(s)\mathrm{d}s=0,\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{0}^{\xi_i}y_2(s)\mathrm{d}s=0\right.\right\}。$$

$N:X\to Y$,满足：

$$(Nx)(t)=N\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_q(x_2(t))\\f(t,x_1(t),\varphi_q(x_2(t))\\x_2(0)-\sum_{i=1}^{m-2}a_ix_2(\xi_i)\\x_1(1)-\sum_{i=1}^{m-2}b_ix_1(\eta_i)\end{pmatrix}$$

那么，（2）等价于算子方程 $Lx=Nx$。我们还可以证明 $KerL=\mathbb{R}^2,Y/ImL=\mathbb{R}^2$，那么 L 为 0 指标的 *Fredholm* 算子。

分别对投影算子 P,Q 做如下定义：

$$P:X\to KerL,P(x)=P(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(x_1(1),x_2(1))^{\mathrm{T}}；$$

$$Q:Y\to ImQ\subset R^4,Qy=Q(y_1,y_2,c_1,c_2)^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\eta_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^{1}y_1(s)\mathrm{d}s,\frac{1}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_{0}^{\xi_i}y_2(s)\mathrm{d}s,0,0\right)^{\mathrm{T}}$$

设 $L_p=L\big|_{D(L)\cap Kerp}$，定义 L_p 的逆为 $K=L_p^{-1}:ImL\to D(L)$，那么

$$Ky=K(y_1,y_2,0,0)^{\mathrm{T}}=(\int_1^t y_1(s)\mathrm{d}s,\int_1^t y_2(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}。\tag{3}$$

由（3）易知 N 是 $\overline{\Omega}$ 上 L-紧的，满足 Ω 为 X 上有界开集。

引理 1[3]（*Mawhin* 连续定理） 设 X,Y 均为 *Banach* 空间，且 $L:D(L)\subset X\to Y$ L 为 0 指标的 *Fredholm* 算子。并且 Ω 为 X 上有界开集，$N:\overline{\Omega}\to Y$ 是 $\overline{\Omega}$ 上 L-紧的。如果满足：

（H$_1$）$Lx\neq\lambda Nx,\forall x\in\partial\Omega\cap D(L),\lambda\in(0,1);$

（H$_2$）$Nx\notin ImL,\forall x\in\partial\Omega\cap KerL;$

（H$_3$）$\deg\{JQN,\Omega\cap KerL,\theta\}\neq 0,$ 其中 $J:ImQ\to KerL$ 为代数与拓扑同构。

那么，方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}\cap D(L)$ 上至少有一个解。

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $p>2$，且满足以下条件:

（H$_4$）$\exists D>0$，满足对于 $|x_1(t)|>D,x_2(t)\in\mathbb{R},t\in[0,1]$ 有 $x_1x_2(0)\geq 0,x_1f(t,x_1(t),x_2(t))>0$。

（H$_5$）$f(t,x_1,x_2)=g(t,x_1,x_2)+h_1(t,x_1)+h_2(t,x_2)$ 且满足

$$x_2 g(t,x_1,x_2) \le -\beta |x_2|^{n+1}, \forall (t,x_1,x_2) \in [0,1]\times\mathbb{R}^2; x_2 h_2(t,x_2) < 0, \forall (t,x_2) \in [0,1]\times\mathbb{R}; \lim_{|x|\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} \frac{|h_1(t,x)|}{|x|^n} \le r_1$$

其中， $n \ge 1, r_1 \ge 0, \beta > r_1$，$g(t,x_1,x_2)$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上连续， $h_i(t,x_i), i\in\{1,2\}$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上连续。

那么，（2）至少有一个解。

证明：易知 $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\xi_i < 1, \sum_{i=1}^{m-2} b_i\eta_i < 1$。定义算子：$Lx = \lambda Nx, \lambda\in(0,1)$。

设 $\Omega_1 = \{x\in X, Lx = \lambda Nx, \lambda\in(0,1)\}, \forall x(t) = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}} \in \Omega_1$，则有

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda\varphi_q(x_2(t)) \\ x_2'(t) = \lambda f(t,x_1(t),\varphi_q(x_2(t))) \\ 0 = \lambda[x_2(0) - \sum_{i=1}^{m-2} a_i x_2(\xi_i)] \\ 0 = \lambda[x_1(1) - \sum_{i=1}^{m-2} b_i x_1(\eta_i)] \end{cases} \tag{4}$$

由（4）的第一个式子可得 $x_2(t) = \varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1'(t))$，那么（4）可转化为

$$\begin{cases} (\varphi_p(x_1'(t)))' = \lambda^p f(t,x_1(t),\frac{1}{\lambda}x_1'(t)) \\ x_1(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i x_1(\eta_i), \varphi_p(x_1'(0)) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i\varphi_p(x_1'(\xi_i)) \end{cases} \tag{5}$$

下面证明

$$|x_1(0)| \le D。 \tag{6}$$

反证法。不失一般性，假设 $x_1(0) > D$，则由条件(H4)得 $x_2(0) \ge 0$。再由(4)的第二个式子及(H4)可知

$x_2'(0) = \lambda f(0,x_1(0),\frac{1}{\lambda}x_1'(0)) > 0$，且由 $x_2'(t)$ 在 $[0,1]$ 上的连续性可知，$\exists\delta > 0,$ 使得

$$x_2'(t) > 0, \forall t\in(0,\delta)。$$

又因为 $x_2(0) \ge 0$，所以有 $\forall t\in(0,\delta), x_2(t) > 0$，即有 $\forall t\in(0,\delta), x_1'(t) > 0$。

下面证明

$$\forall t\in(0,1), x_1'(t) > 0。 \tag{7}$$

如若不然，$\exists t_0 \in (0,1)$ 满足 $x_1'(t_0) = 0$，那么 $x_2(t_0) = 0$，则有 $x_2'(t_0) \le 0$。又有

$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_1'(s)\mathrm{d}s > x_1(0) > D, \forall t\in[0,t_0] \subset (0,\delta)$。

因此，$x_2'(t) = \lambda f(t,x_1(t),\frac{1}{\lambda}x_1'(t)) > 0, \forall t\in[0,t_0]$。这与 $x_2'(t_0) \le 0$ 矛盾，故（7）成立。

那么就有 $x_1(1)=\sum_{i=1}^{m-2} b_i x_1(\eta_i)<x_1(\eta_{m-2})<x_1(1)$ 矛盾。假设不成立，（6）成立。那么

$$|x_1(t)|\le |x_1(0)|+\left|\int_0^t x_1'(s)\mathrm{d}s\right|\le D+\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t,\forall t\in[0,1]。\tag{8}$$

将（5）的第一个式子两边同乘以 $\varphi_p(x_1'(t))$，并在 $[0,1]$ 上积分可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\varphi_p(x_1'(1))]^2&=\lambda^p\int_0^1\varphi_p(x_1'(t))f(t,x_1(t),\frac{1}{\lambda}x_1'(t))\mathrm{d}t\\&=\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)g(t,x_1(t),\frac{1}{\lambda}x_1'(t))\mathrm{d}t\\&\quad+\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_1(t,x_1(t))\mathrm{d}t+\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_2(t,\frac{1}{\lambda}x_1'(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由条件（H_5）可得

$$\begin{aligned}\lambda^{p+1}\beta\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}\left|\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t)\right|^{n+1}\mathrm{d}t\le&-\frac{1}{2}[\varphi_p(x_1'(1))]^2+\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_1(t,x_1(t))\mathrm{d}t\\&+\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_2(t,\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}&\lambda^{p-n}\beta\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t\\&\le\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_1(t,x_1(t))\mathrm{d}t+\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-2}x_1'(t)h_2(t,\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t)\mathrm{d}t\\&\le\lambda^p\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}|h_1(t,x_1(t))|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由条件（H_5）有，对于 $\varepsilon=\dfrac{\beta-r_1}{3}$，存在 $\rho>D$，满足

$$|h_1(t,x_1)|\le(r_1+\varepsilon)|x_1|^n,\forall t\in[0,1],|x_1|>\rho。$$

所以，

$$\begin{aligned}\beta\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t&\le\lambda^n\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}(r_1+\varepsilon)|x_1(t)|^n\mathrm{d}t+\lambda^n\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}h_{1,\rho}\mathrm{d}t\\&\le(r_1+\varepsilon)(D+\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t)^n\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t+h_{1,\rho}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{9}$$

其中，$h_{1,\rho}=\max\limits_{t\in[0,1],|x|<\rho}|h_1(t,x)|$。

由数学分析知识可知，$\exists\delta\in(0,1)$，使得

$$(1+x)^n<1+(n+1)x,\forall x\in(0,\delta),n>0。\tag{10}$$

情形 1）：如果 $\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t=0$ 或者 $\dfrac{D}{\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t}\ge\delta$，由（8）可知 $|x_1(t)|\le D+D/\delta$。

情形 2）：如果 $\dfrac{D}{\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t}\le\delta$，由（9），（10）可得

$$\begin{aligned}
\beta\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t &\le (r_1+\varepsilon)(\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t)^n(1+\frac{D}{\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t})^n\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t+h_{1,\rho}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\\
&\le (r_1+\varepsilon)(\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t)^n(1+\frac{(n+1)D}{\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t})\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t+h_{1,\rho}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\\
&\le (r_1+\varepsilon)(\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t)^n\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t+h_{1,\rho}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\\
&\quad +(r_1+\varepsilon)(n+1)D(\int_0^1|x_1'(t)|\mathrm{d}t)^{n-1}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\\
&\le (r_1+\varepsilon)\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t+h_{1,\rho}(\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t)^{\frac{p-1}{p+n-1}}\\
&\quad +(r_1+\varepsilon)(n+1)D(\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t)^{\frac{p+n-2}{p+n-1}}
\end{aligned}$$

由$\varepsilon=\dfrac{\beta-r_1}{3},\dfrac{p+n-2}{p+n-1}<1$可知，$\exists M_1>0$，使得$\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t<M_1$。由（8）可得

$$|x_1(t)|\le D+(\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p+n-1}}\le D+M_1^{\frac{1}{p+n-1}}。$$

综合情形 1）,2）可得

$$|x_1(t)|\le\max\left\{D+D/\delta,D+M_1^{\frac{1}{p+n-1}}\right\}:=M_2,\int_0^1|x_1'(t)|^{p+n-1}\mathrm{d}t<M_1。$$

将（5）的第一个式子两边同乘以$\varphi_p(\frac{1}{\lambda}x_1'(t))$，并在$[0,t]$上积分可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\varphi_p(\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t))]^2 &= \lambda^p\int_0^t\varphi_p(\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t))f(s,x_1(s),\frac{1}{\lambda}x_1'(s))\mathrm{d}s\\
&=\lambda^{2-p}\int_0^t|x_1'(s)|^{p-2}x_1'(s)g(s,x_1(s),\frac{1}{\lambda}x_1'(s))\mathrm{d}s\\
&\quad+\lambda^{2-p}\int_0^t|x_1'(s)|^{p-2}x_1'(s)h_1(s,x_1(s))\mathrm{d}s\\
&\quad+\lambda^{2-p}\int_0^t|x_1'(s)|^{p-2}x_1'(s)h_2(s,\frac{1}{\lambda}x_1'(s))\mathrm{d}s\\
&\le\lambda^{2-p}\int_0^t|x_1'(s)|^{p-1}|h_1(s,x_1(s))|\mathrm{d}s\\
&\le\lambda^{2-p}\int_0^t|x_1'(s)|^{p-1}|h_1(s,x_1(s))|\mathrm{d}s\\
&\le\lambda^{2-p}h_{1,M_2}\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t\le\lambda^{2-p}h_{1,M_2}(\int_0^1|x_1'(t)|^{p-1}\mathrm{d}t)^{\frac{p-1}{p+n-1}}
\end{aligned}$$

满足$h_{1,M_2}=\max\limits_{t\in[0,1],|x|<M_2}|h_1(t,x)|$。由于$\varepsilon=\beta-r_1/3,p<2,\int_0^1|x_1'(s)|^{p+n-1}\mathrm{d}s<M_1$，所以

$$[\varphi_p(\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t))]^2\le 2h_{1,M_2}M_1^{\frac{p-1}{p+n-1}}:=M_3,\forall t\in[0,1],|\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t)|_0\le M_3^{\frac{1}{2p-2}}:=M_4。$$

由（4）的第二个式子有

$$\int_0^1 |x_2'(t)|\mathrm{d}t \le \int_0^1 f(t,x_1(t),\tfrac{1}{\lambda}x_1'(t))\mathrm{d}t \le f_{M_2,M_4},\ f_{M_2,M_4}=\max_{t\in[0,1]}|f(t,x_1,x_2)|,|x_1|\le M_2,|x_2|\le M_4.$$

那么，

$$|x_2(t)|\le|x_2(0)|+\int_0^1|x_2'(t)|\mathrm{d}t\le\sum_{i=1}^{m-2}a_i|x_2(\xi_i)|+\int_0^1|x_2'(t)|\mathrm{d}t\le\max_{1\le i\le m-2}|x_2(\xi_i)|+\int_0^1|x_2'(t)|\mathrm{d}t:=M_5$$

设 $M=\max\{M_2,M_5\}+1,\Omega=\{x\in X:|x_1|_0<M,|x_2|_0<M\}$，所以引理 1 的条件（$H_1$）满足。

下面证明 $Nx\notin ImL,\forall x\in\partial\Omega\cap KerL$。

如若不然，$\exists x_0=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\partial\Omega\cap KerL, Nx_0=(\varphi_q(x_2),f(t,x_1,0,0)^{\mathrm{T}}\in ImL$。所以 $QNx_0=\theta$。但由 Q 的定义可得

$$QNx_0=(\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\eta_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^1\varphi_q(x_2(s))\mathrm{d}s,\frac{1}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}f(s,x_1(s),\varphi_q(x_2(s)))\mathrm{d}s,0,0)^{\mathrm{T}}=\theta$$

所以，$x_2=0,\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}f(s,x_1(s),\varphi_q(x_2(s)))\mathrm{d}s=0$。如果 $x_1>D$，由条件（H_4）可得 $f(t,x_1,x_2)>0$，那么 $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}f(s,x_1(s),\varphi_q(x_2(s)))\mathrm{d}s>0$ 产生矛盾。同理，$x_1<-D$ 时也产生矛盾。那么，$|x_1|\le D<M,x_2=0$ 与 $x_0=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\partial\Omega$ 矛盾。因此，引理 1 的条件（H 满足。

定义同构 $J:ImQ\to KerL,J(c_1,c_2,0,0)^{\mathrm{T}}=(c_2,c_1)^{\mathrm{T}}$。设

$$H(x,\mu)=\mu x+(1-\mu)JQNx,\forall(x,\mu)\in\overline{\Omega}\times[0,1]。$$

那么，

$$H(x,\mu)=\begin{pmatrix}\mu x_1+\dfrac{1-\mu}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\xi_i}\sum_{i=1}^{m-2}a_i\int_0^{\xi_i}f(s,x_1(s),\varphi_q(x_2(s)))\mathrm{d}s\\ \mu x_2+\dfrac{1-\mu}{1-\sum_{i=1}^{m-2}b_i\eta_i}\sum_{i=1}^{m-2}b_i\int_{\eta_i}^1\varphi_q(x_2(s)\mathrm{d}s\end{pmatrix}\ne0,\forall(x,\mu)\in(\partial\Omega\cap KerL)\times[0,1].$$

$$\deg\{JQN,\Omega\cap KerL,\theta\}=\deg\{H(x,0),\Omega\cap KerL,\theta\}=\deg\{H(x,1),\Omega\cap KerL,\theta\}==\deg\{I,\Omega\cap KerL,\theta\}\ne0$$

所以，引理 1 的条件（H_3）满足。

最后，由引理 1 可得，$Lx=Nx$ 在 $\Omega\cap D(L)$ 上有一个解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$。那么方程(1)有一个解 $x_1(t)$。

3 应用举例

例 1 考虑 *p-Laplacian* 方程边值问题:

$$\begin{cases} (\varphi_{\frac{5}{2}}(x'(t)))' = -(5+2x^3(t))x'^4(t) + x^4(t) - x'^3(t), 0 < t < 1 \\ \varphi_{\frac{5}{2}}(u'(0)) = \frac{1}{4}\varphi_{\frac{5}{2}}(u'(\frac{1}{3})) + \frac{3}{4}\varphi_{\frac{5}{2}}(u'(\frac{2}{3})), u(1) = \frac{1}{3}u(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}u(\frac{2}{3}) \end{cases} \tag{11}$$

实际上，

$$p = \frac{5}{2}, g(t, x_1, x_2) = -(5+2x^3)x_2^4, h_1(t, x_1) = x_1^4, h_2(t, x_2) = -x_2^3, a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{3}{4}, b_1 = \frac{1}{3},$$

$b_2 = \frac{2}{3}, \beta = 5, r_1 = 4$，易知定理 1 的条件满足。所以，（11）至少有一个解。

[参考文献] (References)

[1] Landsman, E. M., Lazer, A. C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance[J].J.Math.Mech,1970,19(7):609-623.

[2] Zhu Yangling, Wang Kai. On the existence of solutions of p-Laplacian m-point boundary value problem at resonance[J].Nonlinear Anal, 2009,70:1557-1564.

[3] Gaines R, Mawhin J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin:Springer ,1977.

[4] Gupta P C. A second order m-point boundary value problem at resonance[J]. Resuits Math,1995,28: 1483-1489.

[5] Ma R Y. Existence theorems for second order m-point boundary value problem[J].J Math Anal Appl,1997, 211:545-555.

[6] Feng Hanying, Ge Weigao. Multiple positive solutions for m-point boundary value problems with a one-dimensional p-Laplacian[J].Nonlinear Anal,2008,68:2269-2279.

[7] Su Hua. Positive solutions for n-order m-point p-Laplacian operator singular boundary value problems[J]. Appl Math Comput,2008,199: 122-132.

[8] Feng W, Webb J R L. Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth[J]. J Math Anal Appl,1997,212: 467-480.