对求一个级数函数近似根算法的收敛性等问题的证明

马召坤
山东广播电视大学兖州学院，山东兖州（272100）
E-mial: mzk19640826@126.com

摘要：本文对文中级数函数式（1）近似根的算法收敛性给予了证明。还对该级数函数近似根与准确根之间误差的两个计算公式，给出了严格地推导证明。这里对求该级数函数近似根算法的收敛性给出了严格证明之后，就可以让大家放心地使用作者给出的算法了。本文给出的该级数函数近似根与准确根之间两个误差公式的证明，不仅对求出这两类误差是必须的，而且，对算法的收敛性和根的存在性都是另外的新证明。这样就又从两个另外的不同渠道再次证明了作者提出的这个算法的正确性了。

关键字： 根，级数函数，多项式，算法。
中图分类号：O173.1

1.引言

级数函数：$Zt(s)=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k})^{s}$ （1），也是文献[1]中的级数函数，它是数学理论里一个非常重要的关系式，比如当 $s=2$ 时，该函数的值为 $\frac{\pi^2}{6}$，基于这个关系式就可以计算 π 的近似值了，这当然是一个非常重要的结果。对于 s 取实数的数学分析[4]里研究的问题，$s=1$ 是该无穷级数函数收敛与不收敛的分界点。一般来说，一个函数的很多性质都包含在了它的根里了，所以给出函数的根就可以对这个函数的性质基本上全部掌握了，对该式的根的研究当然非常重要了。

前面给出的文献[1]里给出了求该级数函数近似根的算法，这个算法是不是收敛的，也就是说是不是可靠的，这是数学理论中必须给予严格证明的问题。在文献[1]里，作者用了两个公式估计了近似根与准确根之间的误差。这两个公式是怎样推导证明的，在文献[1]里因为篇幅和读者理解等许多原因没有给出来，在本文里都给予了推导，并严格证明了它们的正确性。

2．求该级数函数近似根算法收敛性的证明

首先证明 $\frac{1}{k^s}$ 在复平面上处处解析，也就是 $\frac{1}{k^s}$ 可以在整个复平面上展开成马克劳林级数。$\frac{1}{k^s}=e^{-s\ln k}=e^{-\ln k(\sigma+\omega i)}=e^{-\sigma\ln k}(\cos(-\omega\ln k)+i\sin(-\omega\ln k))$

$$=e^{-\sigma\ln k}\cos(-\omega\ln k)+ie^{-\sigma\ln k}\sin(-\omega\ln k)$$

$$=e^{-\sigma\ln k}\cos(\omega\ln k)-ie^{-\sigma\ln k}\sin(\omega\ln k)=u(\sigma,\omega)+iv(\sigma,\omega)$$

$$u(\sigma,\omega)=e^{-\sigma\ln k}\cos(\omega\ln k)\qquad v(\sigma,\omega)=-e^{-\sigma\ln k}\sin(\omega\ln k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}=-\ln ke^{-\sigma\ln k}\cos(\omega\ln k)\qquad \frac{\partial v}{\partial\sigma}=\ln ke^{-\sigma\ln k}\sin(\omega\ln k)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \omega}=-\ln k e^{-\sigma \ln k}\sin(\omega \ln k) \qquad \frac{\partial v}{\partial \omega}=-\ln k e^{-\sigma \ln k}\cos(\omega \ln k)$$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial \sigma}=\frac{\partial v}{\partial \omega} \qquad \frac{\partial u}{\partial \omega}=-\frac{\partial v}{\partial \sigma}$ 因此，$\frac{1}{k^s}$ 函数，当 k 取任意自然数时，在复平面上处处解析，因此，$\frac{1}{k^s}$ 可以在整个复平面上展开成马克劳林级数。它的 n 阶导数是：

$$(\frac{1}{k^s})^{(n)}=(-1)^n \ln^n k \qquad \frac{1}{k^s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln^n k}{n!}s^n$$

多项式 $\zeta(s,M,N)$ [3] 是对级数函数的两个套在一起的无穷级数部分和逼近。因此，要证明上一节里给出的方法的收敛性，正确性。就必须证明当 $N \to +\infty$ 时，$\zeta(s,M,N)$ 多项式的零点构成的数列收敛于一点，且这一点 s_1，可以使 $\zeta(s_1,M,+\infty)=0$。且当 $M \to +\infty$ 时，$\zeta(s,M,+\infty)$ 多项式的零点构成的数列也收敛于一点 s_0，且 $\zeta(s_0,+\infty,+\infty)=\zeta(s_0)=0$。下面先证明当 $N \to +\infty$ 时，$\zeta(s,M,N)$ 多项式序列的零点数列的收敛性。$\zeta(s,M,N)$ 多项式的零点，在由它变换成的根轨迹方程绘制的根轨迹[2]上，表现为增益为 k_0^* 的点。

$$a_N=\frac{(-1)^N}{N!}\sum_{k=1}^{M}\ln^N k \qquad a_{N-2}=\frac{(-1)^{N-2}}{(N-2)!}\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-2} k$$

$$k_0^*=\frac{a_{N-2}}{a_N}=\frac{N(N-2)(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N-2})}{\ln^2 M(1+\sum(\frac{\ln k}{\ln M})^N)} \qquad (2)$$

文献[1]中一般的根轨迹方程（8）又可以写成：

$$1+k^*\frac{\prod_{j=1}^{N-2}(s-s_j)}{s^{N-1}(s-\frac{a_{N-1}}{a_N})}=0 \qquad (3)$$

s_j 为文献[1]里根轨迹方程（8）、（3）的零点。s_j 也是 $\zeta(s,M,N-2)$ 多项式的零点。设 s_{0N} 为 $\zeta(s,M,N)$ 一个零点。即，它是（3）的根轨迹上增益为 k_0^* 中的 N 个点中的一个。当 N 充分大时，（3）式可以近似为：$k_0^*=\frac{N(N-2)}{\ln^2 M}$。在该式中，不考虑 M 值的变化，因此，$\ln^2 M$ 作为一个定值。所以，当 $N \to +\infty$ 时 $k_0^* \to +\infty$ 且以 N 的二次方的数量级趋于无穷大。也就是 s_{0N} 以 $N(N-2)$ 的数量级从根轨迹上接近它所在该根轨迹的终点 s_j。s_{0N} 以 s_j 为极限值。s_{0N} 是 $\zeta(s,M,N)$ 的零点，s_j 是 $\zeta(s,M,N-2)$ 的一个零点。不论 N 为偶数，还是奇数，都存在 $\zeta(s,M,N)$

的多项式序列，当 N 趋于无穷大时，从对 N 值上来说相互间隔的 N 值所对应的 $\zeta(s,M,N)$ 、$\zeta(s,M,N-2)$ 的对应零点之间越来越接近。也可以说 $\zeta(s,M,N)$ 与 $\zeta(s,M,N-2)$ 的在同一条根轨迹上的点之间的距离越来越小。

当 N 的奇数之间的 $\zeta(s,M,N)$ 序列存在内含的根轨迹的终点间一个接一个的关系，而且，这样的一个关系曲线，各个根轨迹的终点间的距离越来越短。所以，当 N 接近于无穷大时，$\zeta(s,M,N)$ 的这个零点数列是收敛于一点 $s_1^{'}$ 的。（这里探讨的当然是对在 $\zeta(s,M,N)$ 的数学模式这种下探讨，早就出现的 $\zeta(s,M,N)$ 零点，也就是，它早就是 $\zeta(s,M,N-r)$ 的零点了。）。$\zeta(s,M,N)$ 与 $\zeta(s,M,N-2)$ 的零点越来越接近，因此，根轨迹数列收敛，这是由当且仅当相邻项的距离越来越近的定理而得出。

同理 N 的偶数间的 $\zeta(s,M,N)$ 的序列的零点数列也收敛于一点 $s_1^{''}$。

$$\zeta(s,M,N+1)-\zeta(s,M,N)=\frac{(-1)^{N+1}\sum_{k=1}^{M}\ln^{N+1}k}{(N+1)!}s^{N+1} \qquad (4)$$

$s_1^{'}$ 与 $s_1^{''}$ 都是有限点，因此，它们的模也是有限的，而这个过程中，M 是当作定值的，a^N 的发散比 $(N+1)!$ 的发散速度小得多，不在一个“ 阶 ”上。因此，(4) 的右端，当 $N\to+\infty$ 时，其模值 $\to 0$ 。

实际上就是证明了 $\zeta(s,M,N+1)$ 与 $\zeta(s,M,N)$ 的相对应的根轨迹之间，当 $N\to+\infty$ 时，它们的根轨迹相距越来越近。当然，特别地上面的对应点之间就越来越近。因此 $\zeta(s,M,N+1)$ 与 $\zeta(s,M,N)$ 的零点数列，收敛于一个共同的点。即 $s_1^{'}=s_1^{''}$。

这就证明了当 $N\to+\infty$ 时，多项式 $\zeta(s,M,N)$ 序列的零点数列收敛于一点。即 $\zeta(s,M,+\infty)=s_1$，s_1 是一个有限点。

下面再来证明当 $M\to+\infty$ 时，多项式 $\zeta(s,M,N)$ 序列的零点数列的收敛性。

$$\zeta(s,M+1,N)=\zeta(s,M,N)+\frac{1}{(M+1)^s}$$

不妨设 $s^{'}$，s_1 分别是 $\zeta(s,M+1,N)$，$\zeta(s,M,N)$ 相邻的零点。

即 $\zeta(s^{'},M+1,N)=0$，$\zeta(s_1,M,N)=0$， $\prod_{j=1}^{N}(s^{'}-s_j)+\frac{1}{(M+1)^{s^{'}}}=0$

其中：$\zeta(s,M,N)=\prod_{j=1}^{N}(s-s_j)$ ，这是$\zeta(s,M,N)$多项式的另一种表达形式。s_j为多项式$\zeta(s,M,N)$的零点。将上式变换成：$s^{'}-s_1=\dfrac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s^{'}}}}{\prod_{j=2}^{N}(s^{'}-s_j)}$ （5）

尽管，$s^{'}$是$\zeta(s,M+1,N)$的零点，但是，与前面一样，也可以证明该多项式序列的零点数列一样收敛于有限点。所以，$\dfrac{1}{(M+1)^{s^{'}}}$也是一个模值有界的量。

$\prod_{j=2}^{N}(s-s_j)$是$\zeta(s,M,N)$的除去$(s-s_1)$的因子之后的多项式积的形式。当然，随着N值的增大，$\zeta(s,M,N)$的零点的个数也增多了。$\prod_{j=2}^{N}(s-s_j)$的模值当且仅当s_j不都无限接近s_1分布的情况下，是越来越大，趋于无穷大的。也就是说，$\zeta(s,M,N)$的零点，只要不都越来越近零点s_1分布，就可以使$\prod_{j=2}^{N}(s-s_j)$的模值，随$N\to+\infty$而$\prod_{j=2}^{N}\|s-s_j\|\to+\infty$。而$\zeta(s,M,N)$的零点，有两种方法来产生。一是从老根轨迹上产生，也就是由0或$-\dfrac{a_{N-1}}{a_N}$为起点，终点为$\zeta(s,M,N-2)$的零点的根轨迹上。随着N的增加，一定要出现分布在由0或$-\dfrac{a_{N-1}}{a_N}$为起点，沿与实轴垂直并交于实轴的$\dfrac{-\dfrac{a_{N-1}}{a_N}+\dfrac{a_{N-3}}{a_{N-2}}}{2}$点的直线为渐进线，而趋于无穷远的根轨迹上的零点，这就是“新”增加的另一类零点。这类零点的特点是，随着N的增大，沿根轨迹趋向于无穷远分布。也就是说，$\zeta(s,M,N)$的零点，$N-2$个从终于$\zeta(s,M,N-2)$的零点的根轨迹上产生，并趋向于一个有限点，$\zeta(s,M,N)$的另外两个零点，随N的增大，离原点越来越远地分布。所以，在其零点s_1附近只可能存在有限个 $\zeta(s,M,N)$的零点。比如，这个“附近”规定以s_1为圆心的单位圆内时，一般来说，这个圆内，最多有一个两个$\zeta(s,M,N)$的零点。如果N值很大，一般是一个也没有了。为什么$\zeta(s,M,N)$新产生的零点离原点越来越远呢？因为根轨迹方程（3）的增益 k_0^*可以

由 $k_0^* = \dfrac{N(N-2)}{\ln^2 M}$ 近似表达。而 $N \to +\infty$ 时，$k_0^* \to +\infty$ 因此，在这两条趋向于无穷远的根轨迹上产生的新零点，就越来越远离原点了。

根轨迹上产生的新零点，越来越远离原点了。也就是说，$\zeta(s,M,N)$ 的零点，一定不是围绕着某一个固定点分布，而是向无穷远的方向上分布。因此，$\prod_{j=2}^{N}(s-s_j)$ 的模值增大得很快。尤其是复平面的另外一半的零点，其模值对 $\prod_{j=2}^{N}\|s-s_j\|$ 的影响更大。

所以，当 $N \to +\infty$ 时，（5）的右边，越来越小。因此，$s^{'}$ 与 s_1 的距离越来越近。当它们充分大时，$\dfrac{1}{(M+1)^{s^{'}}} \approx \dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}$ $\prod_{j=2}^{N}\|s^{'}-s_j\| \approx \prod_{j=2}^{N}\|s_1-s_j\|$。

$\dfrac{1}{M^{s_1}} > \dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}$，也就是 $M \to +\infty$ 时，$\zeta(s,M,+\infty)$ 序列的零点的数列收敛。即 $M \to +\infty$ 时，$\zeta(s_0,M,+\infty) = \zeta(s_0,+\infty,+\infty) = \zeta(s_0)$，（5）式没有考虑 s_1 是 $\zeta(s,M,N)$ 的重根。虽然没有证明级数函数没有重根。但事实上，该函数是没有重根的。即使它有重根，也不影响前面的理论证明。也就是把（5）的左边改成幂次的形式就可以了。

3．近似零点与准确零点之间误差的关系式推导证明

设 s_{0N} 是 $\zeta(s,M,N)$ 的一个零点，则它满足（3）根轨迹方程，且增益值为 k_0^*，即 $1+k_0^*\dfrac{\prod_{j=1}^{N-2}(s_{0N}-s_j)}{(s_{0N})^{N-1}(s_{0N}-\frac{a_{N-1}}{a_N})}=0$，不失一般性，不妨设 s_{0N-2} 为 s_{0N} 所在根轨迹的终点。即 s_{0N-2} 是 s_j 中的一个。设 $s_1 = s_{0N-2}$。由上式可以得到：

$$s_{0N}-s_{0N-2} = \frac{N\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-1}k(s_{0N})^{N-1} - \sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k(s_{0N})^{N}}{N(N-1)\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-2}k\prod_{j=2}^{N-2}(s_{0N}-s_j)} = \frac{D_N}{N(N-1)} \qquad (6)$$

$$s_{0N+2}-s_{0N} = \frac{(N+2)\sum_{k=1}^{M}\ln^{N+1}k(s_{0N+2})^{N+1} - \sum_{k=1}^{M}\ln^{N+2}k(s_{0N+2})^{N+2}}{(N+2)(N+1)\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k\prod_{j=2}^{N}(s_{0N+2}-s_j)} = \frac{D_N}{(N+2)(N+1)}$$

$$D_N=\frac{N\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-1}k(s_{0N})^{N-1}-\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k(s_{0N})^{N}}{\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-2}k\prod_{j=2}^{N-2}(s_{0N}-s_j)} \tag{7}$$

下面证明 D_N 的模，在 N 充分大之后，单调减。

$$\frac{\|D_N\|}{\|D_{N+2}\|}=\frac{\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k\prod_{j=2}^{N}\|s_{0N+2}-s_j\|(N\|s_{0N}\|^{N-1}\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-1}k-\|s_{0N}\|^{N}\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k)}{\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-2}k\prod_{j=2}^{N-2}\|s_{0N}-s_j\|(\|s_{0N+2}\|^{N+1}(N+2)\sum_{k=1}^{M}\ln^{N+1}k-\|s_{0N+2}\|^{N+2}\sum_{k=1}^{M}\ln^{N+2}k)}$$

上式中分子与分母中的 s_j，严格地说并不是同一个点，但是，无论 s_{0N+2}，s_{0N}，还是 s_j 之间（相对应的点。）都相差很小，所以，这里可以认同这些相对应点是一个点。上式可简化成：

$$\frac{\|D_N\|}{\|D_{N+2}\|}=\frac{\|s_{0N}-s_N\|\|s_{0N}-s_{N-1}\|\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k(N\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-1}k-\|s_{0N}\|\sum_{k=1}^{M}\ln^{N}k)}{\|s_{0N}\|^2\sum_{k=1}^{M}\ln^{N-2}k((N+2)\sum\ln^{N+1}k-\|s_{0N}\|\sum\ln^{N+2}k)}$$

$$=\frac{\|s_{0N}-s_N\|\|s_{0N}-s_{N-1}\|(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N})(\frac{1}{\ln M}(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N-1})-\frac{\|s_{0N}\|}{N}(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N}))}{\|s_{0N}\|^2(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N-2})((1+\frac{1}{N})\frac{1}{\ln M}(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N+1}-\frac{\|s_{0N}\|}{N}(1+\sum_{k=1}^{M-1}(\frac{\ln k}{\ln M})^{N+2}))}$$

因此，当 N 充分大之后，上式可以近似地写成：

$\frac{\|D_N\|}{\|D_{N+2}\|}=\frac{\|s_{0N}-s_N\|\|s_{0N}-s_{N-1}\|}{\|s_{0N}\|^2}$。$s_N$ 与 s_{N-1} 是共轭的 $\zeta(s,M,N)$ 的零点。而令 N 充分大之后，它们也充分地远离原点，当然，根据前面的理论分析，N 值越大 s_{0N} 变化越小，所以，可以认为它保持不变。因此可以成立：$\|s_{0N}\|<\|s_{0N}-s_N\|$ 。若 s_N 在上半 S 平面，一般地 s_{N-1} 在下半 S 平面，当然更成立。$\|s_{0N}\|<\|s_{0N}-s_N\|$。 $\therefore\frac{\|D_N\|}{\|D_{N-1}\|}<1$ 。 即当 N 充分大之后，D_N 严格单调减。

s_N，s_{N-1} 会不会是实数零点呢？不会的，因为它们是 $\zeta(s,M,N+2)$ 新零点，而与 $\zeta(s,M,N)$ 的零点不相近。它们的实数零点构成相近零点。

当 N 充分大，D_N 单调减之后。

$$s_{0N}-s_{0N-2}=\frac{D_N}{N(N-1)}$$

$$s_{0N+2}-s_{0N}=\frac{D_{N+2}}{(N+2)(N+1)}$$

$$s_{0N}-s_0=\frac{D_N}{N(N-1)}+\frac{D_{N+2}}{(N+2)(N+1)}+\cdots\cdots+$$

s_0 为 $\zeta(s,M,+\infty)$ 函数的准确零点。

$$\|s_{0N}-s_0\|\le\|D_N\|\sum_{k=N,N+2,N+4,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k(K-1)}$$ （步长为 2，而不是 1。）

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}-\cdots\cdots$$
$$=\frac{1}{N-1}$$

$$\sum_{k=N,N+2,N+4,\cdots}^{\infty}\frac{1}{k(K-1)}\approx\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{N-1}$$

$$\|s_{0N}-s_0\|\le\frac{\|D_N\|}{2(N-1)}\qquad(8)$$

公式（8）可以用来估计 $\zeta(s,M,N)$ 的零点，与 $\zeta(s,M,+\infty)$ 函数准确零点的距离。

在上面推导（8）式的和第一节的理论证明的过程中，都使用的是 $\zeta(s,M,N+2)$ 与 $\zeta(s,M,N)$，这两个多项式。而没有用 $\zeta(s,M,N+1)$ 多项式。因为，只有间隔了一阶的多项式，才存在它们的零点在同一条根轨迹上，才出现在同一个根轨迹方程中。相邻阶次的多项式的零点之间，没有这样“ 公式化 ”的关系，当然在推导公式时要用间隔了一阶的多项式了。如果用相邻阶次的就找不到这样好的关系。

作者后来发现，一般新出现的多项式 $\zeta(s,M,N)$ 的零点，在它又是多项式 $\zeta(s,M,N+2r)$ 的近似零点，r 一般只要在 20 左右，这个时候，D_N 的模就很小了。也就是说，$\zeta(s,M,N)$ 的收敛速度是很快的，当 D_N 本身很小时，就不需要再用（8）估算了。

下面再推导：$\zeta(s,M,+\infty)$ 与 $\zeta(s)$ 的准确零点之间的关系式。

当 N 充分大时，(这里说的充分大当然要看是对哪些点来说了。）将上节里的公式（5）变换成：$s^{'}-s_1=\dfrac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}}{\prod_{j=2}^{N}(s_1-s_j)}$

再由此式，可以得出与$\zeta(s, M+2, +\infty)$，$\zeta(s, M+3, +\infty)$，……，相对应的式子。

即：$$s'' - s' = \frac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}}{\prod_{j=2}^{N}(s_1 - s_j)}$$

$$s''' - s'' = \frac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}}{\prod_{j=2}^{N}(s_1 - s_j)} \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$s_0 - s_1 = \frac{-\sum_{k=M+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{s_1}}}{\prod_{j=2}^{N}(s_1 - s_j)} \qquad (9)$$

再从另外的一个方面推证（9）式。不妨设s_{21}，s_1分别是下列两多项式的零点：

$$\zeta(s_{21}, M+1, N) = 0 \qquad \zeta(s_1, M, N) = 0$$

$$\zeta(s_{21}, M+1, N) = \zeta(s_{21}, M, N) + \frac{1}{(M+1)^{s_{21}}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s_{21}^n + \frac{1}{(M+1)^{s_{21}}} = 0$$ 而 $$\sum_{n=0}^{N} a_n s_1^n = 0$$ 成立。

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (s_{21}^n - s_1^n) + \frac{1}{(M+1)^{s_{21}}} = 0$$

$$(s_{21} - s_1)\sum_{n=1}^{N} a_n (s_{21}^{n-1} + s_{21}^{n-2}s_1 + \cdots\cdots + s_{21}s_1^{n-2} + s_1^{n-1}) + \frac{1}{(M+1)^{s_{21}}} = 0$$

即：$$s_{21} - s_1 = \frac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_{21}}}}{\sum_{n=1}^{N} a_n (s_{21}^{n-1} + s_{21}^{n-2}s_1 + \cdots\cdots + s_{21}s_1^{n-2} + s_1^{n-1})},$$ 前面已经证明了，当N充分大时，

上式右边的s_{21}可以由s_1近似替代，因此，可得：

$$s_{21} - s_1 = \frac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}}{\sum_{n=1}^{N} a_n (n s_1^{n-1})},$$

$$\zeta(s, M, N) = M - s\sum_{k=1}^{M}\ln k + \frac{s^2}{2}\sum_{k=1}^{M}\ln^2 k - \cdots\cdots + (-1)^N \frac{s^N}{N!}\sum_{k=1}^{M}\ln^N k$$
$$= a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots\cdots + a_1 s + a_0$$

对变量s求导数得：

$$\zeta'(s,M,N)=a_N N s^{N-1}+a_{N-1}(N-1)s^{N-2}+\cdots\cdots+a_1=-\sum_{n=1}^{N}a_n(ns^{n-1})=\prod_{j=2}^{N}(s-s_j)$$

所以得：
$$s_{21}-s_1=\frac{-\dfrac{1}{(M+1)^{s_1}}}{\prod_{j=2}^{N}(s_1-s_j)}$$

完全同前面的推导，即可以推出公式（9）。此处不再详细给出了。

4．结论

本文里证明了作者在文献[1]里给出的求该级数函数近似根算法是收敛的，这样就可以让大家放心地使用在文献[1]里给出的算法了。在具体的计算中，不论是手算，还是编写软件实现都可能因为计算或软件编写上的错误[5]，而导致结果的发散，这样的情况出现了，计算者经常是怀疑方法不收敛，这里给出了严格的理论证明之后，当然就完全排除了方法的使用者这一方面不必要的考虑了。本文第 3 节里给出的两个该级数函数近似根与准确根之间的距离的公式的证明，不仅对求出这个距离是必须的，而且，对算法的收敛性和根的存在性都是另外的新证明。

参考文献

[1] 马召坤 《一个级数函数根的研究》[J]，中国科技论文在线，2009，2，23。

[2] 厉玉鸣，马召坤等．《自动控制原理》[M]，北京：化学工业出版社，2005.9。

[3] 马召坤，马跃峰，《多项式方程根的求解方法》[J]，曲阜师范大学学报，26（3），21-24。

[4] 刘玉琏，傅沛仁等，《数学分析讲义》[M]，高等教育出版社，2008，5。

[5] 周国标，宋宝瑞等，《数值计算》[M]，高等教育出版社，2008，9。

The convergence of the algorithm which the approximate roots of one series function are sovled is proved and so on

ZhaoKun Ma

ShanDong Radio and TV University, YanZhou College , ShanDong YanZhou

Abstract:

This paper gaves that the convergence of the algorithm of the approximate roots of one infinite series function is proved, which is in author's paper ' The reseach of the roots of the infinite series function". The proof of the convergence of the algorithm of the approximate roots of this infinite series function in this paper, it can make people to set their mind at rest to use this algorithm. This paper also gaves that the realation notation of error between the approximate roots of this infinite series function and the exact ones are deduced and proved strictly, it is necessary for the two realation notation of errors, while it is new proof of the convergence of the algorithm of the approximate roots of this infinite series function and the existence of the exact roots of this infinite series function. The correctness of this algorithm is proved from two different ways again.

Key words: root, infinite series function, polynomial, algorithm.