第41卷第3期　　中南大学学报(自然科学版)　　Vol.41　No.3
2010年6月　　Journal of Central South University (Science and Technology)　　Jun. 2010

活性污泥污水处理系统的最优鲁棒 H_∞ 保成本控制

徐华[1,2]，薛恒新[1]，王士同[2]

(1. 南京理工大学 经济管理学院，江苏 南京，210094；
2. 江南大学 信息工程学院，江苏 无锡，214122)

摘　要：针对具有凸多面体参数不确定性的污水处理控制系统，研究其鲁棒 H_∞ 保成本控制器的设计问题。首先，给出变参数活性污泥系统的状态空间模型；然后，结合二次型性能指标和 H_∞ 性能指标，导出系统鲁棒 H_∞ 保成本控制器存在的充分条件以及相应的控制器设计方法，并通过线性矩阵不等式，给出该控制器增益的可行解。以某污水厂污水性质和处理能力为例，应用所设计的鲁棒 H_∞ 保成本控制器进行仿真研究。仿真结果表明：采用该方法使系统最终的稳态误差较小，证明该方法是可行和有效的。

关键词：活性污泥系统；凸多面体参数不确定性；H_∞ 保成本控制；鲁棒控制；线性矩阵不等式

中图分类号：TP301　　文献标志码：A　　文章编号：1672−7207(2010)03−1046−06

Optimal robust H_∞ guaranteed cost control for activated sludge sewage treatment system

XU Hua[1,2], XUE Heng-xin[1], WANG Shi-tong[2]

(1. School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;
2. School of Information Engineering, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

Abstract: The problem of robust H_∞ guaranteed cost controller design was studied for wastewater treatment control systems with polytopic uncertainties. Firstly, the state space model of activated sludge system with uncertain parameters was established. Then, combined with the quadratic performance index and H_∞ performance index, a sufficient condition for the existence of robust H_∞ guaranteed cost controller was derived and its design procedures were also given. Meanwhile, the controller gain was obtained by applying linear matrix inequality technique. Finally, take a wastewater treatment plant sewage treatment capacity of nature for example, and applying the design of robust H_∞ guaranteed cost controller to simulate. The results show that the steady-state system has smaller error using the method, which proves the method is feasible and effective.

Key words: activated sludge system; polytypic uncertainties; H_∞ guaranteed cost control; robust control; linear matrix inequality

目前，对工业废水和城市污水处理时大多采用活性污泥法。该方法通过利用自然界中微生物的生命活动来清除污水中有机污染物，其基本流程见文献[1]。其中，溶解氧浓度是决定污水处理进程中水质的关键因素。溶解氧不足或过量都会导致污泥生存环境恶化：若溶解氧浓度不足，则会引起好氧菌的生长速率降低，从而使出水水质下降；反之，若溶解氧浓度过高，则会因为絮凝剂遭到破坏，导致悬浮固体沉降性变差，

收稿日期：2009−04−06；修回日期：2009−06−21
基金项目：国家高技术研究发展计划(“863”计划)项目(2007AA1Z158)；江南大学青年基金资助项目(2008LQN028)
通信作者：徐华(1978−)，女，江苏无锡人，博士研究生，讲师，从事环境污染、人工智能、模糊系统和管理信息系统等研究；电话：13921520420；E-mail: joanxh2003@163.com

同时，造成能源浪费[2]。因此，在整个反应过程中，需保持溶解氧浓度为适宜值。不确定系统的保成本控制问题最早是由 Chang 等[3]提出的，它在满足系统稳定的同时还能使系统具有良好的性能要求。鲁棒控制是 20 世纪 90 年代初被提出来的一种设计方法。鲁棒性是指系统对参数在设定范围内变化的不敏感性，即系统在不确定参数变化扰动下具有某种性能指标不变的能力。H_∞鲁棒控制是新发展的频域内最优控制理论[4−7]，Yi 等[8−9]应用 H_∞控制和 μ 综合控制都取得了很好的效果。近年来，随着不确定系统鲁棒控制研究的发展，不确定系统的保成本控制问题引起了人们的广泛关注[10−16]。凸多面体不确定系统是鲁棒控制理论研究的一类重要的不确定系统。然而，这些结果大多集中在对范数有界不确定性的研究，而对凸多面体不确定系统的研究较少；此外，一般的活性污泥系统都具有变量多、精度不高、随机影响因素多、过程不稳定，实时性不好等不足，所以，难以获得满意的控制效果。传统控制策略如比例控制、PID 控制[17]等，需要根据水质的变化情况对不同的参数进行调整，比较繁琐。为此，本文作者采用 H_∞保成本的控制方法实现对污水处理过程中溶解氧浓度的控制。该活性污泥系统可抽象为一类具有凸多面体参数不确定性的线性系统，所设计的控制器在保证系统具有保成本性能的同时还能具有一定的 H_∞干扰抑制水平。控制器增益最终可归结为一组线性矩阵不等式(LMI)的可行性问题[18]，求解十分方便，且无需参数调整。

1　系统模型描述

根据物料平衡原理，对活性污泥法污水处理系统进行如下假设[19−21]：

(1) 微生物为非自养微生物，其生长率大于死亡率并满足 Monod 方程；

(2) 二沉池无生化反应发生；

(3) 回流污泥影响泥龄和产率系数；

(4) 只研究系统的硝化反应。

由以上假设，可得活性污泥污水处理系统的状态方程：

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}(\theta)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\boldsymbol{w}(t) \\
\boldsymbol{z}(t) &= \boldsymbol{C}(\theta)\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式中：

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^{\mathrm{T}}；$$

$$
\boldsymbol{A}(\theta) = \begin{bmatrix}
u_{\mathrm{H}} - k_{\mathrm{d}} - \dfrac{CQ_{\mathrm{w}}}{V} & 0 & \delta \\
u_H / Y_{NH} & -Q/V & 0 \\
\dfrac{u_{\mathrm{H}}(1 - ff_{\mathrm{x}}Y_{\mathrm{NH}}) - ff_{\mathrm{x}}Y_{\mathrm{NH}}k_{\mathrm{d}}}{fY_{\mathrm{NH}}} & 0 & -\delta
\end{bmatrix}；
$$

$$
\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ QS_{\mathrm{i}}/V \\ O_{\mathrm{t}} \end{bmatrix}；
$$

$$\boldsymbol{B}_w(\theta) = [0 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}；\boldsymbol{C}(\theta) = [0 \quad 0 \quad 1]；$$

$\boldsymbol{x}(t)$为系统输入量；$x_1(t)$为微生物的质量浓度；$x_2(t)$为底物的质量浓度；$x_3(t)$为溶解氧的质量浓度；$\boldsymbol{z}(t)$为系统输出量，$\boldsymbol{u}(t)$为打氧量；$\boldsymbol{w}(t)$为外部扰动输入；k_{d}为内生的迟滞系数；S_{i}为流入污水中有机物浓度；C 为二沉池浓度因子；Q_{w}为污质的流量；Q 为流入量；V 为反应器体积；f 为联系有机物与需氧量的因子；f_{x}为水泵因子；Y_{NH}为观察到的生长系数；δ 为对溶解氧设置的冲量系数。方程中其余各符号的物理意义见文献[19]。

在上述状态方程中，各参数的取值与污水处理厂的实际情况有关，因此，具有很大的不确定性。为了不失一般性，这里假设参数变化范围如下：

$$
\begin{gathered}
u_{\mathrm{H}} - k_{\mathrm{d}} - \frac{CQ_{\mathrm{w}}}{V} \in [\beta_{1\min}, \beta_{1\max}] \\
\frac{u_{\mathrm{H}}}{Y_{\mathrm{NH}}} \in [\beta_{2\min}, \beta_{2\max}] \\
-\frac{Q}{V} \in [\beta_{3\min}, \beta_{3\max}] \\
\frac{u_{\mathrm{H}}(1 - ff_{\mathrm{x}}Y_{\mathrm{NH}}) - ff_{\mathrm{x}}Y_{\mathrm{NH}}k_{\mathrm{d}}}{fY_{\mathrm{NH}}} \in [\beta_{4\min}, \beta_{4\max}] \\
\frac{QS_i}{V} \in [\beta_{5\min}, \beta_{5\max}] \\
O_{\mathrm{t}} \in [\beta_{6\min}, \beta_{6\max}]
\end{gathered}
\tag{2}
$$

$\beta_{i\min}$ 和 $\beta_{i\max}$ (i=1, 2, …, 6)分别表示对应参数的下界和上界。

状态方程(1)描述了一类具有不确定参数的线性系统，本文针对此类系统，设计具有 H_∞性能指标的保成本控制器，使得系统鲁棒渐近稳定，同时获得满意的控制效果。

2　H_∞保成本控制器设计

考虑一类形如式(1)的不确定线性系统，不失一般性，令

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{A}_i\ ,\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}i}\ ,$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}i}\ ,\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\boldsymbol{C}_i \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\theta_2,\Lambda,\theta_m]^{\mathrm{T}}$，为不确定参数向量，且满足 $\sum_{i=1}^{m}\theta_i=1$，$\forall\theta_i\geq 0$，即系统(1)可表示成矩阵 $[\boldsymbol{A}_i\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{u}i}\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{w}i}\quad \boldsymbol{C}_i]$ 的凸多面体形式；$\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}i}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}i}$，$\boldsymbol{C}_i$ (i=1, 2, ⋯, m)为具有适当维数的已知常数矩阵。

对不确定系统(1)，定义如下形式二次型性能指标：

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 为给定的对称正定加权矩阵。

关于系统的保成本控制，引入以下定义[3]。

定义 1 对不确定系统(1)和性能指标(4)，如果存在 1 个控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和 1 个正数 J^*，使得对所有允许的不确定性，闭环系统是鲁棒渐近稳定的，且闭环性能指标值满足 $J\leq J^*$，则 J^*称为不确定系统(1)的 1 个性能上界，$\boldsymbol{u}^*(t)$ 称为不确定系统(1)的 1 个鲁棒保成本控制律。

关于系统的 H_∞控制则定义如下。

定义 2 对不确定系统(1)，给定干扰抑制水平 $\gamma>0$，若存在 1 个控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$，使得对所有的干扰 $\boldsymbol{w}(t)$，闭环系统是鲁棒渐近稳定的，且在零初始条件下，系统输出满足：

$$\|z(t)\|_2^2<\gamma^2\|\boldsymbol{w}(t)\|_2^2$$

则 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 称为不确定系统(1)的一个 H_∞控制律。其中：$\|\cdot\|_2$ 表示向量的 Euclidean 范数。

将定义 1 和定义 2 相结合，可得到以下定义。

定义 3 对不确定系统(1)，给定性能指标(4)和干扰抑制水平 $\gamma>0$，如果存在控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$，使得对所有允许的不确定性和干扰 $\boldsymbol{w}(t)$，闭环系统满足定义 1 和定义 2，则此时控制律 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 就称为不确定系统(1)的 1 个鲁棒 H∞保成本控制律。

现对不确定系统(1)，设计状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$，则闭环系统为：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\boldsymbol{w}(t)\\ z(t)&=\boldsymbol{C}(\theta)\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{5}$$

式中：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\theta}_i(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}i}\boldsymbol{K})$$

定理 1 对不确定系统(1)，给定性能指标(4)和干扰抑制水平 $\gamma>0$，若存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得对所有允许的不确定性和干扰 $\boldsymbol{w}(t)$，下列不等式成立：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{w}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{w}(t)\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\theta)C(\theta) & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{P} & -\gamma^2\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$，是不确定系统(1)的 1 个鲁棒 H_∞保成本控制律。相应地，1 个系统性能上界是 $J^*=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}Px_0$。其中：$x_0$ 为系统的初始状态。

证明 假定存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得不等式(6)成立。选取 Lyapunov 函数：

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$$

由矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的正定性可知：$V(\boldsymbol{x}(t))>0$。沿闭环系统(5)的任意轨线，$V(\boldsymbol{x}(t))$ 关于时间的导数为：

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\\ &[\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\boldsymbol{w}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)+\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\boldsymbol{w}(t)]=\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}(\theta)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{P}]\boldsymbol{x}(t)+\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}(\theta)\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

根据条件(6)，上式变为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))<&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\theta)\boldsymbol{C}(\theta)]\boldsymbol{x}(t)+\\ &\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{7}$$

当 $\boldsymbol{w}(t)=0$ 时，由式(7)得到：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))<-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(t)<0 \tag{8}$$

根据 Lyapunov 稳定性理论，闭环系统(5)是鲁棒渐近稳定的。

对式(8)两边从 t=0 到 $t=\infty$ 积分，并利用系统的渐近稳定性，得：

$$J=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t<V(\boldsymbol{x}(0))=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$$

根据定义 1，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 是不确定系统(1)的 1 个鲁棒保成本控制律，且 $J^*=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$，是相应闭环性能指标的 1 个上界。

当 $\boldsymbol{w}(t)\neq 0$ 时，引入如下指标：

$$J_\infty=\int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)]\mathrm{d}t$$

则在零初始条件下，由式(7)可得对所有非零干扰 $\boldsymbol{w}(t)$，下式成立：

$$J_\infty \leq \int_0^\infty [\dot{V}(x(t)) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(t)w(t)]\mathrm{d}t < -\int_0^\infty [x^{\mathrm{T}}(t)(W + K^{\mathrm{T}}RK)x(t)]\mathrm{d}t < 0$$

即满足定义 2 中的条件。因此，$u(t)=Kx(t)$ 又是不确定系统(1)的 1 个 H_∞ 控制律。

综上所述，$u(t)=Kx(t)$ 是不确定系统(1)的 1 个鲁棒 H_∞ 保成本控制律。[证毕]

注：定理 1 中得到的性能上界依赖于系统的初始状态 x_0。而在实际系统中，系统的初始状态有时很难精确确定。为此，可以假定初始状态 x_0 是 1 个满足 $E\{x_0x_0^{\mathrm{T}}\}=I$ 的零均值随机变量。通过考虑性能指标的期望值，得到以下结果：

$$\bar{J}=E\{J\}\leq E\{x_0^{\mathrm{T}}Px_0\}=\mathrm{Trace}(P) \tag{9}$$

为了得到控制器的构造方法，对于以下基于线性矩阵不等式处理[7]方法，本文给出系统 H_∞ 保成本控制律的设计步骤。

定理 2　对不确定系统(1)，给定性能指标(4)和干扰抑制水平 $\gamma>0$，存在对称正定矩阵 P 和矩阵 K，使得对所有允许的不确定性和干扰 $w(t)$，不等式(6)成立当且仅当存在对称正定矩阵 X 和矩阵 Y，使得

$$\begin{bmatrix} A_iX+B_{\mathrm{u}i}Y+XA_i^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{u}i}^{\mathrm{T}} & B_{\mathrm{w}i} & X & Y^{\mathrm{T}} & XC_i^{\mathrm{T}} \\ B_{\mathrm{w}i}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & -W^{-1} & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ C_iX & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0 \tag{10}$$

其中：i=1, 2, …, m；$u(t)=YX^{-1}x(t)$ 是不确定系统(1)的 1 个鲁棒 H_∞ 保成本控制律，相应地，系统性能上界是 $\bar{J}^*=\mathrm{Trace}(X^{-1})$。

证明　由式(6)得：

$$\begin{bmatrix} PA_{\mathrm{c}}(\theta)+A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}(\theta)P+W+K^{\mathrm{T}}RK+C^{\mathrm{T}}(\theta)C(\theta) & PB_{\mathrm{w}}(\theta) \\ B_{\mathrm{w}}^{\mathrm{T}}(\theta)P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0$$

将系统参数(3)代入上式，得：

$$\begin{bmatrix} P(A_i+B_{\mathrm{u}i}K)+(A_i+B_{\mathrm{u}i}K)^{\mathrm{T}}P+W+K^{\mathrm{T}}RK+C_i^{\mathrm{T}}C_i & PB_{\mathrm{w}i} \\ B_{\mathrm{w}i}^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0$$

对上式两边左乘和右乘对角矩阵 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I\}$，并令 $X=P^{-1}$，$Y=KX$，则上式变为：

$$\begin{bmatrix} A_iX+B_{\mathrm{u}i}Y+XA_i^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}B_{\mathrm{u}i}^{\mathrm{T}}+XWX+Y^{\mathrm{T}}RY+XC_i^{\mathrm{T}}C_iX & B_{\mathrm{w}i} \\ B_{\mathrm{w}i}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0$$

应用矩阵的 Schur 补性质[22]，即可由上式得到线性矩阵不等式(10)。[证毕]

在定理 2 的基础上，还可进一步给出最优保成本控制律及最小扰动抑制度 γ 的求解方法。

定理 3　对不确定系统(1)，给定性能指标(4)和干扰抑制水平 $\gamma>0$，若以下优化问题：

$$\min_{X,Y,M} \quad \mathrm{Trace}(M) \tag{11}$$

s.t.　(1)　LMI (10)

(2)　$\begin{bmatrix} M & I \\ I & X \end{bmatrix}>0$

有解($\tilde{X}, \tilde{Y}, M$)，则 $u(t)=\tilde{Y}\tilde{X}^{-1}x(t)$ 是系统的最优保成本控制律。

证明　由矩阵的 Schur 补性质及定理 3 中的条件(2)可知：$M>X^{-1}$，即 Trace(M)的最小化保证了 Trace(X^{-1})的最小化。

定理 4　对不确定系统(1)，给定性能指标(4)，若令 $\rho=\gamma^2$，则最优 H_∞ 控制律可以通过建立和求解以下优化问题得到：

$$\min_{X,Y,\rho} \quad \rho \tag{12}$$

s.t.　LMI (10)

相应的最小扰动抑制度 $\gamma_{\min}=\sqrt{\rho}$。

证明　以上 2 个优化问题均可通过 Matlab 中的 mincx( )函数求解得到。

3　数字仿真研究

根据某污水厂污水性质和处理能力，给定该污水厂各参数的上下界值分别如下[20]：

$$[\beta_{1\min}, \beta_{1\max}]=[2.949\,5, 5.949\,5];$$

$$[\beta_{2\min}, \beta_{2\max}]=[9.063\,4, 18.129\,6];$$

$$[\beta_{3\min}, \beta_{3\max}]=[-10.050\,0, -6.050\,0];$$

$$[\beta_{4\min}, \beta_{4\max}]=[4.936\,4, 9.943\,6];$$

$$[\beta_{5\min}, \beta_{5\max}]=[0.012\,0, 0.142\,0];$$

$$[\beta_{6\min}, \beta_{6\max}]=[12.857\,2, 19.473\,2]。$$

冲量系数取值恒为 1，则

$$A_1=\begin{bmatrix} 2.949\,5 & 0 & 1 \\ 9.063\,4 & -10.05 & 0 \\ 4.936\,4 & 0 & -1 \end{bmatrix};\quad B_{\mathrm{u}1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.012 \\ 12.857\,2 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}1}=\begin{bmatrix}0\\1.0000\\0\end{bmatrix}；\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}；$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}5.9495 & 0 & 1.0000\\18.1296 & -6.0500 & 0\\9.9436 & 0 & -1.0000\end{bmatrix}；$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{u}2}=\begin{bmatrix}0\\0.1420\\19.4732\end{bmatrix}；$$

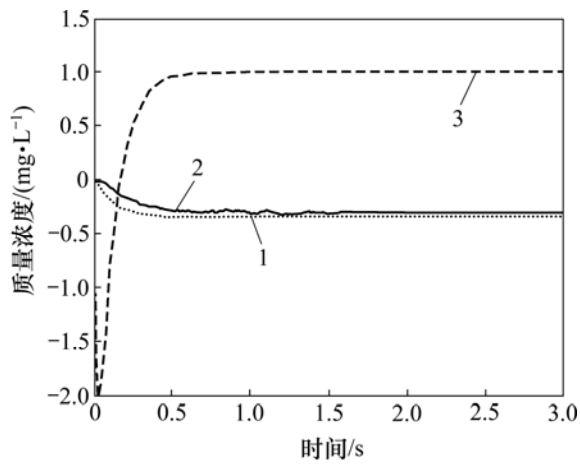
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{w}2}=\begin{bmatrix}0\\1.0000\\0\end{bmatrix}；\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1.0000\end{bmatrix}。$$

给定 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}\{0.1, 0.1\}$，$R=0.1$，$\gamma=1$，求解线性矩阵不等式(10)，得到状态反馈控制器增益为：

$$\boldsymbol{K}=[-57.4152 \quad -0.0271 \quad -5.3707] \tag{13}$$

相应的系统性能指标上界为 $\bar{J}^*=24.7686$。进一步求解优化问题(11)，得到系统性能指标的最优上界 $\bar{J}^*=17.0318$。另外，由优化问题(12)还可得到系统具有的最小 H_∞ 扰动抑制水平为 $\gamma_{\min}=0.0517$。

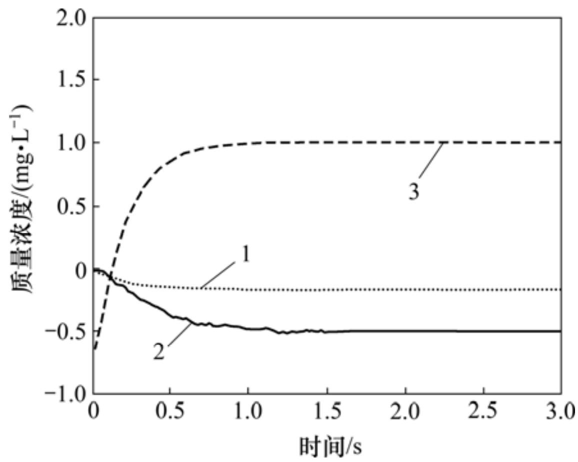
假定外界干扰 $\boldsymbol{w}(t)$为在[−1, 1]内变化的随机数，并且在 1.5 s 后干扰消失。将设计的状态反馈控制器(13)应用于系统(1)进行仿真试验，使得系统溶解氧的质量浓度 $\boldsymbol{x}_3(t)$保持在 1 mg/L，仿真结果如图 1 和图 2 所示。其中：图 1 所示为控制器作用于下界模型时的控制输出效果，图 2 所示为控制器作用于上界模型时的控制输出效果。



1—微生物；2—底物；3—溶解氧

图 1 控制器作用于下界模型时的状态响应

Fig.1 State responses of controller role model in lower bound of state response



1—微生物；2—底物；3—溶解氧

图 2 控制器作用于上界模型时的状态响应

Fig.2 State responses of controller role model in sector on state response

由图 1 和图 2 可知：所设计的控制器能够很好地控制系统溶解氧的质量浓度，使其维持在期望的给定值；同时，所设计的控制器对干扰还具有很强的鲁棒性。通过与文献[23]和[24]中 PID 方法进行对比，可知本文的仿真结果不仅调节时间短，响应速度快，而且具有较好的稳定控制效果。

4 结论

针对目前污水处理过程控制中存在的缺点，归纳出变参数活性污泥系统状态空间模型，并对系统稳定性进行分析。利用状态反馈方法改善系统的动态性能，提出了一种鲁棒 H_∞ 保成本控制器的方法。仿真研究表明，实验结果与现有的定性分析结论相符，且具有以下优点：

(1) 应用该方法可以获得满意的控制效果；

(2) 可使系统具有很好的鲁棒性；

(3) 保证系统快速响应，且超调较小；

(4) 具有很好的实用价值。

参考文献：

[1] 薛福霞, 刘载文, 王正祥, 等. 模糊控制技术在污水处理系统的应用[J]. 北京工商大学学报: 自然科学版, 2005, 23(6): 24−27.
XUE Fu-xia, LIU Zai-wen, WANG Zheng-xiang, et al. Fuzzy control technology in the sewage treatment system[J]. Beijing

Technology and Business University: Natural Science Edition, 2005, 23(6): 24−27.

[2] 刘超彬, 乔俊飞, 张芳芳. 污水处理过程中溶解氧的模糊神经网络控制[J]. 山东大学学报: 工学版, 2005, 35(3): 83−87.
LIU Chao-bin, QIAO Jun-fei, ZHANG Fang-fang. Sewage dissolved oxygen in the process of the fuzzy neural network control[J]. Journal of Shandong University: Engineering Edition, 2005, 35(3): 83−87.

[3] Chang M S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1972, 17(4): 474−483.

[4] 吴旭东, 解学书. H_∞鲁棒控制中的加权阵选择[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1997, 37(1): 27−30.
WU Xu-dong; XIE Xue-shu. Weighting function matrix selection in $H\infty$ robust control[J]. Journal of Tsinghua University: Natural Science, 1997, 37(1): 27−30.

[5] 李群明, 朱伶, 徐震. 磁悬浮球的鲁棒控制器设计[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2007, 38(5): 922−927.
LI Qun-ming, ZHU Ling, XU Zhen. Magnetic ball robust controller design[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2007, 38(5): 922−927.

[6] 吴敏, 桂卫华. 现代鲁棒控制[M]. 长沙: 中南工业大学出版社, 1998.
WU Ming, GUI Wei-hua. Modern robust control[M]. Changsha: Central South University of Technology Press, 1998.

[7] 桂卫华, 刘碧玉. 一类不确定时滞关联非线性系统分散鲁棒 H_∞控制[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2005, 36(5): 846−851.
GUI Wei-hua, LIU Bi-yu. Decentralized robust H_∞ control for a class of uncertain interconnected nonlinear systems with time delays[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2005, 36(5): 846−851.

[8] Yi J H, Park K H, Kim S H, et al. Robust force control for a magnetically levitated manipulator using flux density measurement[J]. Control Engineering Practice, 1996, 4(7): 957−965.

[9] Uchiyama Y, Mukai M, Fujita M. Robust acceleration control of electrodynamic shaker using μ–synthesis[C]//Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. Seville, 2005: 6170−6175.

[10] Fishman A, Dion J M, Dugard L, et al. A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control[C]//Proceedings of the 13th IFAC World Congress. San Francisco, 1996: 197−202

[11] Petersen, I.R. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems[C]//Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio, TX, 1993: 15−17.

[12] JIANG Pei-gang, SU Hong-ye, CHU Jian. LMI approach to optimal guaranteed cost control for a class of linear uncertain discrete systems[C]//Proceedings of the American Control Conference. Chicago, 2000: 327−331.

[13] Glielmo L, Kogan M M. Guaranteed cost controllers for a class of uncertain linear systems[C]//The 2nd International Conference on Control of Oscillations and Chaos. St Petersburg, 2000: 140−141

[14] 刘岑枫, 胡刚. 保成本控制的研究现状[J]. 佛山科学技术学院学报: 自然科学版, 2003, 21(4): 26−30.
LIU Ceng-feng, HU Gang. Guaranteed cost control of the status quo[J]. Foshan Science and Technology University: Natural Science, 2003, 21(4): 26−30.

[15] Dan Huang, Sing K N. State feedback guaranteed cost control of uncertain networked control systems[C]//1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics. Harbin, 2006: 19−21.

[16] XU Jian-ming, YU Li. An LMI approach to guaranteed cost PI control of linear uncertain systems[C]//43rd IEEE Conference on Decision and Control. Nassau, 2004: 2165−2170.

[17] Stephen C, Paschall Ⅱ. Design, fabrication, and control of a single actuator magnetic levitation system[D]. Texas: Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University, 2002.

[18] Boyd S, EI L Ghaoui, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[19] Sanchez E N, Gonzalez J M, Ramirez E. Minimal PD fuzzy control of a wastewater treatment plant[C]//Proceedings of the 15th IEEE International Symposium on Intelligent Control. Rio Patras, Greece, 2000: 169−173

[20] 冯裕钊, 龙腾锐, 郭劲松, 等. 变参数活性污泥系统的最优鲁棒控制法[J]. 中国给水排水, 2003, 19(3): 14−16.
FENG Yu-zhao, LONG Teng-rui, GUO Jing-song, et al. Variable parameters activated sludge system, robust control of the optimal method [J]. China Water & Wastewater, 2003, 19(3): 14−16.

[21] 毕雪芹, 倪原, 王丽娟. 活性污泥水处理模糊控制系统设计及仿真[J]. 西安工业大学学报, 2007, 27(6): 551−554.
BI Xue-qin, NI Yang, WANG Li-juan. Activated sludge treatment fuzzy control system design and simulation[J]. Xi'an University of Technology Journal, 2007, 27(6): 551−554.

[22] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 12−30.
YU Li. Robust control: LMI approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 12−30.

[23] 范程华, 朱武. 污水生化处理中溶解氧的非线性控制研究[J]. 工业控制与应用, 2008, 27(2): 22−23.
FAN Chen-hua, ZHU Wu. Biological wastewater treatment in the non-linear control of dissolved oxygen[J]. Industrial Control and Application, 2008, 27(2): 22-23.

[24] 安坤, 柳春平, 毛建东. 氧化沟系统中溶解氧智能控制系统的研究[J]. 中北大学学报: 自然科学版, 2006, 27(6): 504−705.
AN Kun, LIU Chun-ping, MAO Jian-dong. Oxidation ditch system dissolved oxygen study of intelligent control systems[J]. North University of China: Natural Science Edition, 2006, 27(6): 504−705.

(编辑　陈灿华)