Limites projectives fortes d'algébroïdes de Lie

Patrick CABAU *
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie, Campus scientifique
73376. Le Bourget du Lac France

Résumé : On définit la notion de limite projective forte d'algébroïdes de Lie puis on étudie les structures de fibrés vectoriels fréchétiques associés et la compatibilité entre les divers morphismes. On s'intéresse ensuite à la limite projective de semi-gerbes.

Abstract : We define the notion of strong projective limit of Banach Lie algebroids. We study the associated structures of Fréchet bundles and the compatibility with the different morphisms. We then use this framework to define the projective limit of (semi)sprays.

Mots clé : algébroïde de Lie, limite projective, fibré vectoriel banachique, fibré vectoriel fréchétique, calcul différentiel, semi-gerbe, tenseur de Nijenhuis, distribution involutive.

Classification AMS : 46A13, 46T05, 46T20, 58A20, 58A30, 58B10, 58B25, 26E15.

1 Introduction

La notion d'algébroïde de Lie a été introduite par J. Pradines dans [Pra] en liaison avec les groupoïdes de Lie.
Cette notion qui généralise à la fois la structure d'algèbre de Lie et le fibré tangent à une variété apparaît comme un cadre adapté pour des problèmes qui interviennent notamment

- en mécanique où une théorie des systèmes lagrangiens et hamiltoniens peut être développée sur de telles structures (cf. [Wein2], [CLMM])
- en géométrie symplectique en vue de la symplectisation de variétés de Poisson et d'applications à la quantisation ([Kar], [Wein1])
- en théorie du contrôle optimal où existe une version du principe du maximum de Pontryagin (cf. [Mart]).

*L'auteur remercie Fernand Pelletier pour les diverses remarques et discussions.

Peut être développée sur de tels espaces la théorie d'opérateurs différentiels tels que la différentielle extérieure et la dérivée de Lie, cette dernière pouvant être étendue au crochet de Schouten-Nijenhuis. Par ailleurs, on peut naturellement munir le fibré cotangent à une variété de Poisson d'une structure d'algébroïde de Lie (cf. [Marl] pour le développement de telles notions sur des variétés de dimensions finies).

L'étude des limites projectives (ou inverses) de systèmes de divers types d'espaces a donné lieu à de nombreux travaux :

– limites projectives de fibrétangents d'une variété différentiable de dimension finie (cf. [Gal3] et plus généralement limites projectives de fibré vectoriels (cf. [AghSur2], un exemple classique étant fourni par la géométrie du fibré des jets d'ordre infini telle qu'elle est développée par exemple dans [Sau]
– limites projectives de groupes de Lie banachiques étudié dans [Gal1] en liaison avec les groupes ILB ([Omo], [Sch])
– *universal laminated surfaces* étudiées par Nag et Sullivan dans [NagSul] et utilisées en Physique Mathématique.

. Rappelons que la notion de limite projective a été introduite par Weil dans [Weil] pour discuter de la structure des groupes localement compacts.

De nombreux problèmes apparaissent sur des variétés modelées sur des espaces de Fréchet $\mathbb{F}$: résolution dans un cadre général d'équations différentielles (cf. [Ham]) et structure pathologique du groupe $Gl(\mathbb{F})$ (qui n'admet pas de structure raisonnable de groupe de Lie). Ces problèmes ont une solution sur certaines limites projectives d'espaces : d'une part, existence de courbes intégrales de champs de vecteurs, de courbes autoparallèles relativement à des connexions linéaires (cf. [AghSur2]), section globale horizontale pour des connexions sur certains espaces ([AghSur1]) ; d'autre part, existence d'un groupe de Lie généralisé $H_0(\mathbb{F})$ comme groupe structural pour le fibré tangent (cf. [Gal2]).

On s'intéresse ici au cadre des limites projectives d'algébroïdes de Lie banachiques que l'on peut munir de structures fréchétiques.

On rappelle dans la partie 2 les notions de variétés et de fibrés modelés sur des espaces vectoriels adaptés, *convenient vector spaces* selon la terminologie de Kriegel et Michor ([KriMic1]). La notion de limite projective forte de fibrés vectoriels banachiques introduite dans [AghSur2] et généralisant des résultats obtenus sur le fibré tangent par [Gal3] est rappelée dans la partie 3. La notion d'algébroïde de Lie banachique est présentée ainsi que les notions de dérivée de Lie, de différentielle extérieure et de morphisme dans la partie 4 (cf. [Ana]). On établit dans la partie 5 la structure fréchétique de la limite projective de ce type d'algébroïdes (théorème 12). On donne ensuite des exemples de telles structures dans la partie 6 (oscillateur harmonique en dimension finie et distributions). La dernière partie de ce travail est dévolue à l'étude des limites projectives de semi-gerbes (eng. *semisprays*) et de courbes admissibles.

2 Variétés de dimension infinie modelées sur des espaces adaptés

Le calcul différentiel classique fonctionne bien sur des variétés de dimension finie ou banachique (cf. [Lan]). Les limites projectives de tels espaces et de fibrés associés requierrent le calcul en dimension infinie développé notamment dans [KriMic1]. On rappelle essentiellement dans cette partie les résultats énoncés dans [KriMic2], §2.

2.1 Applications de classe C^∞ sur des espaces vectoriels adaptés

Si l'on souhaite munir un espace vectoriel localement convexe séparé E d'une structure différentiable, la notion première est celle de courbe $c : \mathbb{R} \to E$ de classe C^∞.
La courbe c est dite *différentiable* si pour tout $t \in \mathbb{R}$, la limite du taux $\dfrac{1}{s}\left[c\left(t+s\right)-c\left(t\right)\right]$ existe. c est dit de classe C^∞ si toutes les dérivées itérées existent.
L'espace $\mathcal{C} = C^\infty\left(\mathbb{R}, E\right)$ des courbes $c : \mathbb{R} \to E$ de classe C^∞ ne dépend pas de la topologie localement convexe de E mais uniquement de sa bornologie associée (système de ses ensembles bornés).
L'espace E est appelé espace vectoriel adapté (*convenient vector space* selon la terminologie de [KriMic1]) s'il vérifie la condition de c^∞–complétude :

Une courbe $c : \mathbb{R} \to E$ est de classe C^∞ si et seulement si $\lambda \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ pour tout $\lambda \in E^*$ où E^* est le dual constitué de toutes les applications linéaires continues sur E.
La topologie finale relative à l'ensemble $\mathcal{C}$ est appelée c^∞–topologie de E et est notée $c^\infty E$. Un ouvert pour cette topologie est appelé ouvert c^∞.

Pour des espaces de Fréchet, cette topologie coïncide avec la topologie d'espace vectoriel localement convexe donnée. Pour d'autres espaces (e.g. l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions tests à support compact sur $\mathbb{R}$) elle est strictement plus fine.

Considérons maintenant deux espaces vectoriels E et F localement convexes et soit $U \subset E$ un ouvert c^∞. Une application $f : E \supset U \to F$, où E et F sont deux espaces vectoriels adaptés et où U est un c^∞–ouvert de E, est dite de classe C^∞ si $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$ pour toute $c \in C^\infty(\mathbb{R}, U)$. De plus, cf. [KriMic2], 2.3 (5), l'espace $C^\infty(U, F)$ peut être aussi muni d'une structure d'espace vectoriel adapté.

2.2 Variétés différentiables

2.2.1 Structure de variété différentiable sur un ensemble

Une carte (U, φ) sur un ensemble M est une bijection $\varphi : U \to \varphi(U) \subset E$ d'une partie U de M sur un c^∞–ouvert d'un espace vectoriel adapté E.
Une famille $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de cartes est appelée un *atlas* si tous les changements de cartes $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ (\varphi_\beta)^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont de classe C^∞.
Deux atlas sont dits équivalents si leur réunion est encore un atlas.
L'ensemble M muni d'une classe d'équivalence d'atlas est appelé *variété différentiable* de classe C^∞.
Un sous-ensemble W de la variété M est ouvert si et seulement si pour tout $\alpha \in A$ le sous ensemble $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W)$ de E est c^∞–ouvert.
La topologie ainsi définie est alors la topologie finale relativement à l'espace des courbes de classe C^∞.

2.2.2 Sous-variétés

Un sous-ensemble N d'une variété M est appelée *sous-variété* si pour tout $x \in N$ il existe une carte (U, φ) de M telle que

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap F$$

où F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel adapté E.

2.2.3 Applications de classe C^∞ entre variétés

Une application $f : M \to N$ entre deux variétés différentiables est dite de classe C^∞ si pour tout $x \in M$ et pour toute carte (V, ψ) de N telle que

$f(x) \in V$ il existe une carte (U, φ) de M telle que $x \in U$, $f(U) \subset V$ et telle que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^∞. Ceci est équivalent au fait que $f \circ c$ est C^∞ pour chaque courbe $c : \mathbb{R} \to M$ de classe C^∞.
On note $\mathcal{F}$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ de M dans $\mathbb{R}$.

2.2.4 Fibrés vectoriels

Soit $p : F \to M$ une application C^∞ entre variétés différentiables F et M.
Une *carte de fibré vectoriel* sur (F, p, M) est un couple (U, Φ) où U est un ouvert de M et où Φ est un difféomorphisme respectant la fibre, i.e. pour lequel le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd} F_{|U} = p^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times V \arrow[dl, "pr1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où V est un espace vectoriel adapté fixe appelé fibre strandard.
Deux cartes (U_1, Φ_1) et (U_2, Φ_2) sont dites *compatibles* si $\Phi_1 \circ (\Phi_2)^{-1}(x, v)$ peut être écrit sous la forme $(x, \Phi_{1,2}(x)(v))$ où $\Phi_{1,2} : U_1 \cap U_2 \to GL(V)$.
La fonction $\Phi_{1,2}$ est alors unique et C^∞ dans $L(V)$ où $L(V)$ est l'espace des applications linéaires bornées (donc C^∞).
Un *atlas de fibré vectoriel* $(U_\alpha, \Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ pour $p : F \to M$ est un ensemble de cartes (U_α, Φ_α) deux à deux compatibles où $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de la variété M. Deux atlas sont *équivalents* si leur réunion est encore un atlas.
Un *fibré vectoriel*, de classe C^∞, $p : F \to M$ est la donnée de variétés F (espace total), M (base) et d'une application $p : F \to M$ (projection) de classe C^∞ munies d'une classe d'équivalence d'atlas.
Une section s de $p : F \to M$ est une application C^∞ $u : M \to F$ tellle que $p \circ u = \lim Id_M$.
L'espace $\underline{F}$ des sections de F peut être muni d'une structure d'espace vectoriel adapté.

2.2.5 Vecteurs tangents

Un *vecteur tangent (cinématique)* en un point x d'une variété M est une classe d'équivalence pour la relation suivante

$$c_1 \sim c_2 \text{ si et seulement si } \begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = x \in U \\ (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0) \end{cases}$$

où (U, φ) est une carte de M centrée en x.

Il existe une autre notion de vecteur tangent qui est la notion de *vecteur tangent opérationnel* ([KriMic1], 28.1) qui ne coïncide pas nécessairement sur des variétés adaptées à la notion de vecteur tangent cinématique.

2.2.6 Fibré tangent

L'ensemble de tous les vecteurs tangents en les divers points de la variété M peut être muni d'une structure de fibré vectoriel ; il est alors appelé *fibré tangent (cinématique)* à M et noté TM.
Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un atlas de la variété M alors les changements de cartes dans TM font intervenir les différentielles $d\varphi_{\alpha\beta}$.

2.2.7 Champs de vecteurs

Un *champ de vecteurs cinématique* est une section C^∞ du fibré tangent cinématique TM. On note $\mathfrak{X}(M)$ l'espace des champs de vecteurs cinématiques qui peut lui aussi être muni d'une structure d'espace vectoriel adapté.
Pour des variétés régulières au sens de [KriMic1], 14, le crochet de Lie de deux éléments X et Y de $\mathfrak{X}(M)$ peut être défini, en supposant que M est un ouvert c^∞ d'un espace vectoriel adapté E, par

$$[X, Y] = dY(X) - dX(Y)$$

où X et Y sont alors vu comme application $M \to E$ de classe C^∞.

2.2.8 Application tangente

Si M et N sont deux variétés différentiables, à toute application $f : M \to N$ de classe C^∞, on peut associer à tout point $x \in M$ une application linéaire $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} M$ qui associe au vecteur tangent à une courbe c passant par x le vecteur tangent à la courbe $f \circ c$ passant par $f(x)$.
L'application obtenue $Tf : TM \to TN$ est alors C^∞ et est appelée *application tangente* de f.

2.2.9 Champs de vecteurs reliés

Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \to N$ une application

C^∞. On dit que deux champs de vecteurs cinématiques sont f–reliés si

$$Tf \circ X = Y \circ f$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 désignent maintenant 4 champs de vecteurs.

Soit $f : M \to N$ une application de classe C^∞. Si X_1 et Y_1 (resp. X_2 et Y_2) sont f–reliés alors $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ sont aussi f–reliés.
Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme local alors pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(N)$ il existe un champ de vecteurs $f^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ défini par $(f^*Y)(x) = (T_x f)^{-1}(Y(f(x)))$. L'application linéaire $f^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ est alors un homomorphisme d'algèbres de Lie.

2.2.10 Courbe intégrale d'un champ de vecteurs cinématique

Une courbe $c : I \to M$ de classe C^∞ est dite *courbe intégrale* du champ de vecteurs X si pour tout $t \in I$, on a : $c'(t) = X(c(t))$.
Pour un champ de vecteurs donné les courbes intégrales peuvent ne pas exister ([KriMic1], 32.12, exemple 1) localement et même si elles existent, elles peuvent de pas être uniques pour une condition initiale donnée ([KriMic1], 32.12, exemple 2). Ceci est dû au fait que les résultats classiques relatifs à l'existence et à l'unicité de solutions d'équations différentielles sont fondés sur des théorèmes résultant du théorème du point fixe sur des espaces de Banach.

2.2.11 Flot d'un champ de vecteurs

Un *flot local pour un champ de vecteurs* $X \in \mathfrak{X}(M)$ est une application, de classe C^∞, $\varphi^X : M \times \mathbb{R} \supset U \to M$ définie sur un ouvert c^∞ U de $M \times \{0\}$ tel que :

1. $U \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ est un intervalle ouvert connexe
2. Si $\varphi^X(x, s)$ existe alors $\varphi^X(x, t+s)$ existe si et seulemnt si $\varphi^X(x, t+s)$ existe et on a $\varphi^X(x, t+s) = \varphi^X\left(\varphi^X(x, s), t\right)$
3. $\varphi^X(x, 0) = x$ pour tout $x \in M$
4. $\dfrac{d}{dt}\varphi^X(x, t) = X\left(\varphi^X(x, t)\right)$

Si un champ de vecteurs cinématique X admet un flot local φ^X alors pour toute courbe intégrale c de X, on a $c(t) = \varphi^X(c(0), t)$ et il existe ainsi un unique flot maximal.

2.2.12 Fibré cotangent

Une $1-$forme en un point x d'une variété M est une forme linéaire bornée sur l'espace vectoriel adapté T_xM (donc appartenant à T_xM'). L'ensemble de toutes ces $1-$formes en les divers points de M peut être muni d'une structure de fibré vectoriel appelé *fibré cotangent (cinématique)* et not

Un atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ de classe C^∞ de M donne naissance aux fonctions de transition $x \mapsto d\left(\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}\right)_{\varphi_\alpha(x)}$.

2.2.13 Formes différentielles

Sur une variété M une $1-$*forme différentielle (cinématique)* n'est autre qu'une section C^∞ du fibré cotangent cinématique $T'M$. L'ensemble de ces formes différentielles peut être muni d'une structure d'espace vectoriel adapté.

Sur une variété C^∞ régulière M, la classe de formes différentielles ([KriMic1], 33.22) stable par dérivée de Lie L_X, dérivation extérieure d, produit intérieur i_X et image réciproque f^* est

$$\Omega^k(M) = \underline{L^k_{\text{alt}}(TM, M \times \mathbb{R})}$$

La dérivée de Lie $L : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ est une application C^∞ définie par

$$(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) = X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_k)$$

La différentielle extérieure $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ est C^∞ et est définie par

$$\begin{aligned}(d\omega)(x)(X_0, \ldots, X_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i\left(\omega\left(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k\right)\right) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k\right)\end{aligned}$$

3 Limite projective forte de fibrés vectoriels banachiques

3.1 Limites projectives d'espaces topologiques

Un système projectif d'espaces topologiques est une suite $\left(\left(X_i, \delta_i^j\right)_{j \geq i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ où

– pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est un espace topologique

- pour tous i, $j \in \mathbb{N}$, tels que $j \geq i$, $\delta_i^j : X_j \to X_i$ est une application continue
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\delta_i^i = Id_{X_i}$
- pour tous entiers naturels $i \leq j \leq k$, $\delta_i^j \circ \delta_j^k = \delta_i^k$.

Un élément $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ du produit $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ est appelé un fil [thread] si pour tous $j \geq i$, $\delta_i^j (x_j) = x_i$.
L'ensemble $X = \varprojlim X_i$ de tels éléments, muni de la topologie la moins fine rendant toutes les projections $\delta_i : X \to X_i$ continues, est appelé *limite projective* de la suite $\left(\left(X_i, \delta_i^j \right)_{j\geq i} \right)_{i\in\mathbb{N}}$.
Une base de la topologie de X est constituée des sous-ensembles $(\delta_i)^{-1} (U_i)$ où les U_i sont des ouverts de X_i.
Soient $\left(\left(X_i, \delta_i^j \right)_{j\geq i} \right)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(Y_i, \gamma_i^j \right)_{j\geq i} \right)_{i\in\mathbb{N}}$ deux systèmes projectifs de limites projectives respectives X et Y.
Une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'applications continues $f_i : X_i \to Y_i$ vérifiant, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $j \geq i$, la condition de cohérence

$$\gamma_i^j \circ f_j = f_i \circ \delta_i^j$$

est appelée *suite projective d'applications*.
La limite projective de cette suite est l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & X & \to & Y \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \mapsto & (f_i (x_i))_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

L'application f est alors continue et est un homéomorphisme si tous les f_i sont eux-mêmes des homéomorphismes (cf. [AbbMan]).

3.2 Limite projective forte de variétés banachiques

La suite $\left(\left(M_i, \delta_i^j \right)_{j\geq i} \right)_{i\in\mathbb{N}}$ est appelée *système projectif fort de variétés banachiques* si

- M_i est une variété différentiable modelée sur l'espace de Banach $\mathbb{M}_i$
- $\left(\left(\mathbb{M}_i, \overline{\delta_i^j} \right)_{j\geq i} \right)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système projectif d'espaces banachiques

– pour tout $x = (x_i) \in M = \varprojlim M_i$, il existe un système projectif de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que $x_i \in U_i$ où la relation de cohérence $\varphi_i \circ \delta_i^j = \overline{\delta_i^j} \circ \varphi_j$ est vérifiée
– $U = \varprojlim U_i$ est ouvert dans M.

La limite projective $M = \varprojlim M_i$ a alors une structure de variété fréchétique modelée sur l'espace de Fréchet $\mathbb{M} = \varprojlim \mathbb{M}_i$ où la structure différentiable est définie via les cartes (U, φ) où $\varphi = \varprojlim \varphi_i : U \to (\varphi_i(U_i))$.
φ est bien un homéomorphisme (limite projective d'homéomorphismes) et les applications de changements de cartes

$$\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(U)} = \varprojlim \left(\left(\psi_i \circ (\varphi_i)^{-1}\right)_{|\varphi_i(U_i)} \right)$$

entre ouverts d'espaces de Fréchet sont de classe C^∞ au sens de Kriegel et Michor (cf. [KriMic1]).

Exemple 1 *Espace des jets d'ordre infini des sections d'un fibré vectoriel de rang fini au-dessus d'une variété réelle de dimension finie (cf [Sau], [AbbMan]).*

Exemple 2 *Limite projective de groupes de Banach-Lie (cf. [Gal1], [Omo], [AbbMan]).*
Un groupe G est appelé limite projective de groupes de Banach-Lie modelé sur la limite projective $\mathbb{G} = \varprojlim \mathbb{G}_i$ si

1. *$G = \varprojlim G_i$ où $\left(G_i, \delta_i^j\right)$ est un système projectif de groupes de Banach-Lie où G_i est modelé sur $\mathbb{G}_i$*
2. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe une carte (U_i, φ_i) centrée en le neutre $e_i \in G_i$ telle que :*
   - *(a) $\delta_i^j(U_j) \subset U_i$ pour $j \geq i$*
   - *(b) $\overline{\delta_i^j} \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \delta_i^j$*
   - *(c) $\varprojlim \varphi_i(U_i)$ est ouvert dans $\mathbb{G}$ et $\varprojlim U_i$ est ouvert dans G relativement à la topologie de limite projective.*

– *A titre d'exemple simple, l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit est un groupe de Lie abélien, limite projective des groupes de Lie abéliens $\mathbb{R}^j$, $j \in \mathbb{N}$.*

– *Des exemples plus conséquents correspondent aux groupes de Lie compacts eu égard au fait que tout groupe de Lie compact est la limite projective d'une famille de groupes de Lie compacts (cf. [Weil])*

On peut notamment définir sur de tels groupes de Fréchet-Lie G l'exponentielle exp_G comme limite projective de la suite exp_{G_i}. Cette application est alors continue.

3.3 Limite projective forte de fibrés vectoriels

Soit $\left(\left(M_i, \delta_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif fort de variétés banachiques où chaque variété M_i est modelée sur l'espace de Banach $\mathbb{M}_i$.

On considère pour tout entier i le fibré vectoriel banachique (E_i, π_i, M_i) de fibre type $\mathbb{E}_i$ où, de plus, $\left(\left(\mathbb{E}_i, \lambda_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ constitue un système projectif d'espace de Banach.

Le système $\left(\left(E_i, f_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est appelé *système projectif fort de fibrés vectoriels banachiques* sur $\left(\left(M_i, \delta_i^j\right)_{j\geq i}\right)$ si pour tout (x_i) il existe un système projectif de trivialisations (U_i, τ_i) de (E_i, π_i, M_i), où $\tau_i : (\pi_i)^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{E}_i$ sont des difféomorphismes locaux, tel que $x_i \in U_i$ (ouvert de M_i) et où $U = \varprojlim U_i$ est ouvert dans M avec pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$ on ait la condition de cohérence

$$\left(\delta_i^j \times \lambda_i^j\right) \circ \tau_j = \tau_i \circ f_i^j$$

On a alors la proposition suivante qui généralise le résultat de [Gal3] relatif à la limite projective de fibrés tangents à des variétés banachiques et dont on trouvera la démonstration dans [AghSur2].

Proposition 3 *Soit $(E_i, \pi_i, M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif fort de fibrés vectoriels banachiques.*

Alors $\left(\varprojlim E_i, \varprojlim \pi_i, \varprojlim M_i\right)$ est un fibré vectoriel fréchétique.

Notons que le groupe linéaire $Gl(\mathbb{E})$ ne pouvant être muni d'une structure de groupe de Lie ne peut pas jouer le rôle de groupe structural. Il est ici remplacé par le groupe de Lie généralisé, $H^0(\mathbb{E}) = \varprojlim H_i^0(\mathbb{E})$ limite projective des groupes de Lie banachiques

$$H_i^0(\mathbb{E}) = \left\{ (h_1, \ldots, h_i) \in \prod_{j=1}^{i} Gl(\mathbb{E}_j) : \lambda_k^j \circ h_j = h_k \circ \lambda_k^j, \text{ pour } k \leq j \leq i \right\}$$

On obtient alors la différentiabilité des fonctions de transition T.

4 Algébroïdes de Lie banachiques

4.1 Définition. Exemples

Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel banachique dont la fibre type est un espace de Banach $\mathbb{E}$.
Un morphisme de fibrés vectoriels $\rho : E \to TM$ est appelé *ancre*. Ce morphisme induit une application $\underline{\rho}$: $\underline{E} \to \underline{TM} = \mathfrak{X}(M)$ définie pour tout x de M et toute section s de E par : $\left(\underline{\rho}\,(s)\right)(x) = \rho\,(s\,(x))$.
On suppose qu'il existe un crochet $[.,.]_E$ sur l'espace $\underline{E}$ qui le munisse d'une structure d'algèbre de Lie.

DÉFINITION 4 *Le quadruplet (E, π, M, ρ) est appelé algébroïde de Lie banachique si :*

1. $\underline{\rho}$:$(\underline{E}, [.,.]_E) \to (\mathfrak{X}(M), [.,.])$ *est un homomorphisme d'algèbres de Lie*
2. $[s_1, fs_2]_E = f\,[s_1, s_2]_E + \left(\underline{\rho}\,(s_1)\right)(f)\ \ s_2$ *pour tous* $f \in \mathcal{F}$ *et* $s_1, s_2 \in \underline{E}$

Exemple 5 $E = TM$ *et* $\rho = N$ *est un tenseur de Nijenhuis, i.e. vérifiant la propriété*

$$[NX, NY] = N\left([NX, Y] + [X, NY] - N\left([N, Y]\right)\right)$$

(TM, π, M, N) *est un algébroïde de Lie pour le crochet* $[.,.]_N$ *défini par*

$$[X, Y]_N = [NX, Y] + [X, NY] - N\left([X, Y]\right)$$

Le cas trivial correspond au cas où $N = \lim Id_{TM}$

Exemple 6 *E est une distribution, i.e. un sous-fibré vectoriel de TM dont la fibre E_x au dessus d'un point x de la base M est un sous-espace vectoriel banachique fermé de codimension finie, qui est de plus involutive. L'ancre est alors l'injection canonique $\rho : E \to TM$.*

Exemple 7 *E est le fibré cotangent à une variété banachique et $\rho = P$ est un tenseur de Poisson. Le crochet sur les sections de T^*M est défini (cf. [MagMor]) par*

$$\{\alpha, \beta\}_P = L_{P\beta}\,(\alpha) - L_{P\alpha}\,(\beta) + d\,\langle \beta, P\alpha \rangle$$

Le fait que $(T^*M, P, M, \{.,.\}_P)$ *ait une structure d'algébroïde de Lie résulte de la propriété*

$$\{\alpha, f.\beta\}_P = f.\{\alpha, \beta\}_P + L_{P\alpha}(f).\beta$$

On peut trouver une généralisation aux structures de Jacobi, structures introduites par Lichnerowicz ([Lic]), dans [Pon].

Exemple 8 *Soit une action à droite* $\psi : M \times G \to M$ *d'un groupe de Lie* G *sur une variété banachique* M. *On note* $\mathcal{G}$ *l'algèbre de Lie de* G. *Il existe alors un morphisme naturel du fibré banachique trivial* $M \times \mathcal{G}$ *dans* M *défini par*

$$\Psi(x, X) = T_{(x,e)}\psi(0, X)$$

Pour tous X *et* Y *dans* $\mathcal{G}$, *on a :*

$$\Psi(\{X, Y\}) = [\Psi(X), \Psi(Y)]$$

où $\{\ ,\ \}$ *désigne le crochet de Lie sur* $\mathcal{G}$ *(cf. [KriMic1], 36.12).*

$(M \times \mathcal{G}, \Psi, M, \{\ ,\ \})$ *a alors une structure d'algèbroïde de Lie.*

4.2 Opérateurs de dérivation

Peuvent être définies, sur un algébroïde de Lie banachique les notions de dérivée de Lie L_s^ρ relativement à une section s de E (cette notion généralisant la notion de dérivée de Lie L_X le long d'un champ de vecteurs, section du fibré tangent TM) et de différentielle extérieure d_ρ (cf. [Ana]).
Pour toute section s du fibré vectoriel E, il existe un unique endomorphisme gradué de degré 0 de l'algèbre graduée $\underline{\Lambda E^*}$, appelé dérivée de Lie relativement à s et noté L_s^ρ vérifiant les propriétés :

1. pour toute fonction $f \in \underline{\Lambda^0 E^*} = \mathcal{F}$

$$L_s^\rho(f) = L_{\underline{\rho}\circ s}(f) = i_{\underline{\rho}\circ s}(df)$$

   où L_X désigne la dérivée de Lie classique par rapport au champ de vecteurs X

2. pour tout q–forme $\omega \in \underline{\Lambda^q E^*}$ (où $q > 0$)

$$\begin{aligned}\left(L_s^\rho \omega\right)(s_1,\ldots,s_q) &= L_s^\sigma \left(\omega\left(s_1,\ldots,s_q\right)\right)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{q} \omega\left(s_1,\ldots,s_{i-1},\left[s,s_i\right]_E, s_{i+1},\ldots,s_q\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on définit aussi pour toute fonction $f \in \underline{\Lambda^0 E^*} = \mathcal{F}$ l'élément de $\underline{\Lambda^1 E^*}$, noté $d_\rho f$, par

$$d_\rho f = \underline{t_\rho} \circ df \tag{1}$$

où $t_\rho : T^*M \to E^*$ est la transposée de l'ancre.
Il existe un unique endomorphisme gradué de degré 1 de l'algèbre graduée $\underline{\Lambda E^*}$ appelé dérivation extérieure, noté d_ρ, vérifiant les propriétés :

1. pour toute fonction $f \in \underline{\Lambda^0 E^*} = \mathcal{F}$, $d_\rho f$ est l'élément de $\underline{\Lambda^1 E^*}$ défini à la relation (1).
2. pour tout élément ω de $\underline{\Lambda^q E^*}$ ($q > 0$), $d_\rho \omega$ est l'unique élément de $\underline{\Lambda^{q+1} E^*}$ tel que pour tous $s_0,\ldots,s_q \in \underline{E}$,

$$\begin{aligned}\left(d_\rho \omega\right)(s_0,\ldots,s_q) &= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i L_{s_i}^\rho \left(\omega\left(s_0,\ldots,\widehat{s_i},\ldots,s_q\right)\right)\\ &\quad + \sum_{0\le i<j\le q} (-1)^{i+j} \left(\omega\left(\left[s_i,s_j\right]_E, s_0,\ldots,\widehat{s_i},\ldots,\widehat{s_j},\ldots,s_q\right)\right)\end{aligned}$$

On a alors la propriété

$$d_\rho \circ d_\rho = 0$$

4.3 Morphismes d'algébroïdes

Définition 9 *Un morphisme de fibrés vectoriels $\psi : E \to E'$ au dessus de $f : M \to M'$ est un morphisme des algébroïdes de Lie banachiques (E,π,M,ρ) et (E',π',M',ρ') si l'application $\psi^* : \underline{\Lambda^q E'^*} \to \underline{\Lambda^q E^*}$ définie par*

$$\left(\psi^* \alpha'\right)_x (s_1,\ldots,s_q) = \alpha'_{f(x)} \left(\psi \circ s_1,\ldots,\psi \circ s_q\right)$$

commute avec les différentielles :

$$d_\rho \circ \psi^* = \psi \circ d_{\rho'}$$

4.4 Courbes admissibles

Dans le cadre de la Mécanique, un élément a de E peut être vu comme un vecteur vitesse généralisé, la vitesse naturelle v étant obtenue par application de l'ancre ρ à a, i.e. $v = \rho(a)$.
Une courbe $\gamma : [0,1] \to E$ est dite *admissible* (cf. [CLMM]) si $\dot{m}(t) = \rho(\gamma(t))$ où $t \mapsto m(t) = \pi(\gamma(t))$ est la courbe sur la base M.
Un morphisme d'algébroïdes de Lie applique alors les courbes admissibles sur les courbes admissibles.

4.5 Semi-gerbes

Soit (E, π, M, ρ) un algébroïde de Lie banachique et soit $T\pi : TE \to TM$ l'application tangente de π. On notera $\tau_E : TE \to E$ le fibré tangent de E.
La notion de *semi-gerbe* que l'on donne ici est une généralisation de celle utilisée lorsque $E = TM$.

DÉFINITION 10 *Une section $S : E \to TE$ es appelée une semi-gerbe si*

1. $\tau_E \circ S = \mathrm{Id}_E$
2. $T\pi \circ S = \rho$

Nous avons alors le lien suivant entre courbes admissibles et semi-gerbes (cf. [Ana])

PROPOSITION 11 *Un champ de vecteurs sur E est une semi-gerbe si et seulement si ses courbes intégrables sont des courbes admissibles.*

5 Limite projective forte d'algébroïdes de Lie banachiques

Un *système projectif fort d'algébroïdes de Lie banachiques* est la donnée d'une suite $(E_i, \pi_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où

– $\left(\left(E_i, f_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système projectif fort de fibrés vectoriels banachiques $(\pi_i : E_i \to M_i)$ au-dessus du système projectif fort de varié tés $\left(\left(M_i, \delta_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$

– Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$, on a

$$\rho_i \circ f_i^j = T\delta_i^j \circ \rho_j$$

– $f_i^j : E_j \to E_i$ est un morphisme d'algébroïdes de Lie $(E_j, \pi_j, M_j, \rho_j)$ et $(E_i, \pi_i, M_i, \rho_i)$

Théorème 12 *Soit $(E_i, \pi_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif fort d'algébroïdes de Lie banachiques.*
Alors $\left(\underleftarrow{\lim} E_i, \underleftarrow{\lim}\pi_i, \underleftarrow{\lim} M_i, \underleftarrow{\lim}\rho_i\right)$ a une structure d'algébroïde de Lie fréchétique.

Preuve.— Remarquons tout d'abord que la limite projective $\underleftarrow{\lim} M_i$ est munie d'une structure différentiable comme définie en 2.2.1.
$\left(\lim E_i, \underleftarrow{\lim}\pi_i, \underleftarrow{\lim} M\right)_i$ est un fibré vectoriel fréchetique de groupe structural $H^0(\mathbb{E})$ (cf. Proposition 3). La limite projective des fibrés (vetoriels) tangents $\left(\underleftarrow{\lim} TM_i, \underleftarrow{\lim} p_i, \underleftarrow{\lim} M_i\right)$ est munie d'une structure de fibré vectoriel fréchetique ; on obtient alors le résultat de [Gal3], Theorem 2.1.

Etudions maintenant les propriétés des sections des fibrés vectoriels $\underleftarrow{\lim} TM_i$, $\underleftarrow{\lim} E_i$ et la limite projective des ancresρ_i.
Pour $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que $g_j = g_i \circ \delta_i^j = \left(\delta_i^j\right)^* (g_i)$ on peut définir la limite projective $g = \underleftarrow{\lim} g_i$ qui est encore de classe C^∞.
Remarquons tout d'abord que si $X_i = T\delta_i^j(X_j)$, nous avons $X_i(g_i) = \left(T\delta_i^j(X_j)\right)(g_i) = X_j\left(g_i \circ \delta_i^j\right) = X_j(g_j)$. On définit alors $X = \underleftarrow{\lim} X_i \in \underleftarrow{\lim}\mathfrak{X}(M_i)$ et on obtient $Xg = \underleftarrow{\lim} X_i g_i$ où $X_i g_i \in \mathcal{F}_i$.
Si les suites $\left(X_i^1\right)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\left(X_i^2\right)_{i\in\mathbb{N}}$ où $X_i^1, X_i^2 \in \mathfrak{X}(M_i)$ sont telles que $X_i^1 = T\delta_i^j\left(X_j^1\right)$ (resp. $X_i^2 = T\delta_i^j\left(X_j^2\right)$), elles donnenet naissance à des éléments $X^1, X^2 \in \underleftarrow{\lim}\mathfrak{X}(M_i)$.
Puisque X_i^1 et X_j^1 sont δ_i^j-reliés (ainsi que X_i^2 et X_j^2), leurs crochets δ_i^j- le sont aussi,
i.e. $\left[X_i^1, X_i^2\right]_i = T\delta_i^j\left(\left[X_j^1, X_j^2\right]_j\right)$ et l'on obtient le crochet de X^1 et X^2 comme limite projective de ces crochets.

Soit $s = \underleftarrow{\lim} s_i$ où $s_i \in \underline{E_i}$. Puisque les espaces $\underleftarrow{\lim} M_i$ et $\underleftarrow{\lim} E_i$ sont des variétés différentiables, la section $s : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (s_0(x_0), s_1(x_1), \dots)$ est de classe C^∞ (cf. definition 2.2.3).

Prouvons maintenant que l'on peut déduire la condition de compatibilité

$$f_i^j \circ \left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j} = \left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} \circ \delta_i^j$$

de la structure de morphisme de f_i^j (commutativité avec les différentielles appliquée aux $1-$formes)
Nous avons $\left(\left(f_i^j\right)^* (d_{E_i}\alpha_i)\right)\left(s_j^1, s_j^2\right) = (d_{E_i}\alpha_i)\left(f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_j^2\right)$ où

$$\begin{aligned}
&(d_{E_i}\alpha_i)\left(f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_j^2\right) \\
&= L_{\rho_i \circ \left(f_i^j \circ s_j^1\right)}\left(\alpha_i\left(f_i^j \circ s_j^2\right)\right) - L_{\rho_i \circ \left(f_i^j \circ s_j^2\right)}\left(\alpha_i\left(f_i^j \circ s_j^1\right)\right) - \alpha_i\left[f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_j^2\right]_{E_i} \\
&= L_{\rho_i \circ s_i^1}\left(\alpha_i\left(s_i^2\right)\right) - L_{\rho_i \circ s_i^2}\left(\alpha_i\left(s_i^1\right)\right) - \alpha_i\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} \\
&= X_i^1\left(\alpha_i\left(s_i^2\right)\right) - X_i^2\left(\alpha_i\left(s_i^1\right)\right) - \alpha_i\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}
\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left(d_{E_j}\left(\left(f_i^j\right)^* \alpha_i\right)\right)\left(s_j^1, s_j^2\right) \\
&= L_{\rho_j \circ s_j^1}\left(\left(\left(f_i^j\right)^* \alpha_i\right)\left(s_j^2\right)\right) - L_{\rho_j \circ s_j^2}\left(\left(\left(f_i^j\right)^* \alpha_i\right)\left(s_j^1\right)\right) - \left(\left(f_i^j\right)^* \alpha_i\right)\left[s_j^1, s_j^2\right]_{E_j} \\
&= X_j^1\left(\alpha_i\left(f_i^j \circ s_j^2\right)\right) - X_j^2\left(\alpha_i\left(f_i^j \circ s_i^1\right)\right) - \alpha_i\left[f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_i^2\right]_{E_i} \\
&= X_i^1\left(\alpha_i\left(s_i^2\right)\right) - X_i^2\left(\alpha_i\left(s_i^1\right)\right) - \alpha_i\left[f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_i^2\right]_{E_i}
\end{aligned}$$

Puisque f_i^j est un morphisme, on obtient $\alpha_i\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} = \alpha_i\left[f_i^j \circ s_j^1, f_i^j \circ s_i^2\right]_{E_i}$ et la condition de compatibilité.
Ainsi le crochet $\left[s^1, s^2\right]_{\varprojlim E_i}$ des limites projectives de sections $s^1 = \varprojlim s_i^1$ et $s^2 = \varprojlim s_i^2$ peut-être défini comme limite projective des sections $\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i}$ de E_i.
L'ensemble $\varprojlim E_i$ muni de ce crochet a alors une structure d'algèdre de Lie.
Eu égard aux conditions $\rho_i \circ f_i^j = T\delta_i^j \circ \rho_j$ la limite projective $\rho = \varprojlim \rho_i$ est un morphisme de fibrés.
L'application $\rho = \varprojlim \rho_i$ est alors un morphisme d'algèbres de Lie entre $\left(\underline{\varprojlim E_i}, [.,.]_{\varprojlim E_i}\right)$ et $\left(\underline{\varprojlim TM_i}, [.,.]_i\right)$.
Pour tous $i \in \mathbb{N}$, chaque section s_i^1 et s_i^2 of E_i et chaque fonction de classe C^∞ $g_i : M_i \to \mathbb{R}$, on a

$$\left[s_i^1, g_i s_i^2\right]_{E_i} = g_i\left[s_i^1, s_i^2\right]_{E_i} + \left(\rho_i\left(s_i^1\right)\right)(g_i)\ \ s_i^2$$

Afin d'obtenir la relation :

$$[s_1, g s_2]_E = g[s_1, s_2]_E + (\rho(s_1))(g)\ \ s_2$$

nous devons prouver que :
1) $f_i^j \circ \left(g_j \left[s_j^1, s_j^2 \right] \right) = g_i \left[s_i^1, s_i^2 \right] \circ \delta_i^j$
2) $f_i^j \circ \left[\left(\rho_j \left(s_j^1 \right) \right) (g_j) \ \ s_j^2 \right] = \left[\left(\rho_i \left(s_i^1 \right) \right) (g_i) \ \ s_i^2 \right] \circ \delta_i^j$
En ce qui concerne le premier point, pour chaque fil $(x_i)_{i \in N}$, i.e. $x_j = \delta_i^j (x_j)$, nous avons

$$f_i^j \circ \left(g_j \left[s_j^1, s_j^2 \right]_{E_j} \right) (x_j) = f_i^j \left(\left(g_i \circ \delta_i^j \times \left[s_j^1, s_j^2 \right]_{E_j} \right) (x_j) \right)$$

Puisque f_i^j est une application linéaire de $\pi_j^{-1} (x_j)$ vers $\pi_i^{-1} (x_i)$, cette expression est égale à $g_i (x_i) \times f_i^j \left(\left[s_j^1, s_j^2 \right]_{E_j} (x_j) \right)$. Grâce à la condition de compatibilité $f_i^j \circ \left[s_j^1, s_j^2 \right]_{E_j} = \left[s_i^1, s_i^2 \right]_{E_i} \circ \delta_i^j$ nous avons établi le premier point.
Pour ce qui est du second point, nous utilisons tout d'abord la commutativité avec les différentielles d_{E_i} and d_{E_j}.

$$\left[\left(f_i^j \right)^* (d_{E_i} g_i) \right] (s_j) (x_j) = \left[d_{E_j} \left(\left(\delta_i^j \right)^* (g_i) \right) \right] (s_j) (x_j)$$

et ainsi

$$(d_{E_i} g_i) \left(f_i^j \circ s_j \right) (x_j) = \left[d_{E_j} (g_j) \right] (s_j) (x_j)$$

En utilisant la définition d_{E_i}, i.e. $d_{E_i} g_i = t_{\rho_i} \circ d g_i$ on obtient

$$d g_i \left[\rho_i \left(f_i^j (s_j (x_j)) \right) \right] = d g_j (\rho_j (s_j (x_j)))$$

et donc

$$\left[\rho_i \left(f_i^j \circ s_j \right) \right] (g_i) (x_i) = \left[\rho_j \circ s_j \right] (g_j) (x_j)$$

Grâce à la condition de compatibilité, nous obtenons

$$\left[f_i^j \circ (\rho_j \circ s_j) \right] (g_i) = \left[\rho_j (s_j) \right] \left(\left(\delta_i^j \right)^* \circ g_i \right)$$

Le second point en découle facilement. Q.E.D.

6 Exemples

6.1 Algébroïdes de Nijenhuis Lie

Soit $\left(\left(M_i, \delta_i^j\right)_{j \geq i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ un système projectif fort de variétés banachiques. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, considérons un tenseur de Nijenhuis $N_i : TM_i \to TM_i$ (cf. exemple 5). Dans ce cas, considérons $f_i^j = T\delta_i^j$ morphisme de TM_j dans TM_i. Si nous avons la condition de compatibilité

$$N_i \circ T\delta_i^j = T\delta_i^j \circ N_j$$

$\left(\varprojlim TM_i, \varprojlim \pi_i, \varprojlim M_i, \varprojlim N_i\right)$ est un algébroïde de Lie fréchetique Lie puisque nous avons en particulier

$$\left(\delta_i^j\right)^* \circ d_{TM_i} = d_{TM_j} \circ \left(\delta_i^j\right)^*.$$

A titre d'exemple, on peut considrer le case de l'oscillateur harmonique de dimension infinie qui est un système hamiltonien $L-$integrable au sens de [Liu]. On considère la limite projective $\left(\left(\mathbb{R}^{2i}, \delta_i^j\right)_{j \geq i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ où δ_i^j est la projection canonique de $\mathbb{R}^{2j}$ sur $\mathbb{R}^{2i}$. Le tenseur de Nijenhuis N_i qui correspond à l'opérateur de récursion peut être écrit comme suit :

$$N_i = \sum_{k=1}^{i} \left(x_k^2 + y_k^2\right) \left(dx_k \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} + dy_k \otimes \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$$

où $((x_1, y_1), \ldots, (x_i, y_i))$ sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^{2i}$. Il est alors facile d'établir la condition de compatibilité.

6.2 Distributions

Une distribution sur une variété banachique B est une application C^∞ $D : B \to TB$ telle que pour tout $x \in B, D_x$ est un sous espace vectoriel T_xB. Cette distribution est involutive si pour tous champs de vecteurs X et Y tangents à D, le crochet $[X, Y]$ est encore tangent à D.
On peut remarquer que la distribution image de l'ancre d'un algébroïde de Lie est une distribution involutive.

Soit $\left(\left(M_i, \delta_i^j\right)_{j\geq i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif fort de variétés banachiques. Considérons pour tout $i \in \mathbb{N}$, une distribution involutive différentiable E_i au dessus de la variété M_i.
$(E_i, \pi_i, M_i, J_i)_{i\in\mathbb{N}}$, où $J_i : E_i \to TM_i$ est l'injection naturelle et où f_i^j est la restriction de $T\delta_i^j$ à E_i, est un système projectif fort d'algébroïdes de Lie.
La limite projective $\varprojlim E_i$ peut être vue comme une distribution involutive sur le fibré fréchétique $\varprojlim TM_i$.

Considérons maintenant le cas d'une distribution de dimension 1 sur l'ensemble des jets infinis de sections d'un fibré vectoriel $p : F \to N$. Soit X un champ de vecteurs sur F projetable sur N de projection $\hat{X}$; le flot φ_t^X de X est au dessus du flot $\varphi_t^{\hat{X}}$ de $\hat{X}$ et par prolongement à $J^\infty(F)$ on obtient un groupe local à un paramètre $\phi_t = pr^\infty(\varphi_t^X)$ de transformations sur $J^\infty(F)$ (cf. [And], [Olv]). Le prolongement $pr^\infty(X)$ du champ de vecteurs X est le champ de vecteurs sur $J^\infty(p)$ associé à ce flot. Qui plus est ce flot préserve la distribution de Cartan (idéal de contact) $\mathcal{C}$.
On peut remarquer que $\mathcal{C}$ est une distribution involutive sur la limite projective $\varprojlim TJ^i(p)$ qui apparaît comme limite de distributions non involutives $J^i(p)$ (cf. [Sau]).

Si l'on considère un système d'EDP $\mathcal{E}$, i.e. une sous variété du fibré des jets $J^k(\pi)$, on obtient, par prolongement d'ordre infini, une sous variété $i : \mathcal{E} \to J^\infty(\pi)$ de $J^\infty(\pi)$. On a alors une distribution involutive sur $\mathcal{E}$ par restriction de la distribution de Cartan à $\mathcal{E}$ via l'image réciproque par i (cf. [KisVan], [Dri]).

Rappelons qu'une variété différentiable fréchétique munie d'une distribution involutive correspond à la notion de diffiété (eng. diffiety : differential variety) comme introduit par Vinogradov dans ([Vin]). On peut trouver des applications d'une telle situation en mécanique non holonome et en théorie du contrôle non linéaire (cf. par exemple [FLMR]).

7 Limite projective forte de semi-gerbes

Soit $(E_i, \pi_i, M_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système projectif fort d'algébroïdes de Lie.
Considérons une suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $\gamma_i : [0,1] \to E_i$ est une courbe admissible telle que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$

$$f_i^j \circ \gamma_j = \gamma_i$$

Par conséquent $\gamma = \varprojlim \gamma_i$ existe.
Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$ et pour tous $t \in [0,1]$, en faisant appel aux égalités

$$(\pi_i \circ \gamma_i)'(t) = \left(\delta_i^j \circ (\pi_j \circ \gamma_j)\right)'(t) = T\delta_i^j \left((\pi_j \circ \gamma_j)'(t)\right)$$

on obtient :

$$(\pi_i \circ \gamma_i)'(t) - \rho_i(\gamma_i(t)) = T\delta_i^j \left((\pi_j \circ \gamma_j)'(t) - \rho_j(\gamma_j(t))\right)$$

Et ainsi pour tout $t \in [0,1]$, nous avons :

$$(\pi \circ \gamma)'(t) = \rho(\gamma(t))$$

Une telle courbe sera appelée *courbe admissible* dans $E = \varprojlim E_i$.

Considérons maintenant $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $S_i : E_i \to TE_i$ est une semi-gerbe tel que

$$Tf_i^j \circ S_j = S_i \circ f_i^j$$

On peut alors définir $S : (u_0, u_1, \ldots) \mapsto (S_0(u_0), S_1(u_1), \ldots)$ qui est une section C^∞ de $\varprojlim TE_i$.
Il est facile de voir que l'on a $\tau_E \circ S = Id_E$.

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$ et tout $u_i = f_i^j(u_j)$ on a :

$$\begin{aligned}
(T\pi_i \circ s_i - \rho_i)(u_i) &= \left(T\pi_i \circ s_i \circ f_i^j - \rho_i \circ f_i^j\right)(u_j) \\
&= \left(T\pi_i \circ Tf_i^j \circ s_j - \rho_i \circ f_i^j\right)(u_j) \\
&= \left(T\left(\pi_i \circ f_i^j\right) \circ s_j - \rho_i \circ f_i^j\right)(u_j) \\
&= \left(T\left(\delta_i^j \circ \pi_j\right) \circ s_j - \rho_i \circ f_i^j\right)(u_j)
\end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire

$$(T\pi_i \circ s_i - \rho_i)(u_i) = T\delta_i^j (T\pi_j \circ s_j - \rho_j)(u_j)$$

Et ainsi nous obtenons

$$T\pi \circ s = \rho$$

S sera appelée *semi-gerbe*.

On peut définir de manière évidente la notion de *gerbe* sur la limite projective $\varprojlim E_i$ comme limite projective de gerbes..

On termine ce travail par une proposition qui fait apparaître le lien entre semi-gerbes et courbes admissibles. On généralise alors un rsulatat de [Ana] (pour le cas des gerbes, dans le cas particulier $E = TM$, voir [RezMal]).

PROPOSITION 13 *Un champ de vecteurs* $S = \varprojlim S_i$ *on* $E = \varprojlim E_i$ *est une semi-gerbe si et seulement si toutes ses courbes intégrales sont des courbes admissibles.*

Preuve.— La preuve n'est rien d'autre qu'une adaptation de la démonstration du Théorème 2.3 que l'on peut trouver dans l'article [Ana]. Considérons pour ce faire une semi-gerbe $S = \varprojlim S_i$ et supposons que $c : [0,1] \to E$ est une courbe intégrale de S. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i : [0,1] \to E_i$ est une courbe intégrale de S_i (i.e. $\forall t \in [0,1], c_i'(t) = S_i(c_i(t))$) où $f_i^j \circ c_j = c_i$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$T\pi_i \circ c_i'(t) = (T\pi_i \circ S_i)(c_i(t))$$

Puisque $\pi_i \circ c'(t) = \rho_i(c(t))$, c_i est une courbe admissible, il en est de même pour $c = \varprojlim c_i$.
La réciproque est laissée au lecteur. Q.E.D.

Pour un système projectif de gerbes il est facile de prouver, en utilisant la relation $h_i^\lambda \circ f_i^j = f_i^j \circ h_j^\lambda$ et les propriétés des applications tangentes, que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \geq i$ et pour tous $u_i = f_i^j(u_j)$ on a :

$$Tf_i^j\left(s_j \circ h_j^\lambda - \lambda Th_j^\lambda \circ s_j\right)(u_j) = \left(s_i \circ h_i^\lambda - \lambda Th_i^\lambda \circ s_i\right)(u_i)$$

On peut alors écrire $S \circ h_\lambda = \lambda Th_\lambda \circ S$ et S est alors une gerbe sur E.

Références

[AbbMan] M.C. Abbati, A. Manià, *On Differential Structure for Projective Limits of Manifolds*, J. Geom. Phys., 29, n°1-2 (1999), 35–63

[Ana] M. Anastasiei, *Banach Lie algebroids*,math-DG/1003.1263

[AghSur1] M. Aghasi, A. Suri, *Ordinary differential equations*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications **12** n°2 (2007) 1–8

[AghSur2] M. Aghasi, A. Suri, *Splitting theorems for the double tangent bundles of Fréchet manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, **15** n°2 (2010) 1–13

[And] I. Anderson, *Introduction to variationnal bicomplex* Contemp. Math. **132** (1992) 51

[CLMM] J. Cortés, M. de León ; J.C. Marrero, E. Martínez, *Non holonomic Lagrangian systems on Lie algebroids*, math-ph/05120003

[Dri] R. Dridi, *Utilisation de la méthode d'équivalence de Cartan dans la construction d'un solveur d'équations différentielles* Thèse, (Université de Lille) 2007

[FLMR] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *Deux applications à la géométrie locale des diffiétés*, Annales de l'I.H.P. section A,t ome 66, 3 (1997) 275–292

[Gal1] G.N. Galanis, *Projective Limits of Banach-Lie groups*, Periodica Mathematica Hungarica, **32** (1996), 179–191

[Gal2] G.N. Galanis, *Projective Limits of Banach Vector Bundles*, Portugaliae Mathematica, **55**, fasc. 1, (1998) 11–24

[Gal3] G.N. Galanis, *Differential and Geometric Structure for the Tangent Bundle of a Projective Limit Manifold*, Rend. Sem. Univ. Padova, Vol. 112 (2004)

[Ham] R.S. Hamilton, *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 7, Number 1, July 1982, 65–222

[Kar] M. Karasev, *Analogues of the objects of Lie groups for non linear Poisson brackets*, Math. USSR Izvest. 28 (1987), 497–527

[KisVan] A.V. Kiselev and J.W. Van De Leur, *Involutive Distributions of Operator-valued Evolutionnary Vector Fields* math.ph/0703.082

[KriMic1] A. Kriegel, P.W. Michor, *The convenient Setting of Global Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, volume 53, AMS, 1997

[KriMic2] A. Kriegel, P.W. Michor, *Regular infinite dimensional Lie groups*, J. Lie Theory, 7,1 (1997) 61–99

[Lan] S. Lang, *Differential and Riemannian Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 160, Springer, New York, 1995

[Lic] A. Lichnerowicz, *Les variétés de Poissonet leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry, 12 (1977), 253–300

[Liu] C.S.Liu *Infinite-dimensional Hamiltonian-Jacobi theory and L-integrability* math-ph/0905.0720

[MagMor] F. Magri, C. Morosi, *A geometrical characterization of integrable hamintonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds,* Quaderno S 19, Università degli studi di Milano, 1984

[Marl] C.-M. Marle, *Differential calculus on a Lie algebroid and Poisson manifolds*, math.DG/0804.2451

[Mart] E. Martínez, *Reduction in optimal control theory*, Rep. Math. Phys. **53** (2004), 79–90

[NagSul] S. Nag, D. Sullivan, *Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle*, Osaka J. Math. 32 (1995), 1–34

[Olv] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to Differential Equations* (Springer New York, Graduate Texts in Mathematics) **107** 1993

[Omo] H. Omori, *Infinite-dimensional Lie groups*, Translations of Mathematical Monographs 158, American Mathematical Society 1997

[Pon] D.I. Ponte, *Grupos y groupoides de Lie y Estructuras de Jacobi*, Tesis, Universidad de la Laguna, 2003

[Pop] L. Popescu, *Poisson structures on Lie Algebroids* (2008)

[Pra] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables ; relations entre propriétés locales et globales*, C.R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 907– 910.

[RezMal] G. Rezaie and R. Malekzadeh, *Sprays on Fréchet Modelled Manifolds*, International Mathematical Forum **5** (2010) 59

[Sau] D.J. Saunders, *The geometry of jet bundles*, Cambridge Univ. Press 1989

[Sch] R. Schmid, *Infinite Dimensional Lie Groups and Application to Mathemathical Physics, Journal of Geometry and Symmetry in Physics* **1**, (2004), 1–67

[Vin] A.M. Vinogradov, *Local symmetries and conservation laws*, Acta Appl. Math. Vol **2** (1984) 21–78

[Weil] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris 1940

[Wein1] A. Weinstein, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987), 101–103

[Wein2] A. Weinstein, *Lagrangian mechanics and groupoids*, Fields Inst. Commun. 7 (1996), 207–231