
UNE NOUVELLE CARACTÉRISATION DES VARIÉTÉS DE VERONESE

par

Jean-Marie Trépreau

Résumé. — Soit X un germe de variété complexe lisse en $x \in \mathbb{P}^N$, à osculation q -régulière et tel que, pour toute direction $v \in \mathbb{P}T_x X$, il existe une courbe rationnelle normale de degré q tangente en x à v et localement contenue dans X . On montre que X est une variété de Veronese d'ordre q . On retrouve en particulier une caractérisation des variétés de Veronese, due à Bompiani [1], dont on commente les résultats.

1. Introduction

1.1. Énoncés. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Une sous-variété X de dimension n d'un espace projectif est une *variété de Veronese* d'ordre q si, dans l'espace projectif qu'elle engendre, X est l'image de \mathbb{P}^n par un plongement associé au système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(q)|$.

L'image d'une droite de \mathbb{P}^n par ce plongement est une variété de Veronese de dimension 1 et d'ordre q , autrement dit une *courbe rationnelle normale* de degré q . Pour toute paire de points distincts d'une variété de Veronese X d'ordre q , il existe donc une courbe rationnelle normale de degré q , contenue dans X et qui passe par ces points. D'autre part, la variété X engendre un espace de dimension $N = \binom{n+q}{n} - 1$, la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré q en $n + 1$ variables.

L'espace osculateur $X_x(q)$ à l'ordre q à un germe de variété lisse $X \subset \mathbb{P}^N$ en $x \in X$ est le sous-espace projectif de \mathbb{P}^N , passant par x et de direction l'espace engendré au point x par les dérivées d'ordre $\leq q$ des germes de courbes paramétrées tracées sur X . Nous disons que la *variété X est q -régulière* en x si cet espace est de dimension maximale, c'est-à-dire de dimension $\binom{n+q}{q} - 1$, où n est la dimension de X .

Dans [1], E. Bompiani obtenait une caractérisation géométrico-différentielle des variétés de Veronese qui contient, comme cas particulier, l'énoncé suivant. Nous reviendrons dans la Section 4 sur l'article de Bompiani.

Théorème 1.1. — *Soit X un germe de variété lisse et q -régulière. Si pour toute paire $(x, y) \in X^2$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q localement contenue dans X et passant par x et y , alors X est le germe d'une variété de Veronese d'ordre q .*

Nous obtiendrons, par un calcul formel, le résultat suivant :

Théorème 1.2. — *Soit X un germe de variété lisse et q -régulière en $x \in \mathbb{P}^N$. Si pour tout $v \in \mathbb{P}T_x X$, il existe un germe de courbe rationnelle normale de degré q contenu dans X et tangent à v en x , X est le germe d'une variété de Veronese d'ordre q .*

Remarque 1.3. — La démonstration montre qu'il suffit que l'ensemble des v qui ont la propriété de l'énoncé ne soit pas contenu dans une hypersurface algébrique de $\mathbb{P}T_x X$.

La condition de q -régularité de l'énoncé est nécessaire. On vérifie en effet que la projection d'une variété de Veronese de dimension ≥ 2 depuis un point générique de l'espace qu'elle engendre vérifie l'hypothèse principale de l'énoncé et n'est pas q -régulière.

On peut, dans la caractérisation de Bompiani, se donner le point x :

Théorème 1.4. — *Soit X un germe de variété lisse et q -régulière en $x \in \mathbb{P}^N$. Si pour tout $y \in X$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q localement contenue dans X et passant par x et y , X est le germe d'une variété de Veronese d'ordre q .*

1.2. Motivations et un problème ouvert. — Le théorème de Bompiani joue un rôle important dans le problème de l'algébrisation des tissus de rang maximal, sur lequel je travaille depuis plusieurs années avec Luc Pirio, voir Pirio-Trépreau [3].

Nous avons en effet besoin, pour résoudre le problème principal, de résoudre le problème auxiliaire de géométrie projective suivant, où $r \geq 1$, $n \geq 2$ et $q \geq n - 1$ sont des entiers donnés.

Déterminer toutes les variétés projectives X de dimension $r + 1$ telles que :

- 1) *pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, il existe une courbe rationnelle normale de degré q contenue dans X et passant par x_1, \dots, x_n ;*
- 2) *X engendre un espace projectif dont la dimension est la plus grande possible, pour r, n et q donnés, compte tenu de la propriété précédente.*

Le problème est résolu si $q \neq 2n - 3$, dans Pirio-Trépreau [2]. Si $n = 2$ le résultat n'est autre que la caractérisation par Bompiani des variétés de Veronese.

Parce que, dans l'article de Bompiani, je n'ai pas trouvé convaincantes les quelques lignes consacrées à la démonstration du Théorème 1.1, dans le doute, j'en ai cherché une qui me satisfasse. J'ai tenté d'en trouver une démonstration formelle et j'ai obtenu le Théorème 1.2. C'est cette démonstration, élémentaire et un peu laborieuse, qui est présentée ici.

Le Théorème 1.2 est bien sûr plus fort que l'énoncé de Bompiani mais celui-ci est suffisant dans [2],[3]. Des généralisations d'une autre nature auraient des conséquences intéressantes pour étendre certains des résultats de [3] à des tissus qui ne sont pas de rang maximal. Considérons à nouveau une variété projective X de dimension n , telle que pour toute paire générique (x, y) de points de X , il existe une courbe rationnelle normale de degré q contenue dans X et qui passe par les points x, y . Elle engendre un espace de dimension au plus $N = \binom{n+q}{q} - 1$ et, si elle engendre un espace de dimension N , c'est une variété de Veronese d'ordre q . La question suivante semble ouverte et n'est pas gratuite.

Quelle est la valeur minimale de l'entier $M_{n,q}$ qui assure qu'on ait : si X engendre un espace de dimension $\geq M_{n,q}$, alors X est une projection d'une variété de Veronese d'ordre q ?

1.3. Plan de l'article. — L'essentiel consiste en un calcul formel. Dans la Section 2, nous énonçons le résultat de ce calcul, le Lemme 2.2, dont nous déduisons le Théorème 1.2 et une généralisation, le Théorème 2.4, voir aussi la Remarque 2.5. Le Théorème 1.4 est un corollaire géométrique du Théorème 1.2. Le calcul formel est une récurrence qui fait l'objet de la Section 3. Enfin, dans la Section 4, nous faisons quelques commentaires sur l'article de Bompiani.

Remerciements. — L'auteur remercie Luc Pirio, qui a découvert l'existence de l'article de Bompiani et compris l'importance du Théorème 1.1 pour l'étude du problème qui nous occupait.

2. Un lemme et ses conséquences

2.1. Notations. — On travaillera près de 0 dans \mathbb{C}^N , où $N = \binom{n+q}{q} - 1$. On note t le point général de \mathbb{C} et $s = (s_1, \dots, s_n)$ le point général de \mathbb{C}^n . Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ la longueur de α et $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$.

On indexe les composantes de $x \in \mathbb{C}^N$ par les multiindices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ dont la longueur est comprise entre 1 et q , soit $x = (x_\alpha)_{1 \leq |\alpha| \leq q}$. On dit que x_α est une composante de poids $|\alpha|$ de x .

2.2. La propriété (P). — Les entiers $n \geq 2$ et $q \geq 2$ sont fixés et X est un germe de variété lisse de dimension n en $0 \in \mathbb{C}^N$.

Définition 2.1. — On appelle *courbe distinguée de X* tout germe de courbe lisse en $0 \in \mathbb{C}^N$, contenu dans l'intersection de X et d'un espace de dimension q . On dit que X a la *propriété (P)* si le germe X est q -régulier en 0 et si, pour toute direction $v \in \mathbb{P}T_0X$, il existe une courbe distinguée de X tangente à v .

Dans la Section 3, on démontrera le résultat suivant :

Lemme 2.2. — Si X a la propriété (P), il existe une homographie $\phi \in \text{Aut } \mathbb{P}^N$ avec $\phi(0) = 0$, telle que $\phi(X)$ admette une paramétrisation de la forme suivante :

$$(1) \quad x_\alpha = s^\alpha, \quad |\alpha| = 1; \quad x_\alpha = s^\alpha + g_\alpha(s) \quad \text{avec} \quad g_\alpha(s) = O(|s|^{q+3}), \quad 2 \leq |\alpha| \leq q.$$

Les courbes distinguées de X sont alors les images des germes de droite en $0 \in \mathbb{C}^n$ par la paramétrisation.

2.3. Démonstration du Théorème 1.2. — Montrons d'abord le lemme suivant, dans l'esprit, formel, de cet article :

Lemme 2.3. — Si le germe en $0 \in \mathbb{C}^q$ d'une courbe rationnelle normale de degré q est donné par

$$x_j = x_1^j + g_j(x_1) \quad \text{avec} \quad g_j(x_1) = O(x_1^{q+3}), \quad j = 2, \dots, q,$$

alors $g_j(x_1) \equiv 0$ pour $j = 2, \dots, q$.

Démonstration. — Le cas $q = 1$ est trivial. On suppose $q \geq 2$. Par définition d'une courbe rationnelle normale, le germe admet une paramétrisation

$$x_j(t) = X_j(t)/X_0(t), \quad j = 1, \dots, q,$$

où $X_0(t), \dots, X_q(t)$ sont des polynômes de degré $\leq q$. Un changement affine de paramètre t permet de supposer $X_0(t) = 1 + O(t)$ et $X_1(t) = t + O(t^2)$.

Montrons par récurrence sur $r \geq 1$ qu'on a

$$(2) \quad X_j(t) = t^j + O(t^{j+r}), \quad j = 0, \dots, q.$$

C'est vrai si $r = 1$ compte tenu de la normalisation précédente. Puisque les $X_j(t)$ sont de degrés $\leq q$, il s'agit de montrer que c'est vrai pour $r = q + 1$. Par hypothèse :

$$X_j(t)X_0(t)^{j-1} = X_1(t)^j + O(t^{q+3})$$

pour $2 \leq j \leq q$. On se donne $r \in \{1, \dots, q\}$, on suppose (2) vérifié et on écrit

$$X_j(t) = t^j + a_j t^{j+r} + O(t^{j+r+1}), \quad j = 0, \dots, q.$$

Pour $j + r \leq q + 2$, on développe la relation précédente à l'ordre $j + r$:

$$(t^j + a_j t^{j+r})(1 + a_0 t^r)^{j-1} = (t + a_1 t^{r+1})^j + O(t^{j+r+1}), \quad j \geq 2, \quad j + r \leq q + 2.$$

On obtient (le premier groupe d'équations parce que $X_j(t)$ est de degré $\leq q$) :

$$\begin{aligned} a_j &= 0, & j \geq 1, \quad j + r \geq q + 1 \\ a_j + (j-1)a_0 &= j a_1, & j \geq 2, \quad j + r \leq q + 2. \end{aligned}$$

Si $r \leq q - 1$, on peut choisir j tel que $j + r = q + 1$ puis tel que $j + r = q + 2$ dans le deuxième groupe d'équations, ce qui donne $a_0 = a_1 = 0$. Si $r = q$, en choisissant $j = 1$ dans le premier groupe puis $j = 2$ dans le second, on obtient encore $a_0 = a_1 = 0$.

Dans tous les cas, on a $a_0 = a_1 = 0$ et les équations donnent $a_j = 0$ pour tout j . On obtient que (2) est vrai à l'ordre $r + 1$. Par récurrence, le lemme est démontré. \square

Soit maintenant X un germe de variété lisse et q -régulière en $0 \in \mathbb{C}^N$ tel que pour tout $v \in \mathbb{P}T_x X$, il existe un germe de courbe rationnelle normale de degré q contenu dans X et tangent à v en x . On peut supposer X donné sous la forme réduite du Lemme 2.2. Pour $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, la courbe distinguée

$$\xi_\alpha(t) = \sigma^\alpha t \text{ si } |\alpha| = 1, \quad \xi_\alpha(t) := \sigma^\alpha t^{|\alpha|} + g_\alpha(\sigma t) = \sigma^\alpha t^{|\alpha|} + O(t^{q+3}), \quad 2 \leq |\alpha| \leq q,$$

est rationnelle normale de degré q . Pour α donné, en appliquant le lemme précédent aux q composantes $\xi_\alpha(t)$ et $\xi_{(k,0,\dots,0)}(t)$ avec $k \in \{1, \dots, q\} \setminus \{|\alpha|\}$, on obtient $g_\alpha(\sigma t) \equiv 0$. Ainsi X est donné par $x_\alpha = s^\alpha$ pour $|\alpha| = 1, \dots, q$. C'est la variété de Veronese de dimension n et d'ordre q standard. Le Théorème 1.2 est démontré.

2.4. Germes qui ont la propriété (P). — On a le résultat suivant :

Théorème 2.4. — *Un germe de variété lisse en $0 \in \mathbb{C}^N$ a la propriété (P), voir la Définition 2.1, si et seulement si il est équivalent modulo $\text{Aut } \mathbb{P}^N$ à un germe en 0 défini par une paramétrisation de la forme, avec $R_k(0) = 0$ pour $k = 1, \dots, q$:*

$$x_\alpha = s^\alpha + s^\alpha R_{|\alpha|}(s), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q.$$

On peut imposer qu'on ait $R_1(s) \equiv 0$ et $s^\alpha R_{|\alpha|}(s) = O(|s|^{q+3})$ pour $|\alpha| \geq 2$.

Démonstration. — Supposons d'abord le germe X paramétré par

$$x_\alpha = s^\alpha + s^\alpha R_{|\alpha|}(s), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q,$$

avec $R_k(0) = 0$ pour $k = 1, \dots, q$. Il est q -régulier en $0 \in \mathbb{C}^N$. Pour $\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ fixé, l'image $\xi(t)$ du germe de droite d'équation $s = \sigma t$ est donnée par

$$\xi_\alpha(t) = \sigma^\alpha t^{|\alpha|} + \sigma^\alpha t^{|\alpha|} R_{|\alpha|}(\sigma t) = \sigma^\alpha S_{|\alpha|}(t), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q,$$

où $S_{|\alpha|}(t)$ ne dépend que de la longueur de α . Il en résulte que les composantes $\xi_\alpha^{(\mu)}(0)$ d'une dérivée $\xi^{(\mu)}(0)$ d'ordre μ fixé sont de la forme $\xi_\alpha^{(\mu)}(0) = c_{|\alpha|} \sigma^\alpha$.

Pour $\mu \geq 1$ fixé, on peut écrire $\xi^{(\mu)}(0) = \sum_{k=1}^q c_k v_k$, où v_k a pour composantes $v_{k,\alpha} = \delta_{k|\alpha|} \sigma^\alpha$. La courbe paramétrée $\xi(t)$ engendre donc un espace de dimension q . Le germe X a la propriété (P).

Réciproquement, si le germe X a la propriété (P), le Lemme 2.2 permet de supposer qu'il est paramétré par

$$x_\alpha = s^\alpha + \sum_{\mu=q+3}^{+\infty} Q_{\mu,\alpha}(s), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q,$$

où les polynômes $Q_{\mu,\alpha}(s)$ sont homogènes de degré μ et $Q_{\mu,\alpha}(s) \equiv 0$ si $|\alpha| = 1$, et que les courbes distinguées sont données par

$$\xi_\alpha(t) = \sigma^\alpha t^{|\alpha|} + \sum_{\mu=q+3}^{+\infty} Q_{\mu,\alpha}(\sigma) t^\mu, \quad 1 \leq |\alpha| \leq q.$$

Par hypothèse, pour tout $\mu \geq 1$, le vecteur $\xi^{(\mu)}(0)$ appartient à l'espace de dimension q engendré par $\xi'(0), \xi^{(2)}(0), \dots, \xi^{(q)}(0)$.

On en déduit l'existence de fonctions $R_{\mu,k}(s)$ telles que

$$Q_{\mu,\alpha}(s) = s^\alpha R_{\mu,|\alpha|}(s), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q.$$

Pour $|\alpha| = k$ fixé, on obtient en particulier $Q_{\mu,(k,0,0,\dots,0)}(s) s_2^k = Q_{\mu,(0,k,0,\dots,0)}(s) s_1^k$. On en déduit que $Q_{\mu,(k,0,\dots,0)}(s)$ est divisible par s_1^k : $R_{\mu,k}(s)$ est un polynôme. Le lemme est démontré. \square

Remarque 2.5. — Le résultat précédent implique en particulier que le germe X est contenu dans « beaucoup » d'hypersurfaces algébriques de \mathbb{P}^N , qu'on obtient en imposant $R_1(s) \equiv 0$, ce qu'on peut faire (alors les paramètres s_1, \dots, s_n s'identifient aux coordonnées x_α avec $|\alpha| = 1$), et en éliminant les fonctions $R_k(s)$, $k = 2, \dots, q$ dans les équations paramétriques du germe X . Ceci suggère que, dans le Théorème 1.1 de Bompiani, on pourrait remplacer les courbes *rationnelles normales de degré q* par des courbes, peut-être algébriques, *lisses et engendrant des espaces de dimension $\leq q$* . Nous n'avons pas réussi à démontrer que c'était le cas.

2.5. Démonstration du Théorème 1.4. — Soit X un germe de variété lisse en $0 \in \mathbb{P}^N$, vérifiant les hypothèses du Théorème 1.4. Il s'agit de montrer qu'il vérifie celles du Théorème 1.2. La démonstration est standard. On se contente ici d'en esquisser une en renvoyant à [2], [3], où certains arguments sont développés dans un cadre plus général.

Soit $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$ la variété de Chow des 1-cycles rationnels connexes de degré q de \mathbb{P}^N , $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ l'ouvert de $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$ des courbes rationnelles normales de degré q et $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N, 0)$ l'ensemble des éléments de $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$ qui passent par 0.

Soit Σ l'ensemble des courbes $C \in \text{CRN}_q(\mathbb{P}^N, 0)$ dont le germe en 0 est contenu dans X . On montre facilement, voir [3], que Σ est analytique (mais non nécessairement fermée). Si $C_\nu \in \Sigma$ est une suite qui converge vers C dans $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$, il existe une composante irréductible de C qui passe par 0, dont le germe en 0 est contenu dans X . Elle est nécessairement q -régulière, voir [2], donc de degré $\geq q$. Il en résulte que C est irréductible et appartient à $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N)$. L'ensemble Σ est donc fermé. C'est un sous-ensemble algébrique de $\text{CR}_q(\mathbb{P}^N)$, contenu dans $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N, 0)$.

Soit Σ' une composante irréductible de Σ , $I' = \{(C, x), C \in \Sigma', x \in C\}$ la variété d'incidence et $p : I' \rightarrow \mathbb{P}^N$ la projection canonique. Par hypothèse on peut choisir Σ' tel que $X' = p(I')$ contient un germe de dimension n . La projection p est donc de rang $\geq n$ au point générique de I' .

Si $C_0 \in \Sigma'$, il existe un voisinage U de C_0 dans $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N, 0)$ et une application analytique $f : U \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N$ telle que $\tau \mapsto f(C, \tau)$ est un isomorphisme de \mathbb{P}^1 sur C et $f(C, 0) = 0$. Soit \tilde{f} la restriction de f à $(\Sigma' \cap U) \times \mathbb{P}^1$. Si $C \in \Sigma' \cap U$, par hypothèse, \tilde{f} prend ses valeurs dans X au voisinage de $(C, 0)$. Ainsi le rang de \tilde{f} est $\leq n$. Il est donc égal à n au point générique de ce voisinage. On en déduit que la variété algébrique X' est de dimension n et contient le germe X .

Finalement, soit $v \in \mathbb{P}T_0X$ et $x_\nu \in X \setminus \{0\}$ une suite de points qui tend vers 0 dans la direction v . Il existe une suite $C_\nu \in \Sigma'$ telle que $x_\nu \in C_\nu$. Quitte à extraire une sous-suite de (x_ν) , on peut supposer que C_ν converge dans $\text{CRN}_q(\mathbb{P}^N, 0)$ vers une courbe $C_0 \in \Sigma'$. En utilisant une paramétrisation f comme ci-dessus, on vérifie que la courbe C_0 est tangente à la direction v en 0. Le germe X vérifie les hypothèses du Théorème 1.2.

3. Une récurrence

3.1. Forme réduite à l'ordre r . — Les notations générales sont celles du §2.1. On se donne un germe X de variété lisse de dimension n en $0 \in \mathbb{C}^n$. Dans la définition suivante, l'espace tangent T_0X est identifié à \mathbb{C}^n .

Définition 3.1. — Soit $r \in \{1, \dots, q+2\}$. Le germe X est paramétré sous *forme réduite à l'ordre r* s'il est donné par des équations de la forme

$$\begin{aligned} x_\alpha &= s^\alpha + g_\alpha(s) = s^\alpha + O(|s|^{q+1}), & |\alpha| + r &\leq q + 1, \\ x_\alpha &= s^\alpha + g_\alpha(s) = s^\alpha + O(|s|^{q+2}), & |\alpha| + r &= q + 2, \\ x_\alpha &= s^\alpha + g_\alpha(s) = s^\alpha + O(|s|^{q+3}), & |\alpha| + r &\geq q + 3, \end{aligned}$$

bien sûr pour $1 \leq |\alpha| \leq q$, et si toute courbe distinguée tangente à $\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est l'image par la paramétrisation d'un germe de courbe en $0 \in \mathbb{C}^n$ donné par des équations

de la forme

$$s_i := \sigma_i t + u_i(\sigma, t) = \sigma_i t + O(t^{r+1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Il est réduit à l'ordre r s'il admet une telle paramétrisation et réductible à l'ordre r s'il existe $\phi \in \text{Aut } \mathbb{P}^N$ avec $\phi(0) = 0$, tel que $\phi(X)$ soit réduit à l'ordre r .

Dans les calculs qui vont suivre, on fera jouer un rôle de pivot à certaines des composantes x_α de $x \in \mathbb{C}^N$. On introduit quelques abréviations pour les multiindices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ correspondants. Pour $\kappa \in \{1, \dots, q\}$ et $j \in \{2, \dots, n\}$, on note :

$$(3) \quad (\kappa) := (\kappa, 0, \dots, 0),$$

$$(4) \quad (\kappa - 1; j) := (\kappa - 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{où } 1 \text{ est à la } j\text{-ième place.}$$

3.2. La récurrence. — Un germe de variété lisse et q -régulière X en $0 \in \mathbb{C}^N$ admet une paramétrisation de la forme

$$x_\alpha = p_\alpha(s) + O(|s|^{q+1}), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q,$$

où les $p_\alpha(s)$ forment une base de l'espace des polynômes nuls en 0 et de degré $\leq q$. Il existe une transformation linéaire ϕ de \mathbb{C}^N telle que le germe $\phi(X)$ soit donné par

$$x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{q+1}), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q.$$

Autrement dit, X est réductible à l'ordre 1.

Soit $r \in \{1, \dots, q+1\}$ et supposons X paramétré sous forme réduite à l'ordre r . On écrit sous forme précisée les composantes x_α qui ne sont pas *a priori* écrites sous forme réduite à l'ordre $r+1$, ainsi que les équations des courbes distinguées :

$$(5) \quad x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{q+2}), \quad P_\alpha \text{ homogène de degré } q+1, \quad |\alpha| + r = q+1,$$

$$(6) \quad x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{q+3}), \quad P_\alpha \text{ homogène de degré } q+2, \quad |\alpha| + r = q+2,$$

$$(7) \quad s_i = \sigma_i t + a_i(\sigma)t^{r+1} + O(t^{r+2}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Le groupe d'équations (5) est absent si $r = q+1$, le groupe (6) est absent si $r = 1$.

Sans faire l'hypothèse (P), on peut normaliser la paramétrisation :

Lemme 3.2. — *Si X est réductible à l'ordre $r \leq q$, une homographie et un changement de paramétrisation permettent de supposer que, par rapport à s_1 : dans (5) $P_{(|\alpha|)}(s)$ et $P_{(|\alpha|-1; j)}(s)$ sont de degrés $\leq |\alpha| - 2$ et, dans (6) $P_{(|\alpha|)}(s)$ est de degré $\leq |\alpha| - 1$.*

Alors, si le germe a la propriété (P), la paramétrisation est réduite à l'ordre $r+1$:

Lemme 3.3. — *On suppose X paramétré sous forme réduite à l'ordre $r \leq q$ et normalisé comme dans le Lemme 3.2. Si X a la propriété (P), tous les polynômes $P_\alpha(s)$ de (5)–(6) et, après changement de paramètre t toutes les fonctions $a_i(\sigma)$ de (7), sont nuls.*

Enfin :

Lemme 3.4. — *Si X est réduit à l'ordre $q+1$ et a la propriété (P), il admet une paramétrisation de la forme (1). Les courbes distinguées de X sont alors les images par cette paramétrisation des germes de droites en $0 \in \mathbb{C}^n$.*

Le Lemme 2.2 en découle. Si le germe X a la propriété (P), les deux premiers lemmes montrent, par récurrence sur r , qu'il est réductible à l'ordre $q + 1$. Le dernier lemme donne alors le résultat.

Reste à démontrer les trois lemmes précédents.

3.3. Démonstration du Lemme 3.2. — Soit $r \in \{1, \dots, q\}$. On suppose X paramétré sous forme réduite à l'ordre r , la propriété (P) n'intervient pas. La normalisation est obtenue grâce aux transformations suivantes.

1) Une homographie ϕ correspondant à un changement de coordonnées de la forme

$$x_\alpha = x'_\alpha (1 + \widehat{G}(x'))^{-1}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq q, \quad \text{où} \quad \widehat{G}(x') = \sum_{|\beta|=r} c_\beta x'_\beta$$

est une forme linéaire de poids r . On lui associe le polynôme homogène de degré r $G(s) = \sum_{|\beta|=r} c_\beta s^\beta$. L'application $\widehat{G} \mapsto G$ est une bijection de l'espace des formes linéaires de poids r sur l'espace des polynômes homogènes de degré r .

2) Un changement de paramètre de la forme $s_j = s'_j + H_j(s')$, $j = 1, \dots, n$, où les $H_j(s')$ sont des polynômes homogènes de degré $r + 1$;

3) Une transformation linéaire anodine dont l'objet est de mettre à nouveau sous forme réduite les composantes x_α dont le poids $|\alpha|$ vérifie $|\alpha| + r \leq q$.

La paramétrisation initiale de X est de la forme $x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{m_{|\alpha|}})$, où l'entier $m_{|\alpha|} \in \{q + 1, q + 2, q + 3\}$ est au moins égal à $|\alpha| + 1$. Sur l'image $\phi(X)$ de X par une homographie 1), on a

$$x_\alpha (1 + \widehat{G}(x))^{-1} = s^\alpha + O(|s|^{m_{|\alpha|}}), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q,$$

donc en particulier $x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{|\alpha|+1})$ puis $\widehat{G}(x) = G(s) + O(|s|^{r+1})$. On en déduit que la paramétrisation de $\phi(X)$ induite par la paramétrisation initiale est de la forme

$$x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{|\alpha|+r}) + O(|s|^{m_{|\alpha|}}), \quad 1 \leq |\alpha| \leq q.$$

Un changement de variable 2) ne change rien à cette forme ni à celle des équations des courbes distinguées. Ci-dessus, une composante x_α est écrite sous forme réduite à l'ordre r si $|\alpha| + r \geq m_{|\alpha|}$, autrement dit si $|\alpha| + r \geq q + 1$. Toutefois, une transformation linéaire

$$x_\alpha = l_\alpha(x'), \quad |\alpha| + r \leq q, \quad x_\alpha = x'_\alpha, \quad |\alpha| + r \geq q + 1,$$

réduit à nouveau à l'ordre r les composantes x_α dont le poids $|\alpha|$ vérifie $|\alpha| + r \leq q$, sans modifier les composantes dont le poids $|\alpha|$ vérifie $|\alpha| + r \geq q + 1$.

Ces considérations montrent qu'il suffit d'analyser l'influence d'une homographie 1) et d'un changement de paramètre 2) sur les composantes (5)–(6), c'est-à-dire celles dont le poids $|\alpha|$ vérifie $|\alpha| + r \in \{q + 1, q + 2\}$. Par hypothèse,

$$x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{|\alpha|+r+1}), \quad |\alpha| + r \in \{q + 1, q + 2\},$$

où les polynômes $P_\alpha(s)$ sont homogènes de degré $|\alpha| + r$.

Si ϕ est l'homographie 1), les composantes analogues de $x \in \phi(X)$ vérifient les relations $x_\alpha (1 + \widehat{G}(x))^{-1} = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{|\alpha|+r+1})$, donc sont données par

$$x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + s^\alpha G(s) + O(|s|^{|\alpha|+r+1}).$$

Un changement de paramètre 2) les met ensuite sous la forme

$$\begin{aligned} x_\alpha &= s^\alpha + P'_\alpha(s) + O(|s|^{\alpha+r+1}), \\ P'_\alpha(s) &= P_\alpha(s) + s^\alpha G(s) + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j s^\alpha}{s_j} H_j(s), \quad |\alpha| + r \in \{q+1, q+2\}. \end{aligned}$$

Pour $|\alpha| + r = q+1$, on obtient en particulier le système d'équations homogènes :

$$\begin{aligned} P'_{(|\alpha|)}(s) &= P_{(|\alpha|)}(s) + s_1^{|\alpha|} G(s) + |\alpha| s_1^{|\alpha|-1} H_1(s), \\ P'_{(|\alpha|-1;j)}(s) &= P_{(|\alpha|-1;j)}(s) + s_1^{|\alpha|-1} s_j G(s) + (|\alpha|-1) s_1^{|\alpha|-2} s_j H_1(s) + s_1^{|\alpha|-1} H_j(s). \end{aligned}$$

Quel que soit $G(s)$, homogène de degré r , on peut choisir $H_1(s), \dots, H_n(s)$, homogènes de degré $r+1$, tels que $P'_{(|\alpha|)}(s)$ et les $P'_{(|\alpha|-1;j)}(s)$ soient de degrés $\leq |\alpha|-2$ par rapport à s_1 . En particulier, $H_1(s) = -s_1 G(s)/|\alpha| + A(s)$ où $A(s)$ dépend des données. Si $r = 1$, on peut choisir $G(s) \equiv 0$ et la normalisation est terminée. On suppose $r \geq 2$.

Pour $|\alpha| + r = q+2$, on obtient $P'_{(|\alpha|)}(s) = P_{(|\alpha|)}(s) + s_1^{|\alpha|} G(s) + |\alpha| s_1^{|\alpha|-1} H_1(s)$, donc :

$$P'_{(|\alpha|)}(s) = P_{(|\alpha|)}(s) - s_1^{|\alpha|} G(s)/(|\alpha|-1) + B(s),$$

où $B(s)$ dépend des données. On peut choisir (il y a une seule solution) $G(s)$, homogène de degré r , de telle sorte que $P'_{(|\alpha|)}(s)$ soit de degré $\leq |\alpha|-1$ par rapport à s_1 . Ceci achève la normalisation annoncée dans le Lemme 3.2.

3.4. Traduction de la propriété (P). — Soit X un germe de variété lisse q -régulière en $0 \in \mathbb{C}^N$, paramétré sous forme réduite à l'ordre 1 : $x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{q+1})$ pour $1 \leq |\alpha| \leq q$. Il est clair que, si $\xi(t) = (\xi_\alpha(t))_{1 \leq |\alpha| \leq q}$ avec $\xi(0) = 0$ et $\xi'(0) \neq 0$, est un germe de courbe paramétrée contenue dans X , alors $\xi'(0), \dots, \xi^{(q)}(0)$ sont linéairement indépendants. Si ce germe est une courbe distinguée, il est donc contenu dans l'espace engendré par ces dérivées et pour tout $\mu \geq 1$ donné, il existe $c_1, \dots, c_q \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\xi^{(\mu)}(0) = \sum_{k=1}^q c_k \xi^{(k)}(0).$$

On se donne un entier $\kappa \in \{1, \dots, q\}$ et un entier $r \geq 1$. On suppose que les composantes de poids $|\alpha| = \kappa$ sont données par

$$(8) \quad x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{\kappa+r+1}), \quad |\alpha| = \kappa,$$

où les $P_\alpha(s)$ sont homogènes de degré $\kappa+r$, et que les courbes distinguées sont les images par la paramétrisation de germes donnés par des équations de la forme :

$$(9) \quad s_i = \sigma_i t + a_i(\sigma) t^{r+1} + O(t^{r+2}), \quad i = 1, \dots, n.$$

De (8) et (9), on tire les composantes $\xi_\alpha(t)$ de poids $|\alpha| = \kappa$ d'une courbe distinguée :

$$\xi_\alpha(t) = \sigma^\alpha t^\kappa + \left(\sum_{i=1}^n a_i(\sigma) \frac{\alpha_i \sigma^\alpha}{\sigma_i} + P_\alpha(\sigma) \right) t^{\kappa+r} + O(t^{\kappa+r+1}).$$

Si $\kappa + r \geq q+1$, la seule dérivée non nulle $\xi_\alpha^{(k)}(0)$ d'ordre $k \leq q$ est $\xi_\alpha^{(\kappa)}(0) = \kappa! \sigma^\alpha$. De $\xi^{(\kappa+r)}(0) = \sum_{k=1}^q c_k \xi^{(k)}(0)$, on tire la traduction suivante de la condition (P).

Si le germe X est paramétré sous forme réduite à l'ordre 1 et a la propriété (P), si les composantes x_α de poids $|\alpha| = \kappa$ de $x \in X$ sont données par (8) et les courbes distinguées par (9), il existe un scalaire $c(\sigma) = c_{\kappa,r}(\sigma)$ tel que :

$$(10) \quad \kappa + r \geq q + 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i(\sigma) \frac{\alpha_i \sigma^\alpha}{\sigma_i} + P_\alpha(\sigma) = c(\sigma) \sigma^\alpha, \quad |\alpha| = \kappa.$$

3.5. Démonstration du Lemme 3.4. — On suppose que X est paramétré sous forme réduite à l'ordre $q + 1$:

$$x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{q+2}), \quad |\alpha| = 1, \quad x_\alpha = s^\alpha + O(|s|^{q+3}), \quad 2 \leq |\alpha| \leq q.$$

En prenant $(x_\alpha)_{|\alpha|=1}$ comme nouveau paramètre $s = (s_1, \dots, s_n)$, on obtient de plus :

$$x_\alpha = s^\alpha, \quad |\alpha| = 1.$$

Les courbes distinguées sont encore données par (9) avec $r = q + 1$. Si par exemple $\sigma_1 \neq 0$, on prend s_1/σ_1 comme nouveau paramètre t . Alors $a_1(\sigma) \equiv 0$.

On suppose les courbes distinguées données par (9) avec $r \geq q + 1$ donné quelconque. Si $|\alpha| = 1$, les relations (10) donnent $a_i(\sigma) = c(\sigma) \sigma_i$ puisque $P_\alpha(s) \equiv 0$, donc $a_i(\sigma) \equiv 0$, $1 \leq i \leq n$. Par récurrence sur r , on obtient $s(t) \equiv \sigma t$ et le Lemme 3.4.

3.6. Démonstration du Lemme 3.3. — On suppose que le germe X est paramétré sous forme réduite à l'ordre $r \leq q$, qu'il est normalisé comme dans le Lemme 3.2 et qu'il a la propriété (P). Rappelons les notations. On a :

$$(11) \quad x_\alpha = s^\alpha + P_\alpha(s) + O(|s|^{|\alpha|+r+1}), \quad |\alpha| + r \in \{q + 1, q + 2\},$$

où les $P_\alpha(s)$ sont homogènes de degré $|\alpha| + r$. Les courbes distinguées sont données par

$$(12) \quad s_i = \sigma_i t + a_i(\sigma) t^{r+1} + O(t^{r+2}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Si par exemple $\sigma_1 \neq 0$, on prend s_1/σ_1 comme nouveau paramètre t . Alors :

$$a_1(\sigma) \equiv 0.$$

En notant s au lieu de σ , pour s voisin de $(1, 0, \dots, 0)$, l'implication (10) donne :

$$(13) \quad \sum_{i=2}^n a_i(s) \frac{\alpha_i s^\alpha}{s_i} + P_\alpha(s) = c_{|\alpha|}(s) s^\alpha, \quad |\alpha| + r \in \{q + 1, q + 2\}.$$

On note $|\alpha| = \kappa$ et on traite d'abord simultanément les deux groupes d'équations correspondant respectivement à $\kappa + r = q + 1$ et $\kappa + r = q + 2$.

Avec les notations (3)–(4), pour $\alpha = (\kappa)$, on obtient $c_\kappa(s) s_1^\kappa = P_{(\kappa)}(s)$ car $a_1(\sigma) \equiv 0$. En choisissant $\alpha = (\kappa - 1; j)$, on obtient $a_j(s) s_1^{\kappa-1} + P_{(\kappa-1;j)}(s) = c_\kappa(s) s_1^{\kappa-1} s_j$ donc

$$(14) \quad a_j(s) s_1^\kappa = P_{(\kappa)}(s) s_j - P_{(\kappa-1;j)}(s) s_1, \quad j = 2, \dots, n.$$

En multipliant les deux membres de (13) par s_1^κ , on obtient :

$$(15) \quad P_\alpha(s) s_1^\kappa = \left(1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i\right) P_{(\kappa)}(s) s^\alpha + \sum_{i=1}^n P_{(\kappa-1;i)}(s) \frac{\alpha_i s_1 s^\alpha}{s_i}, \quad |\alpha| = \kappa.$$

Il s'agit d'une identité entre polynômes : $\alpha_i s^\alpha / s_i$ est un monôme, nul si $\alpha_i = 0$.

Le monôme s_1^κ divise le second membre de (15). Pour $j \geq 2$ donné, en choisissant d'abord α , de longueur $|\alpha| = \kappa$, tel que $\alpha_j = \kappa$, puis tel que $\alpha_j = \kappa - 1$ et $\alpha_1 = 1$, on obtient :

$$(16) \quad s_1^\kappa \text{ divise } (1 - \kappa)P_{(\kappa)}(s)s_j + \kappa P_{(\kappa-1;j)}(s)s_1,$$

$$(17) \quad s_1^\kappa \text{ divise } (2 - \kappa)P_{(\kappa)}(s)s_j s_1 + (\kappa - 1)P_{(\kappa-1;j)}(s)s_1^2.$$

On suppose d'abord $|\alpha| + r := \kappa + r = q + 1$. Par les hypothèses du Lemme 3.3, les polynômes $P_{(\kappa)}(s)$ et $P_{(\kappa-1;j)}(s)$ sont de degré $\leq \kappa - 2$ par rapport à s_1 . D'autre part, il résulte de (16)–(17) que $s_1^{\kappa-1}$ divise les deux polynômes

$$(1 - \kappa)P_{(\kappa)}(s)s_j + \kappa P_{(\kappa-1;j)}(s)s_1, \quad (2 - \kappa)P_{(\kappa)}(s)s_j + (\kappa - 1)P_{(\kappa-1;j)}(s)s_1,$$

donc aussi le polynôme $P_{(\kappa)}(s)$: il est nul. Il résulte alors de (16) que $s_1^{\kappa-1}$ divise les polynômes $P_{(\kappa-1;j)}(s)$: ils sont nuls. Alors (14)–(15) montre que toutes les fonctions $a_j(s)$ et tous les polynômes $P_\alpha(s)$ avec $|\alpha| + r = q + 1$ sont nuls.

Si $r \neq 1$, on suppose enfin $|\alpha| + r = q + 2$. Par hypothèse le polynôme $P_{(\kappa)}(s)$ est de degré $\leq \kappa - 1$ par rapport à s_1 . Comme les fonctions $a_i(\sigma)$ sont nulles, (14) donne $P_{(\kappa-1;j)}(s)s_1 = P_{(\kappa)}(s)s_j$ et on obtient que s_1^κ divise le polynôme $P_{(\kappa)}(s)$. Il est nul donc aussi les $P_{(\kappa-1;j)}(s)$ et par (15) tous les $P_\alpha(s)$. Le Lemme 3.3 est démontré.

4. Appendice : commentaires sur l'article d'E. Bompiani

4.1. Le théorème général. — Si $Y \subset \mathbb{P}^N$ est un germe lisse de variété analytique, on note $Y_x(q)$ son espace osculateur à l'ordre q en $x \in Y$.

Soit X un germe lisse q -régulier. Une courbe analytique lisse $C \subset X$ est *quasi-asymptotique de type* $(q-1, q+1)$ si pour tout $x \in C$, l'espace $C_x(q+1)$ est contenu dans l'espace engendré par $X_x(q-1)$ et $C_x(q)$. Le résultat principal de [1] est le suivant :

Théorème 4.1 (Bompiani). — *Soit X un germe de variété lisse q -régulier de dimension n . Si X contient ∞^{2n-2} courbes quasi-asymptotiques de type $(q-1, q+1)$, X est une variété de Veronese d'ordre q et ces courbes sont rationnelles normales de degré q .*

Nous ne redémontrons pas ce résultat. La presque totalité de [1] est consacrée à un calcul formel difficile dont l'auteur déduit que, sous les hypothèses du théorème :

toute courbe quasi-asymptotique de type $(q-1, q+1)$ contenue dans X engendre un espace de dimension q ; de plus deux telles courbes « infiniment voisines » engendrent un espace de dimension $2q$.

Le calcul est détaillé d'abord dans le cas où X est une surface, puis dans le cas $n = 3$ pour $q = 2$ et de façon plus succincte pour q quelconque. Le cas général est laissé au lecteur⁽¹⁾. Ce calcul est par exemple forcément plus délicat que celui qu'on a fait pour démontrer le Théorème 1.2. En effet, pour démontrer le théorème de Bompiani, il faut utiliser non seulement l'existence de courbes quasi-asymptotiques au point de base du calcul, mais aussi l'existence de courbes quasi-asymptotiques qui passent près du point

1. “È certo che il procedimento dimostrativo rimane inaltero, e quindi la verifica dell'asserto presenterà, al più, difficoltà materiali inessenziali : per questo mi è parso inutile farla”, [1] page 474.

de base. La difficulté est alors de déterminer les équations de compatibilité utiles que cela impose aux équations d'abord obtenues.

La deuxième étape de la démonstration est courte et géométrique (voir [1], pages 462–463 pour $n = 2$ et pages 473–474 pour $n = 3$). À partir du résultat déjà obtenu, l'auteur montre que, sous les hypothèses du théorème :

les courbes quasi-asymptotiques de type $(q-1, q+1)$ contenues dans X sont des courbes rationnelles normales de degré q .

L'auteur est ainsi ramené à démontrer le Théorème 1.1. Si X est une surface, voir [1] page 464 : et puisque la surface contient un faisceau (donc une infinité) rationnel de courbes rationnelles de degré q , elle est certainement rationnelle et comme elle engendre $\mathbb{P}^{q(q+3)/2}$, il est bien connu que c'est la surface représentative de toutes les courbes planes de degré q . L'énoncé est donc connu dans ce cas, peut-être aussi, la phrase précédente est ambiguë, le Théorèmes 1.2 et le Théorème 1.4.

4.2. La démonstration du Théorème 1.1 dans [1]. — Hormis le cas connu $n = 2$, l'auteur donne page 470 une démonstration « synthétique » du Théorème 1.1 pour $n = 3$, $q = 2$. Le cas $q \geq 3$ fait l'objet d'une ligne de la page 475. Trouvait-il le résultat trop banal ou trop évident ?

Je pense que sa démonstration dans le cas $q = 2$ présente une lacune⁽²⁾. Je reprends ci-dessous une partie de l'argumentation en mettant en évidence le point qui m'intrigue : une certaine propriété, utilisée sans commentaire, exigerait selon moi une démonstration.

La stratégie pour démontrer le résultat est de construire un système de diviseurs de X dont l'élément générique est une variété de Veronese de dimension $n - 1$ et d'ordre q , tel que par tout n -uplet générique de points de X passe un diviseur du système. Ce système est un système linéaire qui résout le problème : l'application $X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ associée envoie les courbes rationnelles normales de degré q de X sur les droites de \mathbb{P}^N . Par exemple, dans le cas $n = 2$, il suffit de prendre le système de ces courbes. Dans la suite, je considère seulement la partie de la démonstration qui concerne la construction d'un tel système.

4.3. Le point clé si $n = 3$, $q = 2$. — Voici comment je comprends l'argument essentiel de la démonstration de [1]. On part d'une variété X de dimension 3 qui engendre un \mathbb{P}^9 , telle que par toute paire $(x, y) \in X^2$ générique passe une conique propre $C(x, y) \subset X$. Il s'agit de montrer que par trois points de X passe une surface de Veronese d'ordre 2 (qui engendre donc un \mathbb{P}^5) contenue dans X .

Soit (a, b, c) un triplet générique de points de X et $S = S(a, b, c)$ la surface décrite par les coniques de X qui passent par a et rencontrent la conique $C(b, c)$. Le plan tangent $S_a(1)$ est engendré par les droites tangentes $C(a, b)_a(1)$ et $C(a, c)_a(1)$. Quand x décrit $C(b, c)$, le plan de la conique $C(a, x)$ est engendré par sa tangente en a et le point x . Il en résulte que la surface S est contenue dans le \mathbb{P}^5 engendré par le plan $S_a(1)$ et le plan de $C(b, c)$.

Si $x \in C(b, c)$, on peut appliquer le même raisonnement à $S' = S(x, a, c)$. On a $S'_x(1) = S_x(1)$ puisque les deux espaces contiennent $C(x, a)_x(1)$ et $C(b, c)_x(1)$. Pour tout

2. Si par chance ces lignes ont un lecteur et si l'article de Bompiani lui est familier, je lui serais très reconnaissant de me donner son opinion sur ce sujet.

$y \in C(a, c)$, la conique $C(x, y)$ est contenue dans le même \mathbb{P}^5 qui contient S , puisque ce \mathbb{P}^5 est aussi engendré par $S_x(1) = S'_x(1)$ et le plan de $C(a, c)$. Finalement, les coniques de X qui rencontrent à la fois $C(a, c)$ et $C(b, c)$ engendrent un \mathbb{P}^5 et décrivent une surface qui contient ∞^2 coniques, une surface de Veronese d'ordre 2.

Comme Bompiani, nous avons introduit sans commentaire l'espace tangent en a à la surface $S(a, b, c)$, mais je ne vois pas pourquoi, compte tenu de la façon dont elle est définie, la réponse à la question suivante serait positive.

La surface $S(a, b, c)$ est-elle lisse au point a ?

4.4. Le cas général. — Bompiani ne donne pas d'indication sur sa façon de traiter le cas général. Connaissait-il le résultat par ailleurs? Voici une esquisse de « démonstration » qui repose sur la même idée et le même genre de pétition de principe que la précédente. C'est peut-être la démonstration qu'il avait en tête.

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une variété de dimension n , q -régulière au point générique, telle que pour tout $(x, y) \in X^2$ générique, il existe une courbe rationnelle normale $C(x, y) \subset X$ de degré q . À tout n -uplet générique $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ on associe les sous-variétés

$$Y(x_1) \subset Y(x_1, x_2) \subset \dots \subset Y(x_1, \dots, x_{n-1}) \subset Y(x_1, \dots, x_n),$$

où $Y(x_1)$ est le point x_1 , $Y(x_1, x_2)$ la courbe $C(x_1, x_2)$ et plus généralement, $Y(x_1, \dots, x_{r+1})$ la variété de dimension r décrite ou presque par les courbes $C(x_{r+1}, z)$ quand z décrit $Y(x_1, \dots, x_r)$. Il s'agit de montrer que, pour $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ générique, l'hypersurface $Y = Y(x_1, \dots, x_n)$ est une variété de Veronese d'ordre q .

On fait l'hypothèse : pour (x_1, \dots, x_n) générique, $Y(x_1, \dots, x_n)$ est lisse au point x_n (« point de base » de la construction).

Tout est alors facile. On peut supposer que X est lisse et q -régulier en x_n et que Y est lisse donc q -régulier en x_n . Comme la variété Y est recouverte ou presque par les courbes $C(x_n, y)$, $y \in Y$, elle est contenue dans son osculateur $Y_{x_n}(q)$. Comme elle est q -régulière en x_n , elle engendre un espace $\langle Y \rangle$ de dimension $\binom{n-1+q}{q} - 1$.

Supposons qu'une courbe générique $C(x, x')$ rencontre Y en au moins deux points. Soit $x \in X \setminus Y$ générique tel que X est lisse et q -régulier en x . La variété X est recouverte ou presque par les courbes $C(x, y)$ qui passent par x et un point $y \in Y$. Celles-ci ont deux points dans Y donc l'espace \mathbb{P}^N qu'elles engendrent est contenu dans l'espace engendré par $\langle Y \rangle$ et $X_x(q-2)$. On obtient la contradiction :

$$\binom{n+q}{q} \leq \binom{n-1+q}{q} + \binom{n+q-2}{q-2}.$$

Une courbe générique $C(x, x')$ rencontre donc une variété $Y = Y(x_1, \dots, x_n)$ générique en un point. Autrement dit, pour $(y_1, y_2) \in Y^2$ générique, la courbe $C(y_1, y_2)$ qui a deux points dans Y est contenue dans Y : Y est une variété de Veronese d'ordre q . Des variations sont possibles, par exemple considérer les variétés Y décrites par les courbes tangentes en un point $x \in X$ à un hyperplan donné de $T_x X$. On obtiendrait la même conclusion, à condition de poser la même pétition de principe : que l'hypersurface Y est lisse au point x .

Références

- [1] E. Bompiani, *Proprietà differenziali carratteristiche di enti algebrici*, Rom. Acc. L. Mem. **26** (1921), 452–474.
- [2] L. Pirio, J.-M. Trépreau, *Sur les variétés $X \subset \mathbb{P}^N$ telles que par n points passe une courbe de X de degré donné*, bientôt sur arXiv.
- [3] L. Pirio, J.-M. Trépreau, *Théorie abélienne des tissus*, en préparation.

JEAN-MARIE TRÉPREAU, U.P.M.C., UMR 7586, bureau 26-16-5-21 ; 4, place Jussieu, 75005 Paris.
Adresse électronique : trepreau@math.jussieu.fr