

# 区间时滞控制系统鲁棒绝对稳定性的 LMI 方法

何 勇<sup>1,2</sup>, 吴 敏<sup>1</sup>, 张先明<sup>1,2</sup>

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙, 410083;  
2. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 湖南 长沙, 410083)

**摘要:** 针对区间 Lurie 时滞控制系统, 基于区间矩阵的等价描述和 S-过程, 构造了关于 Lurie 型 Lyapunov 泛函中正定矩阵和积分项系数的线性矩阵不等式(LMI), 通过 LMI 的解构造的 Lyapunov 泛函来保证系统的鲁棒绝对稳定性, 不必选择和调整参数; 讨论了非线性机构分别具有无穷扇形角、有限扇形角约束的情形, 所获结果适用于系统具有多个非线性执行机构的情形; 通过实例分析了扇形角的大小与鲁棒稳定度的关系, 研究结果表明该方法是有有效的。

**关键词:** 区间 Lurie 时滞控制系统; 鲁棒性; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1005-9792(2003)05-0536-04

Lurie 控制系统的绝对稳定性受到了国内外学者的重视及广泛研究<sup>[1,2]</sup>. 而在实际应用中, 许多控制系统存在参数不确定性, 因而研究 Lurie 控制系统的鲁棒绝对稳定性显得更加重要<sup>[3-8]</sup>. 其中的一类重要情形是区间 Lurie 控制系统<sup>[6-8]</sup>. 此外, 由于许多控制系统存在滞后效应, 因此, 必须研究区间 Lurie 时滞控制系统的鲁棒绝对稳定性. 杨斌等利用 Lurie 型 Lyapunov 泛函方法, 获得了区间 Lurie 时滞系统鲁棒绝对稳定的一些充分条件, 其基本思想是根据选定的正定矩阵和积分项系数来构造 Lyapunov 泛函, 从而判断绝对稳定性<sup>[9-11]</sup>. 由于正定矩阵等自由参数选取具有随意性, 造成了条件的验证带有一种试验的性质, 需要多次调整. 在此, 作者对于区间 Lurie 时滞控制系统, 采用区间矩阵的等价形式进行描述<sup>[12,13]</sup>, 并利用 S-过程对其进行处理, 避免了将其稳定性判断归结到端点矩阵稳定性判断的缺陷. 由此构造了关于 Lurie 型 Lyapunov 泛函中正定矩阵和积分项系数等自由参数的线性矩阵不等式, 通过其解来构造 Lyapunov 泛函, 无需调整参数, 提高了绝对稳定性判断的鲁棒性.

## 1 系统描述及引理

考虑滞后型区间 Lurie 直接控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = N[\underline{A}, \overline{A}]x(t) + N[\underline{B}, \overline{B}]x(t-\tau) + N[\underline{D}, \overline{D}]f(\sigma) \\ \sigma = C^T x \end{cases} \quad (1)$$

的鲁棒绝对稳定性. 式中,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , 为状态参数;

$\tau > 0$ ;  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)^T$ ;  $f(\sigma) = (f_1(\sigma_1), f_2(\sigma_2), \dots, f_m(\sigma_m))^T$ ;  $C = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ;  $c_i \in \mathbf{R}^n (i = 1, 2, \dots, m)$ ;  $N[\underline{A}, \overline{A}]$  和  $N[\underline{B}, \overline{B}]$  为  $n \times n$  阶区间矩阵;  $N[\underline{D}, \overline{D}]$  为  $n \times m$  阶区间矩阵. 要求每一个非线性机构具有无穷扇形角约束, 即

$$f_j(\bullet) \in K_j[0, \infty] = \{f_j(\sigma) | f_j(0) = 0, \sigma f_j(\sigma) > 0 (\sigma \neq 0)\}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

或者具有有限扇形角约束, 即

$$f_j(\bullet) \in K_j[0, k_j] = \{f_j(\sigma) | f_j(0) = 0, 0 < \sigma f_j(\sigma) \leq k_j \sigma^2 (\sigma \neq 0)\}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

同时考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + Df(\sigma), \\ \sigma = C^T x. \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $A \in N[\underline{A}, \overline{A}]$ ;  $B \in N[\underline{B}, \overline{B}]$ ;  $D \in N[\underline{D}, \overline{D}]$ .

**定义** 若对任意的  $A \in N[\underline{A}, \overline{A}]$ ,  $B \in N[\underline{B}, \overline{B}]$ ,  $D \in N[\underline{D}, \overline{D}]$ , 在(2)或(3)的约束下系统(4)是全局渐近稳定的, 则称系统(1)在(2)或(3)的约束下是鲁棒绝对稳定的.

首先引入区间矩阵的等价描述.

**引理**<sup>[112]</sup> 区间矩阵  $A \in N[\underline{A}, \overline{A}]$ ,  $B \in N[\underline{B}, \overline{B}]$  和  $D \in N[\underline{D}, \overline{D}]$  可等价地描述为

$$\begin{aligned} A &= A_0 + E_a \Sigma_a F_a, \quad \Sigma_a \in \Sigma_a^*; \\ B &= B_0 + E_b \Sigma_b F_b, \quad \Sigma_b \in \Sigma_b^*; \\ D &= D_0 + E_d \Sigma_d F_d, \quad \Sigma_d \in \Sigma_d^*. \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $A_0 = \frac{1}{2}(A + \bar{A}); B_0 = \frac{1}{2}(B + \bar{B});$

$D_0 = \frac{1}{2}(D + \bar{D}); U = \frac{1}{2}(\bar{A} - A) = (u_{ij})_{n \times n};$

$V = \frac{1}{2}(\bar{B} - B) = (v_{ij})_{n \times n}; W = \frac{1}{2}(\bar{D} - D) = (w_{ij})_{n \times m}.$

且

$E_a = (\sqrt{u_{11}} e_1, \dots, \sqrt{u_{1n}} e_1, \sqrt{u_{21}} e_2, \dots, \sqrt{u_{2n}} e_2, \dots, \sqrt{u_{n1}} e_n, \dots, \sqrt{u_{nn}} e_n);$  (6)

$F_a^T = (\sqrt{u_{11}} e_1, \dots, \sqrt{u_{1n}} e_n, \sqrt{u_{21}} e_1, \dots, \sqrt{u_{2n}} e_n, \dots, \sqrt{u_{n1}} e_1, \dots, \sqrt{u_{nn}} e_n);$  (7)

$E_b = (\sqrt{v_{11}} e_1, \dots, \sqrt{v_{1n}} e_1, \sqrt{v_{21}} e_2, \dots, \sqrt{v_{2n}} e_2, \dots, \sqrt{v_{n1}} e_n, \dots, \sqrt{v_{nn}} e_n);$  (8)

$F_b^T = (\sqrt{v_{11}} e_1, \dots, \sqrt{v_{1n}} e_n, \sqrt{v_{21}} e_1, \dots, \sqrt{v_{2n}} e_n, \dots, \sqrt{v_{n1}} e_1, \dots, \sqrt{v_{nn}} e_n);$  (9)

$E_d = (\sqrt{w_{11}} e_1, \dots, \sqrt{w_{1m}} e_1, \sqrt{w_{21}} e_2, \dots, \sqrt{w_{2m}} e_2, \dots, \sqrt{w_{n1}} e_n, \dots, \sqrt{w_{nm}} e_n);$  (10)

$F_d^T = (\sqrt{w_{11}} \xi_1, \dots, \sqrt{w_{1m}} \xi_m, \sqrt{w_{21}} \xi_1, \dots, \sqrt{w_{2m}} \xi_m, \dots, \sqrt{w_{n1}} \xi_1, \dots, \sqrt{w_{nm}} \xi_m).$  (11)

其中:  $e_i$  为  $n \times n$  维单位矩阵的第  $i$  个单位列向量;  $\xi_i$  为  $m \times m$  单位矩阵的第  $i$  个单位列向量. 并且

$\Sigma_a^* = \Sigma_b^* = \{ \Sigma \in \mathbf{R}^{n \times n} \mid \Sigma = \text{diag}(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1n}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nn}), \mid \varepsilon_{ij} \mid \leq 1, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \};$  (12)

$\Sigma_d^* = \{ \Sigma \in \mathbf{R}^{nm \times nm} \mid \Sigma = \text{diag}(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1m}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nm}), \mid \varepsilon_{ij} \mid \leq 1, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \}.$  (13)

## 2 鲁棒绝对稳定性

考虑系统(1)在条件(2)约束下的绝对稳定性, 为此构造 Lyapunov 泛函:

$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \int_0^\sigma f_j(\varrho) d\varrho + \int_{t-\tau}^t x(t)^T Q x(t) dt.$  (14)

其中:  $P, Q$  为待定正定矩阵;  $\lambda_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, m)$  待定, 记  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ . 定义

$p(t) = \Sigma_a F_a x(t), q(t) = \Sigma_b F_b x(t - \tau), r(t) = \Sigma_d F_d f(\sigma).$  (15)

则式(14)关于式(4)的导数为

$\frac{dV(x_t)}{dt} = x^T(t) (A^T P + PA + Q) x(t) + 2x^T(t) \cdot PBx(t - \tau) + 2x^T(t) (PD + A^T C \Lambda) f(\sigma) + 2x^T(t - \tau) B^T C \Lambda f(\sigma) - x^T(t - \tau) Q x(t - \tau) + f^T(\sigma) \cdot (\Lambda C^T D + D^T C \Lambda) f(\sigma) =$

$\begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau) & f^T(\sigma) & p^T(t) & q^T(t) & r^T(t) \end{bmatrix} \cdot$

$\begin{bmatrix} W_{11} & PB_0 & W_{13} & PE_a & PE_b & PE_d \\ B_0^T P & -Q & B_0^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ W_{13}^T & \Lambda C^T B_0 & W_{33} & \Lambda C^T E_a & \Lambda C^T E_b & \Lambda C^T E_d \\ E_a^T P & 0 & E_a^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ E_b^T P & 0 & E_b^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ E_d^T P & 0 & E_d^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot$

$\begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau) & f^T(\sigma) & p^T(t) & q^T(t) & r^T(t) \end{bmatrix}.$  (16)

其中:

$W_{11} = A_0^T P + PA_0 + Q, W_{13} = PD_0 + A_0^T C \Lambda, W_{33} = \Lambda C^T D_0 + D_0^T C \Lambda.$

而条件(2)可等价表示为

$-f_j(\varrho) c_j^T x(t) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m.$  (17)

现在讨论当  $(x(t), x(t - \tau)) \neq 0$ , 且在(17)的约束下  $\frac{dV(x_t)}{dt}$  的负定性. 因为

$\{x(t), x(t - \tau), f(\sigma), p(t), q(t), r(t)\} \mid (x(t), x(t - \tau)) \neq 0, -f_j(\varrho) c_j^T x(t) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}$

$= \{x(t), x(t - \tau), f(\sigma), p(t), q(t), r(t)\} \mid (x(t), x(t - \tau), f(\sigma), p(t), q(t), r(t)) \neq 0, -f_j(\varrho) c_j^T x(t) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}.$  (18)

并且由式(15)有

$p^T(t) p(t) \leq x^T(t) F_a^T F_a x(t), q^T(t) q(t) \leq x^T(t - \tau) F_b^T F_b x(t - \tau), r^T(t) r(t) \leq f^T(\sigma) F_d^T F_d f(\sigma).$  (19)

故利用 S-过程<sup>[13]</sup>, 若存在  $T = \text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_m) \succ 0, \varepsilon_1 \succ 0, \varepsilon_2 \succ 0, \varepsilon_3 \succ 0$ , 使得 LMI

$\begin{bmatrix} W_{11} + \varepsilon_1 F_a^T F_a & PB_0 & W_{13} + CT & PE_a & PE_b & PE_d \\ B_0^T P & \varepsilon_2 F_b^T F_b - Q & B_0^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ W_{13}^T + TC^T & \Lambda C^T B_0 & W_{33} + \varepsilon_3 F_d^T F_d & \Lambda C^T E_a & \Lambda C^T E_b & \Lambda C^T E_d \\ E_a^T P & 0 & E_a^T C \Lambda & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ E_b^T P & 0 & E_b^T C \Lambda & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ E_d^T P & 0 & E_d^T C \Lambda & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0$  (20)

成立, 则在式(18)的约束下, 式(16)是负定的, 故有以下定理.

**定理 1** 如果 LMI(20) 存在关于  $P > 0, Q > 0, T \geq 0, \Lambda \geq 0$ , 以及  $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_3 \geq 0$  的可行解, 则系统(1)在条件(2)的约束下是鲁棒绝对稳定的.

另一方面, 将式(2)的无穷扇形角约束改为式(3)的有限扇形角的约束, 则式(3)可等价表示为

$$f_j(\varrho)(f_j(\varrho) - k_j c_j^T x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (21)$$

利用和定理 1 类似的讨论, 有以下定理.

**定理 2** 如果 LMI

$$\begin{bmatrix} W_{11+} \varepsilon_1 F_a^T F_a & P B_0 & W_{13+} C K T & P E_a & P E_b & P E_d \\ B_0^T P & \varepsilon_2 F_b^T F_b - Q & B_0^T C \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ W_{13+}^T T K C^T & \Lambda C^T B_0 & W_{33+} \varepsilon_3 F_d^T F_d - 2T & \Lambda C^T E_a & \Lambda C^T E_b & \Lambda C^T E_d \\ E_a^T P & 0 & E_a^T C \Lambda & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ E_b^T P & 0 & E_b^T C \Lambda & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ E_d^T P & 0 & E_d^T C \Lambda & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

存在关于  $P > 0, Q > 0, T \geq 0, \Lambda \geq 0$  以及  $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_3 \geq 0$  的可行解, 则系统(1)在条件(3)的约束下是鲁棒绝对稳定的. 这里,  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ .

### 3 实例

考虑系统(1), 假设  $w$  为可变参数且

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{bmatrix} -2+w & -1+w \\ 1+w & -3+w \end{bmatrix}, \\ \underline{A} &= \begin{bmatrix} -2-w & -1-w \\ 1-w & -3-w \end{bmatrix}, \\ \overline{B} &= \begin{bmatrix} -1+0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 1+0.3 \end{bmatrix}, \\ \underline{B} &= \begin{bmatrix} -1-0.3 & -0.3 \\ -0.3 & 1-0.3 \end{bmatrix}, \\ \overline{D} &= \begin{bmatrix} -3+w \\ -1+w \end{bmatrix}, \\ \underline{D} &= \begin{bmatrix} -3-w \\ -1-w \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} E_a &= \begin{bmatrix} \sqrt{w} & \sqrt{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{w} & \sqrt{w} \end{bmatrix}, \\ F_a^T &= \begin{bmatrix} \sqrt{w} & 0 & \sqrt{w} & 0 \\ 0 & \sqrt{w} & 0 & \sqrt{w} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_b &= \begin{bmatrix} \sqrt{0.3} & \sqrt{0.3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.3} & \sqrt{0.3} \end{bmatrix}, \\ F_b^T &= \begin{bmatrix} \sqrt{0.3} & 0 & \sqrt{0.3} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.3} & 0 & \sqrt{0.3} \end{bmatrix}, \\ E_d &= \begin{bmatrix} \sqrt{w} & 0 \\ 0 & \sqrt{w} \end{bmatrix}, \quad F_d^T = \begin{bmatrix} \sqrt{w} & \sqrt{w} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

下面考虑 2 种情形.

第 1 种情形:  $f_1(\sigma) \in K_1[0, \infty)$ , 取  $w = 0.2713$ , 利用 MATLAB, 求解 LMI(20), 则其存在可行解, 说明此时系统(1)在(2)的约束下是鲁棒绝对稳定的. 这里得到的保证系统鲁棒绝对稳定的区间矩阵的范围比文献[9]中给出的范围大.

第 2 种情形:  $f_1(\sigma) \in K_1[0, k_1]$ , 若  $k_1 = 10$ , 取  $w = 0.2773$ , 或者  $k_1 = 1$ , 取  $w = 0.2903$ , 利用 MATLAB, 求解 LMI(22), 则其存在可行解. 说明在这 2 种情况下, 系统(1)在(3)的约束下是鲁棒绝对稳定的.

经过计算发现: 对于第 1 种情形, 若取  $w = 0.2714$ , 利用 MATLAB 求解可知 LMI(20) 没有可行解. 而对于第 2 种情形, 当  $k_1 = 10$ , 取  $w = 0.2774$ , LMI(22) 没有可行解. 表明当扇形角域由小变大时, 系统的鲁棒性有所降低.

### 4 结论

**a.** 利用线性矩阵不等式讨论了区间 Lurie 时滞控制系统的鲁棒绝对稳定性, 基于区间矩阵的等价描述和 S-过程, 将 Lyapunov 泛函中自由参数的选取归结到一组 LMI 的求解, 大大降低了鲁棒绝对稳定判断的保守性, 并且该方法适用于多个非线性执行机构 ( $m > 1$ ) 的情形.

**b.** 讨论了非线性执行机构分别具有无穷扇形角、有限扇形角的情形, 扇形角域由小变大时, 系统的鲁棒性有所降低.

#### 参考文献:

[1] 赵素霞. 关于直接控制系统的绝对稳定性[J]. 数学学报, 1979, 22(4): 404-419.  
 [2] 赵素霞. 多个执行机构的控制系统的绝对稳定性[J]. 中国科学, 1987, A(8): 785-792.  
 [3] Grujic L T, Petkovski D. On robustness of Lurie systems with multiple nonlinearities [J]. Automatica, 1987, 23(3): 327-334.  
 [4] Miyagi H, Yamashita K. Robust stability of Lur'e systems with multiple nonlinearities [J]. IEEE Trans Automat Contr, 1992, 37

- (6): 883-886.
- [5] Konishi K, Kokame H. Robust stability of Lur'e systems with time-varying uncertainties: A linear matrix inequality approach [J]. *Int J Sys Sci*, 1999, 30(1): 3-9.
- [6] 年晓红. Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性[J]. *控制理论与应用*, 1995, 12(5): 641-645.
- [7] 年晓红. 具有多个执行机构的 Lurie 控制系统的鲁棒稳定性[J]. *自动化学报*, 1998, 24(4): 562-565.
- [8] 杨 斌, 潘德惠. 关于 Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性[J]. *自动化学报*, 1998, 24(6): 816-819.
- [9] 杨 斌, 陈绵云. 一类滞后型控制系统的鲁棒绝对稳定性[J]. *信息与控制*, 2000, 29(5): 471-475.
- [10] 刘祖润, 张志飞. 时滞控制系统鲁棒稳定性分析[J]. *信息与控制*, 2000, 29(2): 164-167.
- [11] 孙继涛, 邓飞其, 刘永清. 具滞后的区间 Lurie 型系统的鲁棒绝对稳定性[J]. *系统工程与电子技术*, 2001, 23(3): 47-50.
- [12] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(1): 113-115.
- [13] Boyd S, Ghaoui E L, Feron E, *et al.* *Linear matrix inequality in system and control theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

## LMI approach for robust absolute stability of interval Lurie control systems with time-delay

HE Yong<sup>1,2</sup>, WU Min<sup>1</sup>, ZHANG Xian-ming<sup>1,2</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China;

2. School of Mathematics Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** Based on the equivalent description of interval matrices and S-procedure, an LMI is given for the free parameters such as the positive definite matrix and the coefficients of the integral terms of the Lurie-type Lyapunov function for interval Lurie control systems with time-delay. The Lyapunov functional constructed by the solution of the LMI is adopted to guarantee the robust stability of the systems, and the parameters needn't to be readjusted. Not only the case of the finite sector but also the infinite sector are discussed, and the conclusion is applicable to the case of multiple non-linearities. Finally, an example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method, and the relation between the size of the sector and the robustness is analyzed through the example.

**Key words:** interval Lurie control systems with time-delay; robustness; linear matrix inequality