岩石蠕变过程的不可逆热力学分析

潘长良, 陈沅江, 曹 平, 王文星

(中南大学 资源与安全工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 岩石蠕变产生的内部结构变化和损伤导致其过程呈现非线性特性, 为此, 采用不可逆热力学方法, 在 Biot 粘弹性发展方程的基础上引入能反映材料内部结构变化和损伤的结构参数按其对 Helmholtz 自由能和发展方程的影响, 推导出岩石非线性蠕变一般发展方程, 并研究了单轴蠕变时岩石的非线性蠕变行为. 分析结果表明: 岩石蠕变时存在某一极限应力值, 当轴向应力低于此值时, 蠕变将以递减的速率趋近于某一常数; 当轴向应力高于此值时, 蠕变开始以递减的速率增加, 随后, 当蠕变量达到一定数值时, 蠕变率以递增的速率进入加速段, 从而解释了岩石蠕变中的现象.

关键词: 岩石; 蠕变; 非线性; 不可逆热力学; 发展方程

中图分类号: TD313 **文献标识码**: A **文章编号**: 1005-9792(2002)05-0441-04

岩石的蠕变过程是指岩石在外界恒定荷载作用下其变形随时间而不断增长的过程. 岩石的变形破坏往往是由岩体的蠕变造成的[1-3]. 以往对岩石蠕变的研究大都是在线性粘弹性力学的范围内进行的(若考虑塑性变形, 则可在线粘弹性模型中加入塑性模型来进行研究), 在蠕变过程中, 一般假定岩石为各向同性体, 且其力学参数如弹性模量、泊松比、粘滞系数等保持不变[4,5]. 然而, 实际岩石中由于存在内部微裂隙, 其蠕变过程往往是一个内部组织结构不断发生变化、调整的非线性过程, 蠕变必然会导致岩石力学参数或多或少地改变, 岩石会由原来的近似各向同性体变为各向异性体[6,7]. 因此, 对岩石蠕变的研究应该在非线性粘弹性力学的范围内进行. 此外, 蠕变过程中内部组织结构的变化和损伤必将带来能量的耗散并由此导致系统的熵增加, 故岩石的蠕变过程是一个不可逆热力学过程, 属于变形热力学的研究范畴. 为此, 作者从不可逆变形热力学出发, 用粘弹性理论推出描述岩石非线性蠕变过程的方程式——发展方程, 并以此为基础对伴随内部结构变化的岩石的非线性蠕变行为进行分析.

1 岩石非线性蠕变过程的不可逆热力学分析

1.1 适用于岩石非线性蠕变过程的一般发展方程

把一定温度下处于蠕变变形中的岩石作为热力学系统 A, 而其周围的环境称为热力学系统 B. A 和 B 共同组成一个热力学孤立系统(A+ B). 描述系统 A 的热力学状态参数为热力学广义坐标 q_i, q_i 又分为有热力学广义力 Q_i 作用的坐标(定义为阳坐标)和没有热力学广义力 Q_i 作用的坐标(定义为阴坐标). T, T_r 分别为系统 A 和 B 的温度. 据文献[8, 9], 固体材料线性和非线性粘弹性行为所共同适用的发展方程为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_i} + b_{ij}\dot{q}_j = Q_i . \tag{1}$$

式中: ϕ 为 Helmholtz 自由能, 线粘弹性时, $\phi = \phi(q_i, T)$. 由于岩石蠕变过程中其内部组织结构不断发生变化和损伤, 从而导致过程呈非线性特征. 为反映这种非线性特征, 引入一反映岩石蠕变时其内部结构变化和损伤的结构参数 S_m, 其变化直接影响 Helmholtz 自由能, 且 S_m 是热力学广义坐标 q_i 的函数:

$$S_m = S_m(q_i). \tag{2}$$

设全部广义坐标 q_i 可分为与 S_m 有关的坐标 q_x 和与其无关的坐标 q_y 2 类, 于是, 非线性粘弹性蠕变过程中自由能函数 ϕ 为:

$$\phi = \phi(S_m, q_x, q_y, T). \tag{3}$$

由于所考虑的岩石蠕变过程一般为等温过程, 故自由能函数关系式中可不显含温度 T, 得到反映内部结构变化和损伤的非线性蠕变过程的 Helmholtz

收稿日期: 2001-10-25

基金项目: 国家"九五"科技攻关项目(96-116-01-01-02)

作者简介: 潘长良(1935-), 男, 湖北荆州人, 中南大学教授, 博士生导师, 从事岩石力学的教学与科研工作.

自由能 ϕ 为:

$$\phi = \phi(S_m, q_x, q_y). \tag{3}$$

将 ϕ 对坐标 q_x 和 q_y 在稳定平衡状态 r 处进行泰勒展开, 有:

$$\begin{aligned}\phi = {} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial S_m}\cdot\frac{\partial S_m}{\partial q_x}+\frac{\partial\phi}{\partial q_x}\right)_r\cdot q_x+\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_y}\right)_r\cdot q_y+\\ & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial S_{m_i}\partial S_{m_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_i}}{\partial q_{x_i}}\cdot\frac{\partial S_{m_j}}{\partial q_{x_j}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial S_{m_i}\partial q_{x_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_i}}{\partial q_{x_i}}+\right.\\ & \frac{\partial\phi}{\partial S_{m_i}}\cdot\frac{\partial^2 S_{m_i}}{\partial q_{x_i}\partial q_{x_j}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{x_i}\partial S_{m_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_j}}{\partial q_{x_j}}+\\ & \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{x_i}\partial q_{x_j}}\right)_r q_{x_i}q_{x_j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{y_i}\partial q_{y_j}}\right)_r\cdot q_{y_i}q_{y_j}+\\ & \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial S_m\partial q_y}\cdot\frac{\partial S_m}{\partial q_x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_x\partial q_y}\right)_r q_x q_y.\end{aligned}\tag{4}$$

在稳定平衡状态下, 有

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}q_x}\right|_r=\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial S_m}\cdot\dfrac{S_m}{\partial q_x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial q_x}\right]_r=0,\\[2ex] \left.\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}q_x}\right|_r=\left[\dfrac{\partial\phi}{\partial q_y}\right]_r=0.\end{cases}\tag{5}$$

将 ϕ 的泰勒展开式(4)代入方程(1)并考虑结构参数 S_m 对它的影响, 得到考虑结构参数变化的非线性蠕变行为的发展方程为:

$$\begin{bmatrix}\partial\phi/\partial q_{x_i}\\ \partial\phi/\partial q_{y_i}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{ij}'\\ b_{(n-i)j}'\end{bmatrix}\cdot\dot{q}_j=\begin{bmatrix}Q_{(1)}\\ Q_{(2)}\end{bmatrix}.\tag{6}$$

在考虑阳坐标和阴坐标的分布后, 坐标 q_x 和 q_y 可能有以下 2 种取法:

a. $q_x=\{q_1, q_2, \cdots, q_K, q_{K+1}, \cdots, q_L\}$,

$q_y=\{q_{L+1}, q_{L+2}, \cdots, q_n\}$.

即坐标 q_x 的个数 L 大于阳坐标的个数 K.

b. $q_x=\{q_1, q_2, \cdots, q_L\}$,

$q_y=\{q_{L+1}, q_{L+2}, \cdots, q_K, q_{K+1}, \cdots, q_n\}$.

即坐标 q_x 的个数 L 小于阳坐标的个数 K.

与其相对应, 热力学广义力 Q_i 也有 2 种取法:

a. $Q_{(1)}=\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_K, 0, \cdots, 0\}$,

$Q_{(2)}=\{0, \cdots, 0\}$;

b. $Q_{(1)}=\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_L\}$,

$Q_{(2)}=\{Q_{L+1}, Q_{L+2}, \cdots, Q_K, 0, \cdots, 0\}$.

据式(6), 考虑结构参数 S_m 变化对自由能 ϕ 的影响, 可得出

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial S_{m_i}\partial S_{m_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_i}}{\partial q_{x_i}}\cdot\frac{\partial S_{m_j}}{\partial q_{y_j}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial S_{m_i}\partial q_{x_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_i}}{\partial q_{x_i}}+\right.\\ &\left.\frac{\partial\phi}{\partial S_{m_i}}\cdot\frac{\partial^2 S_{m_i}}{\partial q_{x_i}\partial q_{x_j}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{x_i}\partial S_{m_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_j}}{\partial q_{x_j}}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{x_i}\partial q_{x_j}}\right]_r\cdot\\ &q_{x_j}+\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial S_m\partial q_y}\cdot\frac{\partial S_m}{\partial q_x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_x\partial q_y}\right]_r q_{y_j}+\\ &b_{ij}'\cdot\dot{q}_j=Q_{(1)};\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial q_{y_i}\partial q_{y_j}}\right]_r q_{y_j}+\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial S_m\partial q_y}\cdot\frac{\partial S_m}{\partial q_x}+\right.\\ &\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial q_x\partial q_y}\right]_r q_{x_j}+b_{(n-i)j}'\cdot\dot{q}_j=Q_{(2)}.\end{aligned}\tag{8}$$

1.2 岩石非线性单轴蠕变过程的不可逆热力学分析

对于式(7)和(8), 考虑岩石在单轴压缩下因蠕变而导致其变形各向异性的单轴蠕变行为.

若设 S_m 是所有热力学广义坐标 q_i 的函数, 则 Helmholtz 自由能 ϕ 可以简化为以下形式:

$$\phi=\phi(S_m, q_i).\tag{9}$$

若进一步假设 S_m 和 q_i 的具体关系为:

$$S_{m_1}=S_{m_1}(q_1), \cdots, S_{m_n}=S_{m_n}(q_n).\tag{10}$$

由于

$$\partial^2 S_{m_i}/(\partial q_i\partial q_j)=0,\tag{11}$$

发展方程(7)和(8)可进一步简化为:

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial S_{m_i}\partial q_j}\cdot\frac{\partial S_{m_i}}{\partial q_i}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_i\partial S_{m_j}}\cdot\frac{\partial S_{m_j}}{\partial q_j}+\frac{\partial^2\phi}{\partial q_i\partial q_j}\right]_r q_j+ b_{ij}'\cdot\dot{q}_j=Q_{(1)}.\tag{12}$$

岩石在单轴蠕变时受轴向应力 $\sigma_{11}=\sigma_0 H(t)$ 作用时, 它将产生轴向应变 ε_{11}. 这里, $H(t)$ 是 Hesviside 函数. 全应变 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^i+\varepsilon_{ij}^d$, ε_{ij}^i 和 ε_{ij}^d 分别称为瞬间应变和延迟应变. 由于所考虑的岩石蠕变过程一般为微小应变下的等温过程, 故 Helmholtz 自由能 ϕ 只是参加熵增的延迟应变 ε_{ij}^d 的函数, 有:

$$\phi=\varepsilon_{ij}^d\boldsymbol{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^d/2.\tag{13}$$

式中, $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ 为粘弹性系数矩阵.

在单轴应力下, 热力学广义力为 $Q_1=\sigma_{11}$, $q_1=\varepsilon_{11}^d$, 为热力学广义阳坐标; 而热力学广义力 $Q_2=\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$, 故 $q_2=\varepsilon_{22}^d=\varepsilon_{33}^d$, 为热力学广义阴坐标. 由于岩石在非线性蠕变过程中其弹性模量和泊松比都将发生变化, 故设 Lame 常数和泊松比的变化 $\nabla\lambda$, $\nabla\mu$ 为结构参数, 根据式(10), 设

$$\begin{cases}S_1(q_i)=\nabla\lambda[\varepsilon_{ij}^d],\\ S_2(q_i)=\nabla\mu[\varepsilon_{ij}^d].\end{cases}\tag{14}$$

则有:

$$\begin{cases} S_1(q_1) = \nabla\lambda[\varepsilon_{11}^d] = k_1'\varepsilon_{11}^d, \\ S_2(q_1) = \nabla\mu[\varepsilon_{11}^d] = k_2'\varepsilon_{11}^d, \\ S_1(q_2) = \nabla\lambda[\varepsilon_{22}^d] = \nabla\lambda[\varepsilon_{33}^d] = k_1\varepsilon_{22}^d = k_1\varepsilon_{33}^d, \\ S_2(q_2) = \nabla\mu[\varepsilon_{22}^d] = \nabla\mu[\varepsilon_{33}^d] = k_2\varepsilon_{22}^d = k_2\varepsilon_{33}^d. \end{cases} \tag{15}$$

而考虑内部结构变化和损伤的粘弹性系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为:

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix}\lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{11}^d)+\\ 2[\mu+\nabla\mu(\varepsilon_{11}^d)]\end{matrix} & \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{11}^d) & \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{11}^d) \\ \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{11}^d) & \begin{matrix}\lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{22}^d)+\\ 2[\mu+\nabla\mu(\varepsilon_{22}^d)]\end{matrix} & \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{22}^d) \\ \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{11}^d) & \lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{22}^d) & \begin{matrix}\lambda+\nabla\lambda(\varepsilon_{33}^d)+\\ 2[\mu+\nabla\mu(\varepsilon_{33}^d)]\end{matrix} \end{vmatrix} \tag{16}$$

将式(13), (15), (16)代入式(12), 并对 ε_{ij}^d 求导, 则考虑岩石内部结构变化与损伤导致其变形各向异性的单轴蠕变方程为:

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon_{11}^d + 2k_1'\varepsilon_{33}^d\varepsilon_{11}^d + 2k_1'\varepsilon_{22}^d\varepsilon_{11}^d + 3k_1'(\varepsilon_{11}^d)^2 + \\ \qquad 2\mu\varepsilon_{11}^d + 6k_2'(\varepsilon_{11}^d)^2 + \lambda\varepsilon_{33}^d + 2k_1'\varepsilon_{11}^d\varepsilon_{33}^d + \\ \qquad \lambda'\dot{\varepsilon}_{11}^d + 2\mu'\dot{\varepsilon}_{11}^d + \lambda'\dot{\varepsilon}_{33}^d = \sigma_0, \\ \lambda\varepsilon_{11}^d + 2k_1'(\varepsilon_{11}^d)^2 + \lambda\varepsilon_{33}^d + 3k_1(\varepsilon_{33}^d)^2 + 2k_1\varepsilon_{22}^d\varepsilon_{33}^d + \\ \qquad 2\mu\varepsilon_{33}^d + 6k_2(\varepsilon_{33}^d)^2 + \lambda'\dot{\varepsilon}_{11}^d + \lambda'\dot{\varepsilon}_{33}^d + 2\mu'\dot{\varepsilon}_{33}^d = 0. \end{cases} \tag{17}$$

式中: $\lambda' = \lambda + \nabla\lambda$, $\mu' = \mu + \nabla\mu$.

设 μ_0 为泊松比, $\varepsilon_{22}^d = \varepsilon_{33}^d = -\mu_0\varepsilon_{11}^d$, 则

$$\dot{\varepsilon}_{11}^d + A(\varepsilon_{11}^d)^2 + B\varepsilon_{11}^d = R. \tag{18}$$

其中: A, B 和 R 均为物性常数, 且

$$\begin{cases} B = \mu/\mu', \\ R = \sigma_0/[2\mu'(1+\mu_0)], \\ A = [-6k_1'\mu_0 - 5k_1\mu_0^2 - 6k_2\mu_0^2 + \\ \qquad k_1' + 6k_2']/[2\mu'(1+\mu_0)]. \end{cases} \tag{19}$$

由方程(18)可以得到蠕变速率为:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^d = \mathrm{d}\varepsilon_{11}^d/\mathrm{d}t = R - A(\varepsilon_{11}^d)^2 - B\varepsilon_{11}^d, \tag{20}$$

即

$$\int \mathrm{d}\varepsilon_{11}^d/[R - A(\varepsilon_{11}^d)^2 - B\varepsilon_{11}^d] = t + c_0. \tag{21}$$

其中, c_0 为积分常数.

式(20)可看作自变量为 ε_{11}^d, 因变量为 $\dot{\varepsilon}_{11}^d$ 的抛物线函数, 据其判别式 $B^2 + 4AR$ 和系数 A 的符号, 蠕变过程为:

a. 若判别式 $B^2 + 4AR < 0$, 则

$$\sigma_0 > \sigma_c = \frac{\mu^2(1+\mu_0)^2}{-6k_1'\mu_0 - 5k_1\mu_0^2 - 6k_2\mu_0^2 + k_1' + 6k_2'}. \tag{22}$$

即在 $\sigma_{11} = \sigma_0 > \sigma_c$ 的条件下解方程(21)得:

$$\frac{A}{R/A + [B/(2A)]^2} \cdot \arctan\frac{[\varepsilon_{11}^d + B/(2A)]}{\sqrt{-[R/A + (B/(2A))^2]}} = t + c_0. \tag{23}$$

这一蠕变曲线由系数 A 来决定. 若 $A < 0$, 据式(20), 蠕变速率为正且下凸, 这一阶段蠕变量是随着蠕变速率的不断减小而逐渐增加的, 但若蠕变量 ε_{11}^d 超过某一极限值 ε_{11}^{dc}, 蠕变速率将随着蠕变量的增加而进入加速段. 这一结果与实际材料的不稳定蠕变行为一致. 若 $A > 0$, 则方程的解与实际不符, 不予考虑.

b. 若判别式 $B^2 + 4AR > 0$, 即 $\sigma_{11} = \sigma_0 < \sigma_c$ 时, 则

$$\frac{1}{2A\sqrt{R/A + [B/(2A)]^2}} \cdot \ln\left\{\frac{[\varepsilon_{11}^d + B/(2A)] + \sqrt{R/A + [B/(2A)]^2}}{[\varepsilon_{11}^d + B/(2A)] - \sqrt{R/A + [B/(2A)]^2}}\right\} = t + c_0. \tag{24}$$

这一蠕变曲线同样由系数 A 决定. 当 $A < 0$ 时, 据式(20), 蠕变速率下凸, 与横坐标 ε_{11}^d 有 2 个交点:

$$\varepsilon_{11}^{d(1)} = -B/(2A) - \sqrt{R/A + [B/(2A)]^2};$$

$$\varepsilon_{11}^{d(2)} = -B/(2A) + \sqrt{R/A + [B/(2A)]^2}. \tag{25}$$

可见: 在 $(-\infty, 0)$ 内, 蠕变值 $\varepsilon_{11}^d < 0$, 与实际蠕变行为不符; 同样, 在 $(\varepsilon_{11}^{d(1)}, +\infty)$ 内, $\varepsilon_{11}^{d(1)}$ 的变化规律也与实际蠕变行为不符; 只有在 $(0, \varepsilon_{11}^{d(1)})$ 内, 蠕变速率随蠕变量的增加逐渐趋近一常数且减小, 并趋于零. 这便是材料的稳定蠕变行为. 此外, 因为 $A > 0$, $\sigma_c < 0$, 所以, 这种情况也不予考虑. 方程(23)和(24)分别是单轴蠕变时不稳定蠕变和稳定蠕变岩石的蠕变本构方程, 而 σ_c 正是岩石由稳定蠕变向不稳定蠕变转变的临界应力, 即岩石的长期强度. 若将初始条件分别代入方程(23), (24), 便可以确定常数 c_0.

2　结　论

a. 由于岩石受力变形时存在内部组织结构变化和损伤, 故蠕变过程中岩石的力学性能发生改变, 表现在岩石的弹性模量、泊松比、粘滞系数等随时间而发生变化, 岩石由原来的近似各向同性变为各向异性, 故岩石的蠕变是一个非线性过程, 应在非线性粘弹性力学的范畴内对其进行研究.

b. 岩石蠕变的非线性过程同时又是一个能量

不断耗散、熵增加的不可逆热力学过程, 它属于不可逆变形热力学研究的范畴.

c. 当轴向应力低于某一极限值时, 岩石的蠕变以递减的速率趋近于某一常数; 当轴向应力高于某一极限值时, 蠕变开始以递减的速率增加, 随后, 它以递增的速率进入加速段. 这有效地解释了岩石实际蠕变过程中存在稳定蠕变和不稳定蠕变以及长期强度等现象.

参考文献:

[1] Pan Y W, Dong J J. Time-dependent tunnel convergence: Formulation of the model[J]. Int J Rock Mech Min Sci & Geomech Abstr, 1991, 28(6): 469-475.

[2] 刘特洪, 林天健. 软岩工程设计理论与施工实践[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2001.

[3] WANG Wen-xing, PAN Chang-liang, FENG Tao. Fountain rockburst and inductive rockburst[J]. J Cent South Technol(English Edition), 2000, 7(3): 130-132.

[4] 孙 均. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.

[5] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.

[6] 宋德彰. 岩质材料非线性流变属性及其力学模型[J]. 同济大学学报, 1991, 19(4): 395-401.

[7] 陈智纯. 岩石流变损伤方程与损伤参量测定[J]. 煤炭科学技术, 1994, 22(8): 34-35.

[8] Biot M A. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relation phenomena[J]. J App Phy, 1954, 25(11): 1385-1391.

[9] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992.

Analysis of rock creep by means of irreversible thermodynamics

PAN Chang-liang, CHEN Yuan-jiang, CAO Ping, WANG Wen-xing

(College of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: The nonlinear process of rock creep results from the change and damage of the internal configuration and structure of the rock material. On the basis of Biot′s evolution equation about the viscoelasticity, the paper introduces the so-called structure parameters reflecting the change and damage of the internal configuration and structure of the rock material to indicate their influence on Helmholtz free energy and the evolution equation, and then derives a new evolution equation which is applied to the nonlinear creep of the rock by means of irreversible thermodynamics. As a specific application of the new evolution equation, the paper studies the nonlinear creep behavior of rock under uniaxial load and gains the analytic results, that is, there is a limit stress value when rock creeps. If the applied longitudinal stress is below the value, the creep strain approaches an asymptotic value at a decreasing strain rate, and when it is over the value, the creep strain initially increases at a decreasing strain rate and then it increases at an accelerating rate. These results explain some practical creep phenomena of the rock such as the stable creep, the unstable creep and the long strength etc.

Key words: rock; creep; nonlinear; irreversible thermodynamics; evolution equation