第35卷第1期 中国科学技术大学学报 Vol. 35, No. 1
2005年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2005

文章编号:0253-2778(2005)01-0046-05

蒙特卡罗方法计算股价转移概率密度的应用*

吴振翔[1],缪柏其[2],肖敬红[2]

(1. 中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100080;2. 中国科学技术大学统计与金融系,安徽合肥 230026)

摘要: 在扩散方程对股价运行描述的基础上,用蒙特卡罗方法得出未来某一时刻股价转移概率密度的数值解.运用这一结果,给出了一定概率意义下未来股价的置信区间,作出了对实际投资者有一定参考价值的风险分析.在对我国股市中上证指数的转移概率密度进行实证分析中,显示了该方法对未来股价走势的判断是正确的.

关键词: 蒙特卡罗;转移概率密度;极大似然估计;扩散方程

中图分类号: F830.91 **文献标识码:** A

1 问题提出

描述股价运行经典的方法是扩散方程:

$$\mathrm{d}X = \mu(X;\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}t + \sigma(X;\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}W$$
$$X(t_0) = X_0 \tag{1}$$

式中,$X(t_0)$为t_0时刻的股价,W为一标准布朗运动,$\boldsymbol{\theta}$为此扩散方程的参数.此外,我们还拥有可供分析的样本$\{X_i = X(t_i), i=0,\cdots,n\}$

对式(1)的求解很困难,本文并不打算把$X(t)$的具体解析表达式求出来,本文所关心的是$P(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta})$,它表示从$s$时刻到$t$时刻$X(t)$的转移概率密度.

Karatzas 和 Shreve[1]曾指出,$\mu(\cdot)$和$\sigma(\cdot)$如满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件,那么$P(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta})$就是存在的,且

$$P^{(1)}(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta}) = \Phi(X_t;X_s+\mu(X_s;\boldsymbol{\theta})(t-s),\sigma^2(X_s;\boldsymbol{\theta})(t-s)) \tag{2}$$

为其一阶估计.所以,只要$(t-s)$很小,就可以用式(2)来代替$P(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta})$.

对于$(t-s)$较大的情况,可以对这一时间段分段,令$s=\tau_0<\cdots<\tau_m$为$[s,t]$的一个划分,然后有:

$$P^{(M)}(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta}) = \int\prod_{m=1}^{M}P^{(1)}(u_m,\tau_m;u_{m-1},\tau_{m-1},\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}L(u_1,\cdots,u_{M-1}) \tag{3}$$

---

* **收稿日期:** 2003-07-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071082),教育部博士点基金,中国科学院和中国科技大学创新基金资助项目.

作者简介: 吴振翔,男,1977年生,博士.研究方向:金融工程.E-mail:wzhx@ustc.edu

其中，$L(u_1, \cdots, u_{M-1})$为$(u_1, \cdots, u_{M-1})$的 Lebesgue 测度.

Pedersen[2]证明了：

$$\lim_{M\to\infty} P^{(M)}(X_t, t; X_s, s, \boldsymbol{\theta}) = P(u_m, \tau_m; u_{m-1}, \tau_{m-1}, \boldsymbol{\theta}) \tag{4}$$

Pedersen[3]用 Monte Carlo 方法产生 $u_1 \cdots, u_{M-1}$来计算式(3)的积分，进而求得 $P(X_t, t; X_s, s, \boldsymbol{\theta})$的值. Elerian[4]、Kessler[5]、Shoji 和 Ozaki[6]等人分别又提出了各种改进的方法，但是总体仍然是 Pedersen[3]的思想. Durham 和 Gallant[7]对很多模型做了验证，但只是对扩散方程参数的检验. 本文把 Pedersen 的方法用到了实证，并得出一些对投资者有价值的结果.

2 模型和算法

2.1 选取合适的扩散模型

本文所用的扩散模型为

$$\mathrm{d}X = \theta_2(\theta_1 - X)\mathrm{d}t + \theta_3\sqrt{X}\mathrm{d}W \tag{5}$$

2.2 根据历史数据估计 $\boldsymbol{\theta}$

令 s 为当前时刻，X_s为当前股价，$\{X_i = X(t_i), i=0, \cdots, n\}$为最近的一些历史样本，且这些样本的时间间隔都很小，均为 δ，因此，可以用式(2)来代替 $P(X_t, t; X_s, s, \boldsymbol{\theta})$，这样就可以构造似然函数：

$$\begin{gathered} L(X_0, \cdots, X_n; \boldsymbol{\theta}) = \\ \prod_{i=1}^{n} P(X_i, t_i; X_{i-1}, t_{i-1}, \boldsymbol{\theta}) = \\ \prod_{i=1}^{n} \Phi(X_i; X_{i-1} + \theta_2(\theta_1 - X_{i-1})(t_i - t_{i-1}), {\theta_3}^2 X_{i-1}(t_i - t_{i-1})) \end{gathered} \tag{6}$$

对 $\boldsymbol{\theta}$ 极大化 $L(X_0, \cdots\cdots, X_n; \boldsymbol{\theta})$可得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的极大似然估计 $\boldsymbol{\theta}^*$ 作为对参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计.

2.3 X_t 时刻(未来的某一时刻)某一特定价格发生的概率密度

把$[s, t]$等分为 M 段：$s = \tau_0 < \cdots < \tau_M = t$，且每一个间隔都是 δ，利用 Monte Carlo 方法产生一个标准布朗运动序列$(W_1, \cdots, W_{M-1})$，再根据式(7)，把$(W_1, \cdots, W_{M-1}; \boldsymbol{\theta}^*)$对应到$(u_1, \cdots, u_{M-1})$上去：

$$\begin{gathered} u_{m+1} = u_m + \theta_2^*(\theta_1^* - u_m)\delta + \theta_3^* \sqrt{u_m}\delta^{1/2} W_{M+1} \\ u_0 = X_s \qquad u_m = X_t \end{gathered} \tag{7}$$

如此，作 K 次这样的 Monte Carlo 模拟，共产生 K 组$(u_1, \cdots, u_{M-1})$，记为

$$(u_{k,1}, \cdots, u_{k,M-1}) \qquad k = 1, \cdots, K$$

且 $u_{k,0} = X_s, u_{k,M} = X_t$，根据式(3)，运用 Monte Carlo 积分，有

$$P(X_t, t; X_s, s, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \frac{\prod_{m=1}^{M} P^{(1)}(u_{k,m}, \tau_m; u_{k,m-1}, \tau_{m-1}, \boldsymbol{\theta}^*)}{Q(u_{k,1}, \cdots, u_{k,M-1})}$$

其中 $Q(\cdot)$为$(u_{k,1}, \cdots, u_{k,M-1})$的概率密度函数，由于

$$Q(u_{k,1}, \cdots, u_{k,M-1}) = Q(u_{k,1}, \cdots, u_{k,M-1} \mid u_{k,0}) = \prod_{m=1}^{M-1} P^{(1)}(u_{k,m}, \tau_m; u_{k,m-1}, \tau_{m-1}, \boldsymbol{\theta}^*)$$

得
$$P(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta}^*)=$$
$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}P^{(1)}(X_t,t;u_{k,M-1},\tau_{M-1},\boldsymbol{\theta}^*)=$$
$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\Phi(X_t;u_{k,M-1}+\theta_2^*(\theta_1^*-u_{k,M-1})\delta,\theta_3^{*2}u_{k,M-1}\delta) \tag{8}$$
对于不同数值的 X_t，分别求出其转移概率密度 $P(X_t,t;X_s,s,\boldsymbol{\theta})$，并作出概率密度图，这样，作为一个随机数，$t$ 时刻股票价格的分布情况就很清楚了.

3 实际数据处理

所采集的样本是上证指数 2001 年 2 月 26 日到 2001 年 3 月 26 日每天的收盘价. 之所以没有选取比较靠近现在的数据，主要是考虑到自从 2001 年 6 月国有股可能减持这一消息发布之后，股市发生政策性的下挫，同时振荡加剧，股市的政策效应较浓，这已经不是数学方法可以描述的了.

选取的 δ 为 1 天，当前时刻股价 X_s 为 2001 年 3 月 26 日的收盘价 2089.88 点，X_t 为 X_s 过后 8 个交易日的收盘价.

为了方便起见，对原始数据进行了一点预处理，即把每天的数据均除以 1000，根据这些处理后的样本数据，运用极大似然估计的方法(见式(6))，得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计值：

$$\boldsymbol{\theta}^*=(2.3039,0.0229,0.01)$$

根据式(8)，用 Monte Carlo 方法计算出 X_t 为 1 900 点～2 300 点之间各个数值的概率密度(根据计算，在 2 000 之前和 2 300 之后，发生的概率密度已经小于 0.000 01，这里就不予计算了)，当然这里不可能把 1 900～2 300 之间每一个实数的概率密度都计算出来，本文采取的做法是每隔 0.1 计算一次，共计算了 4 001 个概率密度.

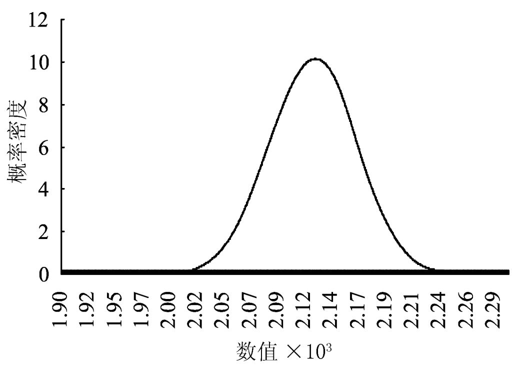

图 1 X_t 的条件概率密度

Fig. 1 The conditional probability density of X_t

对于式(8)中的模拟次数 K，本文选取的是 1 024 次.

根据 1 900～2 300 之间各数值的概率密度，作出$(X_t|X_s,\boldsymbol{\theta})$的概率密度图(图 1).

4 转移概率密度的应用——预测、风险分析

在股市中，有很多的不确定因素，谈到对未来某时刻股价的预测，具体到某一数值的精确预测意义是不大的，对实际操作更有意义的往往是股价在将来会在什么样的范围内(预测范围)、不低于多少(买者关心的风险)以及不高于多少(卖者关心的风险)，而转移概率密度是可以较好的回答这些问题的，这也正是本文的应用价值.

以上面的数据和结果为例，转移概率密度图可给出 X_t 在一定概率意义下的置信区间. 例如，60％概率的置信区间为(2 092，2 157.9)，这是 $M=8,\delta=1,K=1\ 024$ 的一次模拟结果

(这个结果是稳定的,本文还做了几次同样的模拟运算,各次运算的各个概率分位点见表 1). 而 8 个交易日过后,也就是 2001 年 4 月 5 日,上证指数的收盘价为2 112.6,从图 1 中可看出,这差不多正是概率密度最大值附近. 另外,X_t 的 50%分位点为 2 125.4,与实际值也相去不远. 这些都说明,这种方法的预测效果是十分有效的.

表 1 几次模拟结果比较

Tab. 1 Comparison of some simulated results

	分位点		
	20%	80%	50%
第一次	2 092	2 157.9	2 125.4
第二次	2 092.5	2 158.9	2 125.9
第三次	2 092	2 157.2	2 125.3

此外,还可以用转移概率密度来计算某一概率的分位点,例如 20%分位点为 2 092 点,80%分位点为 2 157.9 点,这就说明上证指数在 8 日后以 80%的概率不低于 2 092 点,以 80%的概率不高于 2 157.9 点,从而为操作者买卖股票提供了对风险判断的依据. 事实上,有了 80%的把握,对一般投资者而言,都还是能够承受这一风险的,而不同的投资者还可以根据自己对风险偏爱程度和承受能力选择不同概率的分位点,进行投资风险分析.

5 结论分析

(Ⅰ)用概率来对股价进行预测和风险分析,具有一定的实际应用价值,而且得出的结果也比较稳定.

(Ⅱ)所获结果是未来价格 X_t 的一个分布,这不仅仅是几个随机变量的数字特征,其应用价值值得继续深入研究.

(Ⅲ)求转移概率密度的方法只适用于短期的情况,即 $t-s$ 不是很大的情况. 实际上,对于股市而言,长期的行情受很多突发事件的影响,是不可能用数学方法来分析得到的.

(Ⅳ)本文的方法对一段比较单调的行情效果比较好,而对于从当前到待分析时刻期间有反转行情的效果不是很好,正是基于这一点,文中所选取的数据是处于一段比较单调的行情中的. 究其原因,是因为模型是根据样本中数据来分析股价的走势,并用这个走势来模拟未来的行情,进而的到结果,并没有对行情的变化加以分析. 不过这也是数学分析无能为力的,关于这一缺点,是可以通过对历史数据提取更多信息来改进的,但不可能做到完全消除.

(Ⅴ)对于长短线投资者,可通过对时间细分刻度 δ 的选取来分析自己的投资方案,长线投资者可以选取较大的 δ,短线投资者可以选取较短的 δ.

参 考 文 献

[1] Karatzas I. Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus[M]. 2nd edition. New York: Springer, 1991.

[2] Pedersen A R. Consistency and asymptotic normality of an approximate maximum likelihood estimator for discretely observed diffusion processes[J]. Bernoulli, 1995, 1(3): 257-259.

[3] Pedersen A R. A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differenti-

al equations based on discrete observations [J]. Scandinavian Journal of Statistics, 1995, 22: 55-71.

[4] Elerian O. A note on the existence of a closed form conditional transition density for the milstein scheme [DB/OL]. http://www.nuff.ox.ac.uk/enomics/popers/index/1998.

[5] Kessler M. Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations [J]. Scandinavian Journa of Statistics, 1997, 24: 211-229.

[6] Shoji I, Ozaki T. Estimation for nonlinear stochatic differential equation by a local linearization method [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1998, 16: 733-752.

[7] Durham Garland B, Gallant A Ronald. Numerical techniques for maximum likehood estimation of continuous-time diffusion processes [J]. Journal of Business & Economic Statistics, 2002, 20(3): 297-316.

An Application of Transition Probability Density Calculated by Monte-Carlo Method

WU Zhen-xiang[1], MIAO Bai-qi[2], XIAO Jing-hong[2]

(1. *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)

(2. *Dept. of statistics & Finace*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Based on the diffusion equation, the transition probability density of stock prices is calculated by means of the Monte-Carlo method. Then, the confidence interval of future stoch prices based on a certain probability is obtained, and as an application, some risk analyses were conducted. The empirical analysis on Shanghai Stock-Market Index shows that the method is capable of correctly predicting stock price movements.

Key words: Monte-Carlo; transition probability density; MLE; diffusion equation