

二相交通流 LWR 模型的理论分析与数值模拟^{*}

张 鹏^{1,2}, 刘儒勋¹, 戴世强²

(1. 中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026; 2. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘要: 从特征速度、非严格双曲性质以及特征分解等几个重要方面, 讨论了二相交通流 LWR 方程, 并设计具有高分辨和高阶精度的 WENO (weighted essentially non-oscillatory) 数值逼近方法. 数值算例结合 Riemann 问题以及实际的交通流现象进行设计和分析, 得到了满意的数值结果. 数值方法以及一些理论结果可以推广到多相交通流的 LWR 模型.

关键词: 特征速度; WENO 方法; Runge-Kutta 离散; 激波; 稀疏波

中图分类号: O35 **文献标识码:** A

AMS Subject Classifications (2000): Primary 35L45; Secondary 65M06

0 引言

交通流连续介质理论以 LWR 模型^[1,2]为标志, 之后提出的 PW 模型^[3,4]可作为高阶连续模型(或称为动力学模型)的代表. 两者均为双曲守恒形式, 包含激波间断和稀疏波. 前者为运动学模型; 后者为动力学模型, 其松弛项反映了一定程度的粘性效应.

PW 模型的高阶效应来自对驾驶员的“前瞻”(look-forward), 可由车辆跟驰理论推导而得, 即认为车辆的速度主要取决于它与前车的车距(密度), 同时也与这一密度与其下游密度的差值(密度梯度)有关. 这一假定对离散的车辆跟驰理论无疑是合理的, 但通过取极限而得到的连续加速度方程后却出现了问题. 这是因为, 若将驾驶员的“前瞻”改为“后瞻”, 可以推导出完全相同的加速度方程.

Daganzo^[5]首先指出了 PW 类模型普遍存在的上述不合理现象, 即车辆速度受到来自上游车流的影响. 与此相对应, 在高阶模型中存在这样两簇特征线: 1—簇特征线速度小于车流速度, 表示解函数的影响域为下游; 2—簇特征线速度大于车流速度, 解函数的影响域为上游. 后一结果显然违背了交通流“各向异性”(anisotropic)的性质, 即当模型方程已假设或蕴含没有超车时, 车辆只能对前方的扰动产生反映. 进一步的不合理结果为, “后瞻”可使速度为负(wrong way traffic), “前瞻”可使速度过大.

LWR 模型(指无粘方程)虽然不存在上述的问题, 但其对于交通流的描述被认为过于

^{*} 收稿日期: 2003-06-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472064, 10371118), 中国博士后科学基金资助项目(2003034254), 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20040280014).

作者简介: 张鹏, 男, 1963年生, 博士, 副教授. 研究方向: 计算流体力学. E-mail: pengzhang@ustc.edu

简单,不能解释很多被观测到的非平衡状态的交通流现象^[6].针对这些问题,近年来交通流连续模型有了新的发展,明显出现两种趋势.一方面,文献[7]修正了PW类模型,还原了交通流“各向异性”的性质;另一方面,文献[8]将LWR模型加以推广,建立了多种车型混流的运动学模型.

后一类模型是本文研究的对象.根据车辆性能等因素,其数学建模将车辆分为 M 种类型或等级.对第 m 等级,将其密度、速度和流量分别记为 $\rho_m(x,t)$ 、 $v_m(x,t)$ 和 $q_m(x,t)$,得到以下质量守恒方程组:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial q_m}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (1)$$

其中

$$q_m = \rho_m v_m, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (2)$$

若将混合车流视为整体,并将其交通流密度、速度和流量分别记为 $\rho(x,t)$ 、 $v(x,t)$ 和 $q(x,t)$,那么这些变量可由以上各等级的交通变量完全确定,即

$$\rho = \sum_{m=1}^M \rho_m, \quad q = \sum_{m=1}^M q_m, \quad v = \frac{q}{\rho} = \frac{\sum_{m=1}^M q_m}{\sum_{m=1}^M \rho_m}. \quad (3)$$

要封闭方程组(1),除关系式(2)外,还需要 M 个方程.类似于LWR模型,这里进一步假设各级车流的速度 v_m 都由车流的总密度 ρ 确定,记为

$$v_m = V_m(\rho), V_1(\rho) \leq V_2(\rho) \leq \dots \leq V_M(\rho), 1 \leq m \leq M. \quad (4)$$

以上 M 个函数满足交通流速度—密度假设关系的所有性质,不等式隐含车流速度能力随 m 的增加而增强.将式(4)代入式(2),再代入式(1),并记流量函数

$$Q_m(\rho_1, \dots, \rho_M) \equiv \rho_m V_m(\rho), \quad (5)$$

可得关于各级车流密度 ρ_m 的封闭守恒方程组:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_m(\rho_1, \dots, \rho_M)}{\partial x} = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (6)$$

注意当 $M=1$ 时,式(6)即为LWR模型.它与LWR模型的区别是对不同车型给出了不同的速度—密度相位曲线,所以本文将其称为多相的LWR模型.正是由于多相性,它所描述的交通流总车流密度与平均速度一般不再是原LWR模型的平衡状态,即并非始终满足所谓平衡的速度—密度假设关系.此外,本文的讨论将进一步显示,模型方程的一个重要特征是从理论上明确了交通流中的超车及其含义.

为理论上讨论的方便,取 $M=2$,即模型为 2×2 方程组.这时可以解出特征值和特征向量,但仍然不能得到显式的特征变量或Riemann不变量.这即是说,难以得到Riemann问题的精确解.所以本文主要讨论特征速度的不等式,指出这些不等关系对于所描述的交通流的物理含义,以及方程的本质上的严格双曲性质.对于 $M>2$ 的情形,仍有许多困难需要克服.

在数值模拟方面,本文采用高分辨和高阶的WENO(weighted essentially non-oscillatory)逼近与TVD Runge-Kutta时间离散(三阶),以克服模型方程难以进行特征分解的困难.数值结果将与Riemann间断分解的波形,以及一般交通流常识相互验证.文中的数值格式可以简单推广应用到 $M>2$ 的情形,为进一步的交通流理论和实验研究提供可靠的数值方法.

1 模型方程的双曲性质与特征分解

取 $M = 2$, 并将方程组(6)重新记为

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (7)$$

其中 $u = (\rho_1, \rho_2)^T$, $f(u) = (\rho_1 V_1(\rho), \rho_2 V_2(\rho))^T$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$. 可求出 Jacobian 矩阵

$$A = \frac{\partial f(u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ d_2 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

以上假定 $V_1'(\rho) > 0, V_2'(\rho) > 0$, 且记

$$\begin{aligned} c_1(u) &= V_1(\rho) + \rho_1 V_1'(\rho), & d_1(u) &= \rho_1 V_1'(\rho) \leq 0, \\ d_2(u) &= \rho_2 V_2'(\rho) \leq 0, & c_2(u) &= V_2(\rho) + \rho_2 V_2'(\rho). \end{aligned} \quad (9)$$

同时可解出 A 的特征值以及相应的特征向量:

$$\lambda_1 = \frac{c_1 + c_2 - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1 + c_2 + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (c_1 - c_2)^2 + 4d_1 d_2 \geq 0; \quad (10)$$

$$p_1 = (\lambda_1 - c_2 + d_1, \lambda_1 - c_1 + d_2)^T, \quad p_2 = (\lambda_2 - c_2 + d_1, \lambda_2 - c_1 + d_2)^T. \quad (11)$$

由于 $\Delta \geq 0, \lambda_{1,2}$ 为实数, 从而式(7)为双曲方程组. 当 $d_1 d_2 > 0$, 或 $c_1 \neq c_2$ 时, $\lambda_1 < \lambda_2$, 为严格双曲. 我们首先假设 $d_1 d_2 > 0$, 讨论特征速度所满足的不等式, 并分析其意义. 由式(9), 可推出

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_1 - V_2 + d_1 + d_2)^2 + 4d_2(V_2 - V_1)} \leq |V_1 - V_2 + d_1 + d_2| = V_2 - V_1 - d_1 - d_2.$$

进一步, 利用式(10)可得到

$$\lambda_1 \geq V_1 + d_1 + d_2, \quad \lambda_2 \leq V_2. \quad (12)$$

注意以上各不等式中等号成立当且仅当 $V_1 = V_2$.

类似以上的推导, 或直接利用轮换对称性, 也有

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_2 - V_1 + d_1 + d_2)^2 + 4d_1(V_1 - V_2)} \geq |V_2 - V_1 + d_1 + d_2|. \quad (13)$$

上式蕴含

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_2 - V_1 + d_1 + d_2)^2 + 4d_1(V_1 - V_2)} \geq V_1 - V_2 - d_1 - d_2,$$

再次利用式(10), 可推出

$$\lambda_1 \leq V_2 + d_1 + d_2, \quad \lambda_2 \geq V_1. \quad (14)$$

注意在式(13)、(14)的所有不等式中, 等号成立当且仅当 $V_1 = V_2, V_1 - V_2 - d_1 - d_2 \geq 0$, 即 $V_1 = V_2$. 式(14)也蕴含

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(V_2 - V_1 + d_1 + d_2)^2 + 4d_1(V_1 - V_2)} \geq V_2 - V_1 + d_1 + d_2,$$

仍然利用式(10), 有

$$\lambda_1 \leq V_1, \quad \lambda_2 \geq V_2 + d_1 + d_2. \quad (15)$$

以上等号成立, 当且仅当 $V_1 = V_2, V_2 - V_1 + d_1 + d_2 \geq 0$. 这等价于 $V_1 = V_2, d_1 = d_2 = 0$, 但后一条件与假设不符.

综合式(12)、(14)和式(16), 在 $d_1 d_2 > 0$ 的假定下, 我们有

$$V_1 + d_1 + d_2 \leq \lambda_1 < V_1 \leq \lambda_2 \leq V_2. \quad (16)$$

不等式(16)反映了模型方程特征线传播的基本特征, 下面讨论其物理意义.

若 $V_1 < V_2$, 则车流 2(快车)的速度同时大于 1-簇特征速度与 2-簇特征速度, 表明它

只受到来自下游扰动的影响. 这与 1 型车辆不被其它车辆(包括与它同型车辆)超车的事实相吻合. 另一方面, 车流 1(慢车)的速度大于 1-簇特征线速度而小于 2-簇特征线速度, 这表明它同时受到来自上下游扰动的影响, 上游的影响即为 2-簇特征线, 由被超车引起.

若 $V_1 = V_2 \equiv V$, 则 $\lambda_1 = V(\rho) + d_1 + d_2 = V(\rho) + \rho V(\rho)$, $\lambda_2 = V$. $\lambda_2 = V$ 的含义为车流 1 与车流 2 同步, 必然对应接触间断. 这时分别记与 1-簇与 2-簇特征线相对应的特征变量或 Riemann 不变量为 w_1 与 w_2 , 则它们满足

$$\nabla w_1 \cdot p_2 = 0, \quad \nabla w_2 \cdot p_1 = 0, \quad \nabla = (\partial/\partial \rho_1, \partial/\partial \rho_2),$$

其中 p_1 和 p_2 由式(11)给出. 不难解出

$$w_1 = \rho_1 + \rho_2, \quad w_2 = \rho_1/\rho_2.$$

可见这时 1-簇特征线所传播的信息是车流的总密度 ρ 不变, 而 2-簇特征线传播的信息是使“两种”车流在并行时保持不变的比例. 如果只关心车流的总密度, 则模型方程与原来的 LWR 模型是完全等价的. 事实上, 将式(7)的两个标量方程相加即可得到 LWR 模型.

如果取消 $d_1 d_2 > 0$ 的限制, 允许 $d_1 d_2 = 0$, 这时式(12)~(16)的所有不等式仍然成立, 只是等号成立的条件可相应放宽, 在式(16)中允许 $\lambda_1 = \lambda_2$. 此外, 若 $d_1 = 0$ (或 $d_2 = 0$), 可以验证推广 LWR 模型与原 LWR 模型的等价性, 这里不作详细讨论. 下面考虑模型方程(7)为严格双曲性质时矩阵 $|A|$ 的计算, 并推广到一般的情形.

假设 $\lambda_1 < \lambda_2$, 则(11)可构成可逆的相似变换矩阵 $P = (p_1, p_2)$, 且有

$$A = P \Lambda P^{-1}, \quad \Lambda = (\delta_{ij} \lambda_i)_{2 \times 2}.$$

通过公式 $|A| = P |\Lambda| P^{-1}$, 可以算出

$$|A| = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 |\lambda_1| - \lambda_1 |\lambda_2| + c_1 (|\lambda_2| - |\lambda_1|) & d_1 (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \\ d_2 (|\lambda_2| - |\lambda_1|) & \lambda_2 |\lambda_2| - \lambda_1 |\lambda_1| - c_1 (|\lambda_2| - |\lambda_1|) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

假设 $\lambda_1 = \lambda_2$, 则其性态可被认为是 $\lambda_1 < \lambda_2$ 情形的极限, 即方程组(7)在某些条件下的非严格双曲性被认为是严格双曲性的极限. 注意到式(16)中的不等式仍然成立, 而且可以放宽为 $\lambda_1 \leq V_1 \leq \lambda_2$. 不妨固定 λ_1 , 这时上述的极限过程必然是 $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1 = V_1 \geq 0$. λ_1 与 λ_2 的非负性蕴含在极限过程中总有 $|A| = A$. 所以当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 我们定义 $|A| = A$.

2 模型方程的 WENO 逼近与 TVD Runge-Kutta 时间离散

对方程组(7)采用有限体积方法(FVM, finite volume method)进行空间离散, 取均匀网格分割, 如图 1 所示.

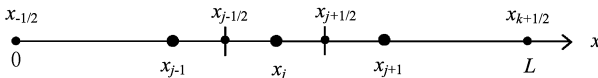


图 1 空间网格分割 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

Fig. 1 Cell division $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

相应的空间离散格式为

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x_j} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) = 0, \quad (18)$$

其中 u_j 为网格平均值,

$$u_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx, \quad (19)$$

数值流量量

$$\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}(u_{j+1/2}^-, u_{j+1/2}^+). \quad (20)$$

以上 \hat{f} 有多种形式, 例如 Van Leer 流量量^[9,10]

$$\hat{f}(v, w) = \frac{1}{2} \left[f(v) + f(w) - |A| \left(\frac{v+w}{2} \right) (w-v) \right], \quad (21)$$

其中当 $\lambda_1 < \lambda_2$ 时, $|A|$ 由式(17)给出; 否则 $|A| = A$. 此外, 常用 Lax-Friedrichs 流量量

$$\hat{f}(v, w) = \frac{1}{2} [f(v) + f(w) - \alpha(w-v)], \quad \alpha = \max_u \max_i |\lambda_i(u)|. \quad (22)$$

式(21)不易推广到 $M > 2$ 的方程组, 因为这时不能求出准确特征值, 从而无法对 A 进行对角化. 此外, 在某些情形, 所得数值解会收敛于非物理解. 而式(22)不受 $M = 2$ 的限制, 且保证收敛于熵解(物理解), 其缺点是产生较大的数值粘性. 然而, 这一问题可通过提高精度逼近 $u_{j+1/2}^\pm$ 来解决.

围绕如何确定网格边界值 $u_{j+1/2}^\pm$ 的问题, 形成了众多不同的数值方法. 一阶有限体积方法取 $u_{j+1/2}^- = u_j$, $u_{j+1/2}^+ = u_{j+1}$, 相应采用 Euler 时间离散. 高阶格式一般采用网格 I_j 及其附近的网格平均值来逼近 $u_{j+1/2}^\pm$ 和 $u_{j-1/2}^\pm$. 如果这些网格相对于 I_j 的位置是固定的, 例如在高阶有限体积法中取中心逼近, 则格式必然是线性的, 在激波附近必然产生非物理振荡. 因为 Godunov 定理表明没有高于一阶的线性的 TVD 格式. 如果对有限体积格式引入限制器(limiter), 从而实现格式的非线性性质, 则得到 TVD 格式. 在间断 Galerkin 有限元方法中引入的限制器也具有类似的效果. 可参考文献[11]和[12].

本文采用三阶 WENO 方法逼近网格边界值, 其中注意每一步骤是对向量 u 的每一个分量同时进行的. 以下给出简述, 详细的讨论可参考文献[12~15].

2.1 网格边界值的 WENO 重构

如果要选择 I_j 及其附近的共 k 个网格平均值来重构(reconstruction)一个次数不超过 $k-1$ 的多项式 $p_j(x)$, 使其为在网格 I_j 上对解函数 $u(x, t)$ 具有 k 阶精度的逼近多项式, 那么对这些网格平均值的选取共有 k 种取法. 将 I_j 左侧的网格(平均值)个数记为 r , $r = 0, \dots, k-1$, 并称集合 $S_r(j) = \{I_{j-r}, I_{j-r+1}, \dots, I_{j-r+k-1}\}$ 为一个模板(stencil). 我们记相应的逼近多项式为 $p_j^{(r)}(x)$, 考虑到守恒性, 它应该满足:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} p_j^{(r)}(x) dx = u_i, \quad i = j-r, \dots, j-r+k-1. \quad (23)$$

这样 $p_j^{(r)}(x)$ 可以被唯一确定, 从而将 I_j 的网格边界值取为:

$$u_{j-1/2}^{(r)+} = p_j^{(r)}(x_{j-1/2}), \quad u_{j+1/2}^{(r)-} = p_j^{(r)}(x_{j+1/2}), \quad r = 0, \dots, k-1. \quad (24)$$

例如当 $k = 2$ 时, 可以算出

$$\begin{aligned} u_{j-1/2}^{(0)+} &= 1.5u_j - 0.5u_{j+1}, & u_{j+1/2}^{(0)-} &= 0.5u_j + 0.5u_{j+1}, \\ u_{j-1/2}^{(1)+} &= 0.5u_{j-1} + 0.5u_j, & u_{j+1/2}^{(1)-} &= -0.5u_{j-1} + 1.5u_j. \end{aligned} \quad (25)$$

对于以上 k 个模板及其相应的逼近函数, ENO 方法只选择其中之一. 选择模板的方法

是利用解函数 $u(x, t)$ 的原函数对网格边界点的 Newton 插值多项式的承袭性质, 从只包含 I_j 的模板出发, 向左或向右扩展, 直到得到某个确定的含有 k 个相邻网格的模板. 其中每次向左或向右扩展模板时总是选择使以上 Newton 插值多项式较为光滑的一侧.

WENO 方法是对 ENO 方法的改进. 注意到以上 ENO 方法在选定模板时已经涉及到 $2k - 1$ 个网格及其平均值的计算, WENO 方法并不将其它的平均值弃而不用, 而是将式 (24) 中已经求出的 k 个网格边界值作加权平均, 作为 I_j 上解函数的网格边界值, 记为

$$u_{j-1/2}^+ = \sum_{r=0}^{k-1} \bar{\omega}_r u_{j-1/2}^{(r)+}, \quad u_{j+1/2}^- = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{j+1/2}^{(r)-}. \quad (26)$$

以上的权系数取为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad \bar{\omega}_r = \frac{\bar{\alpha}_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \bar{\alpha}_s}, \quad (27)$$

其中

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad \bar{\alpha}_r = \frac{\bar{d}_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, \quad r = 0, \dots, k-1. \quad (28)$$

式(28)中一般取 $\epsilon = 10^{-6}$, 其作用是防止分母为 0. d_r 与 \bar{d}_r 为可以算出的常数, 且满足关系: $\bar{d}_r = d_{k-1-r}$. β_r 被称为模板 $S_r(j)$ 上的光滑因子, 式(26)中权系数大小的可变性由它控制. 与 ENO 逼近的思想较为相近的是, 当对应模板 $S_r(j)$ 的解函数段及其逼近函数较为光滑时, β_r 较小, 从而对应权系数 ω_r 与 $\bar{\omega}_r$ 较大. 我们给出 $k = 2$ 时的 d_r 与 β_r :

$$d_0 = 2/3, \quad d_1 = 1/3, \quad \beta_0 = (u_{j+1} - u_j)^2, \quad \beta_1 = (u_j - u_{j-1})^2. \quad (29)$$

注意对于 $k = 2$ 的情形, 由式(25)~(29)给出了完整和明确的计算网格边界值的公式.

WENO 方法较 ENO 方法的优越性是显然的. 它使用了与 ENO 方法数目相同的网格平均值, 却可以达到 $2k - 1$ 阶精度; 因为省去了寻找所谓“最光滑”的模板的步骤, 节省了大量的储存. WENO 方法已被用于大量实际问题的计算并取得了十分理想的数值效果^[15].

2.2 时间方向的 TVD Runge-Kutta 离散

设初始条件 $u(x, 0)$ 已知, 其初始网格平均值 u_j^0 由式(19)取 $t = 0$ 给出, 并将半离散的方程组(18)记为如下形式:

$$u_t = L(u),$$

则取 m 步的 TVD Runge-Kutta 时间离散的步骤可写为下面的程序: 对 $n = 0, \dots, N$,

1) 设置 $u^{(0)} = u^n$;

2) 对 $i = 1, \dots, m$, 计算中间函数值

$$u^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} (\alpha_{il} u^{(l)} + \Delta t \beta_{il} L(u^{(l)}));$$

3) 设置 $u^{n+1} = u^{(m)}$.

这一方法由 Shu 等提出^[16], 基本特征是所有的系数 α_{il} 与 β_{il} 为非负, 且有 $\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1$. 若令 $\Delta t_{il} = \Delta t \beta_{il} / \alpha_{il}$, 则可将以上的中间函数值改写为

$$u^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} (u^{(l)} + \Delta t_{il} L(u^{(l)})).$$

这使得每一步的中间函数值 $u^{(i)}$ 都等于类似于 Euler 步离散所得到的一些函数值的凸组合.

该凸组合相当于一个正则格式或单调格式,使在适当的 CFL 条件下,每一步所得的解函数值始终保持原来 Euler 离散所具有的稳定性质,例如 ENO 和 WENO 格式的 TVB 性质.

为保证时间离散的误差与空间离散具有一致的精度,以上程序与前述的 WENO 重构方法相匹配的中间离散步数为 $m = 2k - 1$. 下面给出三阶逼近的系数:

$$m = 3: \alpha_{10} = 1, \alpha_{20} = 3/4, \alpha_{21} = 1/4, \alpha_{30} = 1/3, \alpha_{31} = 0, \alpha_{32} = 2/3$$

$$\beta_{10} = 1, \beta_{20} = 0, \beta_{21} = 1/4, \beta_{30} = 0, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = 2/3.$$

3 数值结果及其分析

由于在计算时只关心密度值的相对变化,在下面的讨论和数值结果图中将直接用无量纲的密度值 $\rho_1/\rho_m, \rho_2/\rho_m$ 和 ρ/ρ_m 替代方程(7)中的 ρ_1, ρ_2 和 ρ , 而且不改变记号,其中 ρ_m 为最大密度值. 显然无量纲密度变化的范围相应为 $[0, 1]$. 其次,以下的计算将车流 1 和车流 2 的速度-密度关系取线性函数,分别为

$$V_1 = V_{1f}(1 - \rho), \quad V_2 = V_{2f}(1 - \rho), \quad (30)$$

其中 V_{1f} 和 V_{2f} 分别为车流 1 和车流 2 的畅行速度,而且在以下的数值模拟中,总是取 $V_{2f} = 20$ m/s. 此外,尽管数值模拟的空间与时间区间分别被记为 $[0, L]$ 和 $[0, T]$,但在数值结果中其长度分别被按一定比例缩小,使 L 和 T 都分别对应于 1. 最后,我们将以下三个算例的初值设置为 Riemann 问题:

$$\rho_1(x, 0) = \begin{cases} \rho_{10}^-, & x < x_0, \\ \rho_{10}^+, & x > x_0, \end{cases} \quad \rho_2(x, 0) = \begin{cases} \rho_{20}^-, & x < x_0, \\ \rho_{20}^+, & x > x_0. \end{cases} \quad (31)$$

算例 1 车流 1 与车流 2 的融合

取 $L = 6\ 000$ m, $T = 400$ s, $\Delta x = 60$ m, $\Delta t = 0.4$ s, $V_{1f} = 14$ m/s. 在式(31)中,取 $\rho_{10}^- = 0, \rho_{10}^+ = 0.4, \rho_{20}^- = 0.4, \rho_{20}^+ = 0, x_0 = 600$ m.

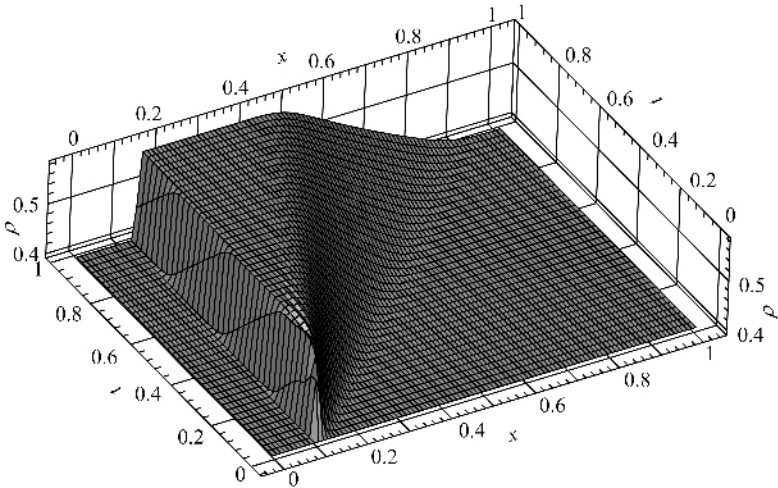


图 2 算例 1: 车流 1 与车流 2 的融合

Fig. 2 Example 1: Mixture of the two traffic flows

以上蕴涵初始时刻在 $x = x_0$ 上游只有车流 2, 在下游只有车流 1. 可以意料车流 2 将汇入车流 1, 并引起总密度的增加. 总车流密度变化的数值结果如图 2 所示, 从中可以看出在

初始间断 $x = x_0$ 的左侧为激波, 右侧为稀疏波, 而中间为常数状态. 这与 2×2 严格双曲守恒方程中 Riemann 问题间断解波形完全吻合.

算例 2 车流 1 与车流 2 的分离

取 $L = 8\ 000\ \text{m}$, $T = 400\ \text{s}$, $\Delta x = 80\ \text{m}$, $\Delta t = 0.4\ \text{s}$, $V_{1f} = 10\ \text{m/s}$. 在式(31)中取 $\rho_{10}^- = 0.2$, $\rho_{10}^+ = 0$; $\rho_{20}^- = 0$, $\rho_{20}^+ = 0.2$, $x_0 = 800\ \text{m}$.

以上蕴涵初始时刻在 $x = x_0$ 上游只有车流 1, 在下游只有车流 2. 由式(30)可以算出车流 2 的速度 $V_2 = 16\ \text{m/s}$, $V_2 > V_{1f}$. 可见车流 1 中不能跟上车流 2, 两种车流之间将形成随时间拉长的无车流路段. 数值模拟的总车流密度变化如图 3 所示, 注意图中流体的方向由右向左, 时间方向由里向外. 与 Riemann 间断分解相吻合的波形为左稀疏波、右激波和无车流的中间常数态.

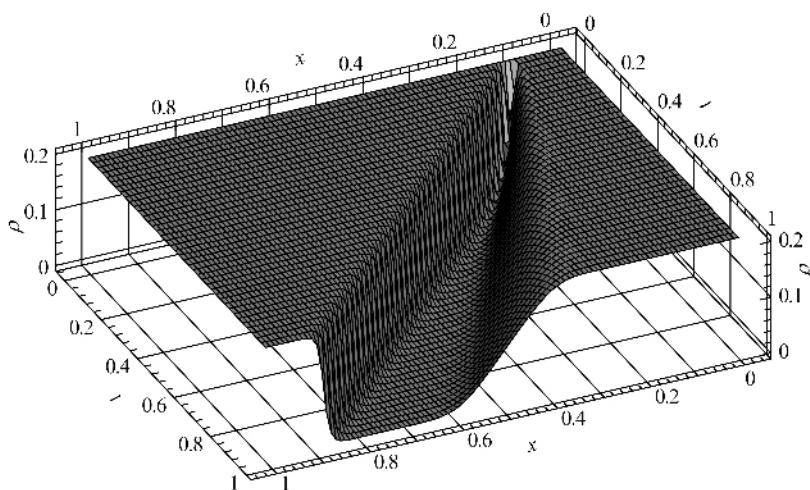


图 3 算例 2: 车流 1 与车流 2 的分离

Fig. 3 Example 2: Separation of the two traffic flows

算例 3 车流 1 与车流 2 的紧随

取 $L = 4\ 000\ \text{m}$, $T = 240\ \text{s}$, $\Delta x = 80\ \text{m}$, $\Delta t = 0.4\ \text{s}$, $V_{1f} = 14\ \text{m/s}$. 在式(31)中取 $\rho_{10}^- = 0.2$, $\rho_{10}^+ = 0$; $\rho_{20}^- = 0$, $\rho_{20}^+ = 0.44$, $x_0 = 400\ \text{m}$.

车流 1 和车流 2 的分布与算例 2 类似. 可以意料初始时当 $V_{1f} < V_2$ 时 Riemann 间断分解的波形与算例 2 相似; 当 $V_1 < V_2 < V_{1f}$ 时, 区别只是中间的常数态含有车流 1. 本算例为了进一步检验算法的高分辨性质, 设置初值满足 $V_1 = V_2$, 这时左稀疏波的波头和波尾将重合, 而右侧的激波使车流 1 与车流 2 始终分隔. 数值模拟的总车流密度变化如图 4 所示, 与 Riemann 间断分解的波形基本吻合.

以上的算例数值流量取式(21). 数值流量取式(22)可得到类似的数值结果.

算例 4 交通绿灯放行后的车流密度变化

取 $L = 2\ 000\ \text{m}$, $T = 50\ \text{s}$, $\Delta x = 20\ \text{m}$, $\Delta t = 0.2\ \text{s}$, $V_{1f} = 14\ \text{m/s}$. 初始条件设置车流 1 与车流 2 按 1:1 的比例混合, 总车流密度为

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 1, & 500 \text{ m} \leq x < 1000 \text{ m}, \\ 0, & 1000 \text{ m} \leq x < 1500 \text{ m}, \\ 0.5, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

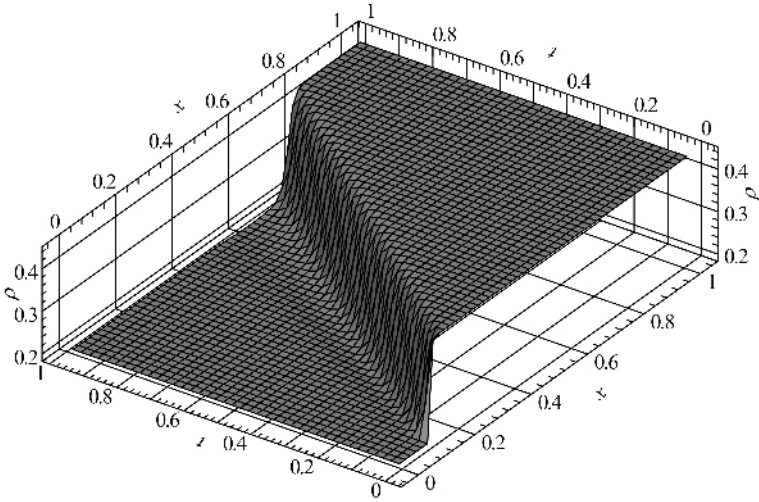


图 4 算例 3: 车流 1 与车流 2 的紧随

Fig. 4 Example 3: A close following of the two traffic flows

数值流通量取式(22). 由不等式(16), 显然可取 $\alpha = V_{2f}$. 总车流密度变化如图 5 所示, 注意其波形变化比 LWR 模型的计算结果^[17~20]更为复杂, 我们作如下说明.

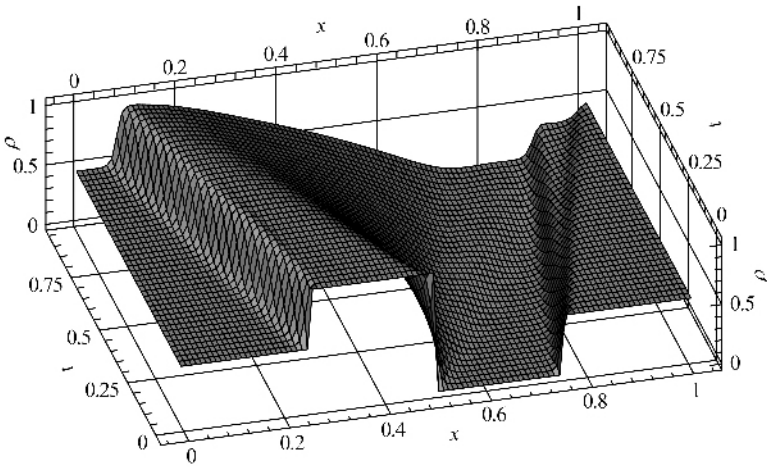


图 5 算例 4: 绿灯放行后的交通流密度变化

Fig. 5 Example 4: Change of traffic density after a green signal

由 $x = 500 \text{ m}$ 处所得的间断分解对 1-簇与 2-簇特征线均为激波. 在中间状态车流 1 密度小于车流 2 密度; 在右状态则正好相反. 注意这与车流 2 流动较快的事实是相符的, 这一点并不能由图 5 中直接看到, 但可以看出, 中间状态与右状态的总车流密度相等, 这与下游车流密度达到最大并处于等候状态时, 所有到来的上游车流(无论快慢)都必须停止等候的事实相符.

在放行的头车追上下游车辆前,由 $x = 1\ 000\text{ m}$ 处所得到的间断分解对 1-簇和 2-簇特征线均为稀疏波,由图中可以较清晰地看到中间的常数状态.由 $x = 1\ 500\text{ m}$ 处所得的间断分解对 1-簇与 2-簇特征线均为激波.

需要说明的是,本算例若采用式(21)中的 \hat{f} ,则在 $x = 1\ 000\text{ m}$ 处得到一个不满足 Lax 熵条件的静止激波,即在 $x = 1\ 000\text{ m}$ 处的流通量为 0.一般地,对于 Riemann 问题(31)中 $\rho^- > 0.5 > \rho^+$ 的情形,使用式(21)中的 \hat{f} 所得结果总是得到违反熵条件的静止激波,在其左右分别都为稀疏波.分析显示,其原因是 $|A|$ 为 0 或过小.

最后我们指出,若采用式(22)的数值流通量,则本文的数值方法可以自然推广到多相流 ($M \geq 3$) 的计算.

参 考 文 献

- [1] Lighthill M H, Whitham G B. On kinematics wave; II. A theory of traffic flow on long crowded roads[J]. Proc. Roy. Soc. London, Ser.. 1955, A22;317-345.
- [2] Richards P I. Shockwaves on the highway [J]. Operations Research, 1956, 4; 42-51.
- [3] Payne H J. Models of freeway traffic and control[A]. In: Bekey G A (ed.), Mathematical models of Public Systems, Vol. 1 Simulation Council Proc. [C], CA; La Jolla, 1971; 51-61.
- [4] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves [M]. NY: John Wiley and Sons, 1974.
- [5] Daganzo C F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow[J]. Transpn. Res. -B. . 1995, 29B(4): 277-286.
- [6] Helbing D. Traffic and related self-driven many partical systems[J]. Reivews of Modern Physics, 2001, 73; 1067-1141.
- [7] Aw A, Rascle M. Resurrection of "second order" models of traffic flow[J]. SIAM J. Appl. Math. . 2000, 60(3): 916-938.
- [8] Wong G C K, Wong S C. A multi-class traffic flow model-an extension of LWR model with heterogeneous drivers[J] Transpn. Res. A. 2002, 36; 827-841.
- [9] Harten A, Lax P D, B Van Leer. On up-stream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. SIAM Review, 1983, 25(1); 35-61.
- [10] B Van Leer. Upwind differencing for hyperbolic systems of conservation laws[A]. in Numerical Methods for Engineering, Paris; Dunod, 1980, 1; 137-149.
- [11] Toro E F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics [M]. New York; Springer-Verlay, 1997.
- [12] 刘儒勋、王志峰, 数值模拟方法和运动界面追踪[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001.
- [13] Harten A, Engquish B, Osher S, Chakravarthy S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III[J]. J. Comput. Phys. . 1987, 71; 231-303.
- [14] Jiang G, Shu C W, Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J. Comput. Phys. . 1996, 126; 202-228.
- [15] Shu C W. Lecture Notes in Mathematics-Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[R]: 1697, Cetraro, Italy; Springe, 1997; 329-432.
- [16] Shu C W. Total-Variation-Diminishing time discretizations[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computation. 1988, 9 (6): 1073-1084.
- [17] LIU Ru-xun, LI Hong, The discontinuous finite element method for red-and-green light models for the traffic flow[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2001, 56 (1): 55-67.
- [18] 张鹏, 刘儒勋. 交通流问题的有限元方法和模

- 拟(D)[J]. 计算物理. 2001, 18(4): 229-333.
- [19] 张鹏, 刘儒勋. 交通流问题的有限元方法和模拟(II)[J]. 计算物理. 2002, 19(2): 142-148.
- [20] 张鹏, 刘儒勋. 交通流问题的有限元方法和模拟(III)[J]. 计算物理. 2003, 20(2): 130-136.
- [21] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes[J]. J. Comput. Phys. . 1994, 115: 200-212.
- [22] Zhang Peng, Liu Ru-xun. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux (I): Characteristics theory and Riemann problem [J]. J. Comput. Appl. Math. . 2003, 156: 1-21.
- [23] 戴世强, 冯苏苇, 顾国庆. 交通流动力学: 它的内容、方法和意义[J]. 自然杂志, 1997, 11: 196-201.

Theoretical Analysis and Numerical Simulation on a Two-phase Traffic Flow LWR Model

ZHANG Peng^{1,2}, LIU Ru-xun¹, DAI Shi-qiang²

(1. Department of Mathematics, USTC, Hefei 230026, China)

(2. Shanghai Institute of Applied Mathematics & Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

Abstract: This paper deals with a two-phase traffic flow LWR model in analyzing the characteristic speeds, strictly hyperbolic property and characteristic decomposition. By designing the high-resolution and higher order accuracy WENO (weighted essentially nonoscillatory) scheme, it achieves satisfactory numerical results that are in accordance with the Riemann's solver as well as the real traffic flow phenomena. It is not difficult for the numerical scheme to be extended to the corresponding multi-phase traffic flow model.

Key words: characteristic speed; WENO method; TVD Runge-Kutta discretization; shock; rarefaction