

# 一种基于代数图论的有限元模型节点排序方法

荆国强, 陈德伟

(同济大学 桥梁工程系, 上海 200092)

**摘要:** 提出了一种基于有限元模型中节点自由度构造赋权单元团图的方法, 根据代数图论的理论, 应用赋权单元团图的拉普拉斯矩阵的 Fiedler 向量, 对有限元模型的节点进行排序, 以达到减少结构刚度矩阵的半带宽和外形的目的. 该方法不但能适用于一般有限元模型, 而且适用于包含不同类型单元、具有不同自由度节点的混合节点模型. 对于混合节点模型, 该方法比基于单元团图的拉普拉斯矩阵的代数图论方法能够取得更加满意的结果. 据此编制的前处理程序, 可以对任意编号的模型进行优化处理. 数值算例结果表明本方法是有效的.

**关键词:** 有限元; 代数图论; 节点排序; 矩阵半带宽和外形  
**中图分类号:** O 242.21 **文献标识码:** A

## A Finite Element Nodal Ordering with Algebraic Graph Theory

JING Guoqiang, CHEN Dewei

(Department of Bridge Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A new methodology is proposed for construction of weighted element clique graph (WECG) based on nodal degrees of freedom. The Fiedler vector of the Laplacian Matrix of WECG is used for reduction of the bandwidth and profile of stiffness matrix in finite element analysis. The present method is not only suitable for common finite element models, but also for models including different nodal degrees of freedom of element in number and usually leads to better results for the latter models compared with common methodology of algebraic graph theory based on Laplacian Matrix of element clique graph. A pre-processing routine based on the present method is embedded in a finite element program, which can reduce the generation task of finite element model without consideration of nodal ordering. The numerical experiments show that the present method is

efficient.

**Key words:** finite element; algebraic graph theory; nodal ordering; bandwidth and profile of matrix

采用有限元法进行结构的精细化分析时, 因结构网格的划分有一定的精度要求, 往往会导致单元和节点数量非常庞大, 从而使得结构精细化分析变得非常困难, 失去实用意义. 众所周知, 结构的刚度矩阵是大型的稀疏矩阵, 为节省存储空间, 一般采用 1 维变带宽数组存储结构刚度矩阵, 刚度矩阵的半带宽和外形决定着计算时间和 1 维数组的存储空间. 尤其在非线性问题和施工仿真等问题的结构分析中, 需要多次迭代计算, 刚度矩阵的半带宽对结构分析的整体计算时间的影响更为明显. 单元网格中节点编号的顺序决定着刚度矩阵的半带宽, 在运算分析之前对节点编号进行优化排序, 能显著减少刚度矩阵的存储空间和结构分析的计算时间.

节点编号排序的大部分方法是将问题转化为有限元网格所生成的各种图的顶点排序问题, 文献[1]中分析了反映有限元网格关系的 9 种图. 节点编号排序算法大致可以分为 3 类: ①基于图论的方法; ②基于代数图论的方法; ③以上 2 种的混合方法.

第一类方法是直接利用图的相关参数或者这些参数的函数, 作为图的顶点排序优先级的依据, 在排序的不同阶段加以比较而确定各顶点的顺序. 文献[2-5]提出的算法都属于这一类. 此类方法的优点是速度快, 计算简单.

第二类方法是利用图的相关矩阵的特征向量的特性, 对图的顶点进行排序. 文献[6-7]分别采用邻接矩阵的第一特征向量和 Fiedler 向量的特性对图的顶点排序. Fiedler 向量是图的拉普拉斯矩阵的第

收稿日期: 2009-03-24

作者简介: 荆国强(1980—), 男, 博士生, 主要研究方向为桥梁工程. E-mail: guoqiangjing1061@msn.com

陈德伟(1956—), 男, 研究员, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁工程. E-mail: chendewei@hotmai.com

二特征值对应的向量,在代数图论中有着重要的应用.这类方法获得的结果要优于第一类方法,由于要求解特征值问题,故其计算时间要比第一类方法长.

混合方法就是结合2种方法的主要特征,改善顶点排序的结果和计算效率.Kaveh等<sup>[8]</sup>使用图的相关参数来提高基于代数图论方法的效率.

本文在Kaveh等<sup>[9]</sup>的基于代数图论的多层次排序方法的基础上,提出了混合节点有限元模型节点编号排序的方法.所谓混合节点是指在有限元模型中节点具有不同的自由度数,例如在结构3维分析模型中,可能会同时采用3自由度的实体单元和6自由度的板壳单元,或者同时采用3自由度的空间桁架和6自由度的空间梁单元.现有的方法将图的所有顶点和边的性质视作相同,这样做简化了问题,对于有限元模型中节点自由度数相同的情况,能够取得很好的结果.虽然对混合节点有限元模型,也能取得较好的效果,但是并不是最好的.

本文提出的方法是形成赋权单元团图,即单元团图中顶点和边的权是基于有限元网格中相应节点的自由度,也就是说图中顶点和边的权反映了有限元模型中节点和单元的性质.根据赋权单元团图对顶点进行排序,进而得到有限元模型节点编号的排序.依据本方法编制的前处理程序对任意编号的有限元模型(结点编号可以随意取用,甚至不连续)进行节点编号的优化,提高了有限元结构分析的效率,程序还可以很方便地为其他有限元通用软件生成高效和实用的分析模型.

## 1 基本定义

### 1.1 图论基本概念

图 $G(V, E)$ 包含顶点集合 $V$ 和边集合 $E$ .每条边连接2个不同的顶点,这2个顶点称为这条边的端点,这条边的端点称为与这条边关联,与同一条边关联的2个端点称为邻接.与顶点关联的边的数量称为顶点的度数.对图 $G(V, E)$ 的边 $(v_i, v_j)$ 相应地有数 $l_{ij}$ 称为边 $(v_i, v_j)$ 的权, $G$ 连同在它边上的权称为赋权图.每对顶点均有1条边相连的简单图称为完全图.

设图 $G(V, E)$ 中顶点集合 $V$ 包含 $n$ 个顶点,则其邻接矩阵 $A$ 是一个 $n$ 阶矩阵,各元素为

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{顶点 } i \text{ 与 } j \text{ 邻接} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

度数矩阵 $D$ 是一个对角阵,对角元素 $d_{ii}$ 为第 $i$

个顶点的度数.

拉普拉斯矩阵 $L$ 定义为: $L = D - A$ .因此, $L$ 的元素为

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{顶点 } i \text{ 与 } j \text{ 邻接} \\ d_{ii}, & i = j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

### 1.2 有限元及单元团图

设有限元的结构刚度矩阵为 $n \times n$ 的方阵 $K$ ,则其第 $i$ 行的半带宽为

$$b_i = i - j_{\min}(i) + 1$$

式中, $j_{\min}(i)$ 是第 $i$ 行中 $k_{ij} \neq 0$ 的最小下标 $j$ .

则矩阵 $K$ 的半带宽和外形分别定义为

$$B = \max_i \{b_i\}$$

$$P = \sum_{i=1}^n b_i$$

在结构分析中,一般采用1维变带宽矩阵存储结构的刚度矩阵,计算时间和结构刚度矩阵的存储的复杂性分别是 $O(nB^2)$ 和 $O(P)$ ,因此优化半带宽和外形能显著减少计算时间和存储量.

在文献[1]中分析了反映有限元网格关系的9种图,利用这些图可以很容易地将有限元节点排序问题转化为图的顶点排序问题.在本文有限元网格的图采用单元团图,即图的顶点采用有限元网格中的节点,如果图中的2个顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 在有限元网格中属于同一单元的节点,则这2个顶点就形成一条边 $(v_i, v_j)$ .图1所示的是一个包含3节点三角形单元和4节点矩形单元的有限元网格图及其单元团图.

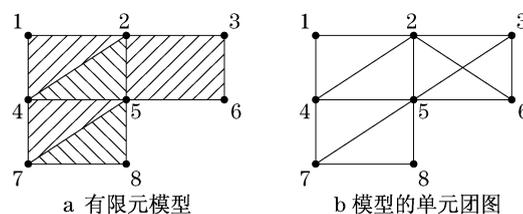


图1 有限元网格及其单元团图

Fig.1 Finite element mesh and element clique graph

### 1.3 多层次方法

基于代数图论的方法是以图的有关矩阵的特征向量的特性为基础的,需要求解特征值和特征向量,通常求解特征值和特征向量会用到矩阵的分解.Kaveh<sup>[9]</sup>提出了多层次方法,有效地应用于有限元网格的节点和单元排序.这种方法将求解拉普拉斯矩阵的第二特征值问题转化为计算补足拉普拉斯矩阵

的最大特征值问题,而计算补足拉普拉斯矩阵的最大特征值可以通过简单的迭代方法实现,避免了特征方程系数矩阵的分解过程.为了提高代数图论方法的效率,采用多层次方法将有限元网络的图粗化为不同层次,以减小图的规模,对粗化了的图进行求解,然后在反粗化的过程中得到图的顶点优化排序,进而也得到有限元网格节点编号的优化排序.

考虑拉普拉斯矩阵  $L$  的特征值问题:  $Lv = \lambda v$ . 其中,  $\lambda$  和  $v$  分别是特征值和特征向量. 由于  $L$  是对称矩阵,其所有的特征值为实数.  $L$  是半正定矩阵,且有

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$$

$$v_1^T = \{1, 1, \dots, 1\}$$

第二特征值  $\lambda_2$  和相应的特征向量  $v_2$  在代数图论中具有很好的性质. Fiedler<sup>[10]</sup> 全面研究了  $\lambda_2$ , 此特征值称为图的代数联通度,相应的特征向量称为 Fiedler 向量.

图的顶点的排序可以利用拉普拉斯矩阵的 Fiedler 向量  $v_2$  来实现,将  $v_2$  的元素按照升序排列,然后根据顶点在向量  $v_2$  中出现的位置给以编号.

在粗化的过程中,一系列更小规模的图  $G_i(V_i, E_i)$  由初始图  $G_0(V_0, E_0)$  构造而来,  $V_{i+1}$  包含的顶点数小于  $V_i$ . 由  $G_i$  构造  $G_{i+1}$  是通过寻找  $G_i$  的 1 个极大匹配  $M_i \subseteq E_i$ , 在匹配中每条边的 2 个端点标记为  $G_{i+1}$  中的 1 个顶点,由于匹配中的任何 2 条边均不与同一个点关联,故不会同时标记多于 2 个顶点,不与匹配中任何边关联的顶点可以直接标记为  $G_{i+1}$  的顶点. 当边  $(u, v)$  的 2 个顶点  $u, v \in V_i$  形成顶点  $w \in V_{i+1}$ , 则顶点  $w$  的权为顶点  $u$  和  $v$  的权之和,与顶点  $w$  关联的边的权为与  $u$  和  $v$  关联的边的权除去边  $(u, v)$  的权. 如果某条边与  $u$  和  $v$  均关联,则这条边的权就是这些边的权之和,见图 2. 在  $G_i$  中的顶点如果包含多个  $G_0$  的顶点,则称这些点为复点,  $G_0$  中顶点和边的权均取单位值,则包含  $m$  个顶点的复点的权为  $m$ .

## 2 本文方法

根据 Kaveh 的多层次方法,可以将有限元网络的单元团图视为粗化了的图. 其原始图的顶点可以看作是所有节点自由度,有限元模型中 1 个节点中的自由度两两形成 1 条边,同一个单元中 2 个不同节点间,此单元所具有的自由度之间两两形成 1 条边. 由此形成的单元团图是 1 个赋权图,在此称作赋

权单元团图,根据 Kaveh 的粗化方法以及有限元刚度矩阵的形成原理,可以得到各顶点和边的权的计算方法. 顶点的权是对应有限元网格中节点的自由度数,如果与节点关联的单元具有不同的自由度,取最大值. 边的权是边的端点对应有限元网格中相应 2 个节点所具有自由度的乘积.

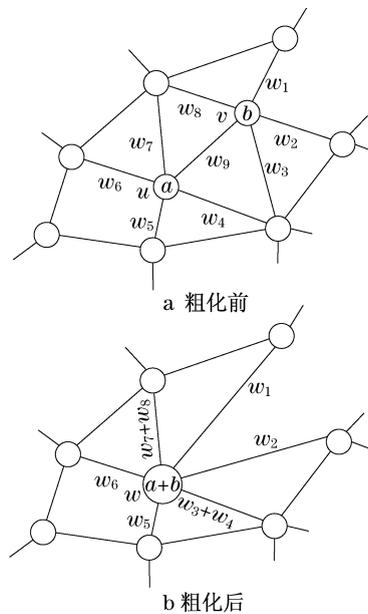


图 2 图的粗化过程

Fig. 2 Coarsening of a graph

为了说明赋权单元团图的形成方法,取图 3a 所示简单的有限元模型,单元①和③为杆单元,节点具有 2 个自由度,单元②和④为梁单元,节点具有 3 个自由度. 以自由度为顶点的单元团图的原始图如图 3b 所示,与节点 2 关联的单元节点的自由度均为 2,所以在图 3c 中节点 2 的权为 2,同理节点 3 的权为 3. 与节点 1 关联的单元分别有 2 个和 3 个自由度,顶点 1 的权取其大值,为 3,同理顶点 4 的权为 3. 边 (1,2) 对应的节点 1 和 2 具有的自由度分别为 3 和 2,故其权为 6. 同理,边 (2,4) 的权为 6,边 (1,3) 和边 (3,4) 的权均为 9. 按照结构力学的基本概念来理解,虽然节点 1 的转角自由度与节点 2 的 2 个位移自由度没有联系,但是在有限元方法中,总体刚度矩阵一般是使用 1 维变带宽矩阵存储,为保证刚度矩阵各自由度刚度有效而统一地存储,节点 1 的转角自由度和节点 2 的位移自由度之间的刚度 0 仍然存储,所以边 (1,2) 的权取 6 而不是 4.

在形成赋权单元团图后,如果图的规模非常大,不便于求解,仍然可以用 Kaveh 的多层次法对图进行求解. 但是在反粗化的过程中,最终目标仍然是前述所形成的赋权单元团图,而不是其原始图.

如果运用上述算法,将各节点的自由度设为1,即可得到未赋权的单元团图,在程序算法上可以很方便地实现。

形成赋权单元团图后,其特征值问题就转化为: $L_w v_w = \lambda_w M_w v_w$ .其中, $L_w$ 为赋权单元团图的拉普拉斯矩阵,并且有

$$l_{w\ ij} = \begin{cases} -w_{ij}, & \text{顶点 } i \text{ 与 } j \text{ 邻接} \\ \sum_g w_{ig}, & i = j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$w_{ij}$ 是边 $(i, j)$ 的权; $M_w$ 是一个对角矩阵,其对角元素为赋权单元团图的顶点的权.由前面所述的顶点和边的权的计算方法可知,知道了节点的自由度就能很容易地求得 $L_w$ 和 $M_w$ 矩阵,剩下的就是求解特征值的问题了。

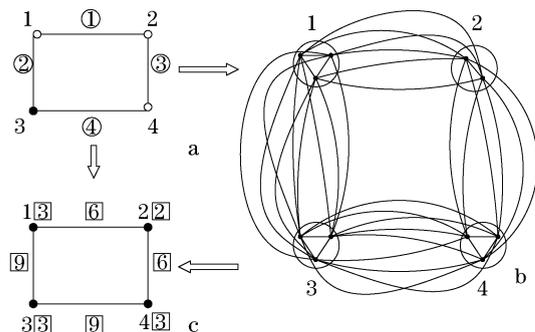


图3 有限元网格及赋权单元团图

Fig.3 Finite element mesh and WECCG

在文献[9]中提出将求解 Fiedler 向量的问题转化为求解补足拉普拉斯矩阵的最大特征对问题,补足拉普拉斯矩阵定义如下:

$$L_c = L_* - L$$

式中: $L_c$ 为补足拉普拉斯矩阵; $L_*$ 是以图 $G$ 的顶点为顶点的完全图的拉普拉斯矩阵,根据完全图和拉普拉斯矩阵的定义可知, $L_*$ 是一个完全矩阵,即其元素均为非零; $L$ 是一个和结构刚度矩阵具有相同外形的稀疏矩阵.由此可以看出, $L_*$ 的存储量相当大,而且在 Kaveh 提出的迭代过程中,每一个迭代步骤都有4次计算 $L_*$ 和向量的相乘计算,这个计算量也是相当可观的.所以建议用子空间迭代法计算 Fiedler 向量,此方法已为大家所熟悉,在工程计算中的应用非常有效而且普遍.虽然迭代过程中需要对拉普拉斯矩阵进行三角分解,但是只需分解1次即可,而且单元团图的拉普拉斯矩阵相对于结构的刚度矩阵来说,其规模已经非常小了,因为结构刚度矩阵是以节点自由度为对象,而拉普拉斯矩阵是以节

点为对象,这样2个矩阵的阶数相差2~6倍.另外,在迭代过程中,计算拉普拉斯矩阵和向量的乘积时,利用矩阵的稀疏性质,计算量会明显减少.而且 Fiedler 向量是低阶特征值问题,非常适合采用子空间迭代法进行求解.

而采用子空间迭代法的问题是,在求解广义特征值问题 $Av = \lambda Bv$ 时,要求矩阵 $A$ 为正定<sup>[11]</sup>,即要求其特征值收敛于非零,而拉普拉斯矩阵 $L$ 恰为半正定矩阵,其第一特征值即为零.为解决此问题,需要采用移频子空间迭代法<sup>[12-13]</sup>,即将广义特征值问题 $Av = \lambda Bv$ 转化为 $(A - \mu B)v = \hat{\lambda} Bv$ ,求解出 $\hat{\lambda}$ 即可得 $\lambda = \hat{\lambda} + \mu$ ,而特征向量即为所求.

将此方法应用于有限元分析程序作为前处理模块时,不用额外准备数据,所需基本信息为:节点数、节点类型(即自由度数)、单元数、单元类型及单元所含节点.这些数据是有限元模型的基本数据,可直接从输入数据中获取.

节点优化的程序如下:

- (1) 对有限元模型中所有单元循环,寻找每个节点所关联的单元,形成节点——单元列表;
- (2) 对所有节点循环,根据步骤(1)的节点——单元列表以及单元所含节点信息寻找与每个节点邻接的节点,有限元模型的节点作为单元团图的顶点,相邻接的顶点形成边;
- (3) 根据节点自由度数信息对步骤(2)形成的单元团图顶点和边赋权,形成赋权单元团图;
- (4) 建立 $L_w$ 和 $M_w$ 矩阵;
- (5) 利用移频子空间迭代法求解广义特征值问题 $(L_w - \mu M_w)v = \hat{\lambda} M_w v$ ,在此 $\mu$ 取-1即可保证 $L_w - \mu M_w$ 为正定矩阵.解得向量 $v_2$ ,即为 Fiedler 向量;
- (6) 对向量 $v_2$ 的元素按其值升序排列,对应于各元素的节点在排序后的向量中的位置即为优化后的节点编号.

### 3 算例

根据前文所述算法,编制了集成节点排序算法的有限元程序,并给出3个算例用以说明本文方法的有效性.对于仅拥有相同自由度节点的有限元模型,经过计算分析,本文的方法与文献[9]的方法可以取得相同的结果,限于篇幅这里仅取文献[9]中的1个算例进行分析,结果见算例一.算例二和算例三

分别取实际工程中结构局部3维空间分析的有限元模型进行结点优化,2个模型中均包含不同自由度的结点,这2个算例用以比较2种节点排序方法的不同.除算例一外,每个算例首先计算节点排序前结构刚度矩阵半带宽 $B$ 和外形 $P$ ,排序处理前节点编号是在建模时根据节点和单元建立前后顺序随意取的;再分别用未赋权的单元团图和赋权单元团图进行节点排序,并计算结构刚度矩阵的半带宽 $B$ 和外形 $P$ ,对比节点排序前后的结果.

算例一:如图4所示的有限元模型,圆柱形网格由梁单元组成,共计240个节点和465个单元.由于不考虑节点自由度的差别,可以将所有节点自由度视为1,这样按本文方法形成的赋权单元团图就和一般的单元团图一致.而且,计算所得 $B$ 和 $P$ 并不是实际结构刚度矩阵的半带宽和外形,但是这并不影响节点优化的效果.计算结果见表1.结果表明,对于仅拥有单一自由度节点的有限元模型,本文方法和一般代数图论法结果一致.需要指出的是,文献[9]中的初始半带宽和外形与本文不同,这是由于节点的初始编号不同造成的,并不影响最终的优化结果.

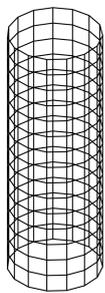


图4 有限元模型一

Fig.4 Finite element model No.1

表1 算例一结果

Tab.1 Results of example 1

结果	初始	文献[9]	本文
$B$	33	16	16
$P$	7 167	3 642	3 642

算例二:图5为边主梁式斜拉桥的主梁的局部3维分析有限元模型,利用对称性取结构的1/4分析.由于边主梁和桥面板以及横隔梁的尺寸相差较大,仅采用实体单元或者壳单元,会存在网格划分困难或者单元不能真实反映结构受力的问题,故采用8节点实体单元和4节点壳单元的组合单元模型,包括3 672个实体单元和1 324个壳单元,实体单元自由度为3,壳单元自由度为6;一共5 901个节点,6自由度的有1 440个,3自由度的有4 461个.计算结

果见表2.本算例和算例三计算所得 $B$ 和 $P$ 是实际结构刚度矩阵的半带宽和外形

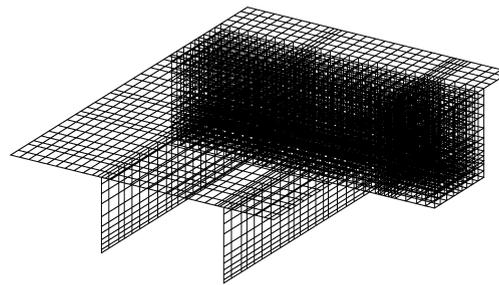


图5 有限元模型二

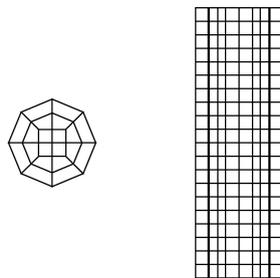
Fig.5 Finite element model No.2

表2 算例二结果

Tab.2 Results of example 2

结果	初始	未赋权	赋权
$B$	21 933	2 103	1 857
$P$	80 515 761	16 668 168	16 458 387

算例三:图6为钢管混凝土柱的3维分析有限元模型,内部混凝土采用8节点实体单元,外部钢管采用4节点壳单元,包括400个实体单元和160个壳单元;一共525个节点,6自由度的有168个,3自由度的有357个.计算结果见表3.



a 断面网格划分 b 立面网格划分

图6 有限元模型三

Fig.6 Finite element model No.3

表3 算例三结果

Tab.3 Results of example 3

结果	初始	未赋权	赋权
$B$	1 053	198	192
$P$	911 637	257 634	256 563

从算例的结果可以直观地看到,节点重新排序后,结构刚度矩阵的半带宽和外形大幅减少,但是优化的效果跟模型初始节点编号有一定的联系.算例中结构节点的初始编号是随意取的,在某些情况下初始节点编号可能已经比较合理,节点优化的效果就不会非常明显.尽管如此,节点编号的优化还是具

有很强的应用价值. 算例二和三的结果体现了本文方法的优越性. 经过分析, 对于不同的模型, 尽管本文的方法并不占有绝对优势, 但和利用一般的代数图论方法优化的结果至少是接近的, 所以通常能取得令人满意的结果.

## 4 结论

本文以代数图论为工具, 在前人工作的基础上, 提出考虑节点自由度的赋权单元团图的构造方法, 对具有多种自由度节点的有限元模型的节点编号进行优化, 以减少结构刚度矩阵的半带宽和外形, 达到提高有限元计算的效率和减少存储量的目的. 除此之外, 使用本文的方法建立前处理程序应用于有限元结构分析程序中, 还能减少建模时要考虑节点编号顺序带来的麻烦. 虽然节点编号排序方法的优劣跟结构形式有一定关系, 但是经过大量的数值试验表明, 本方法是行之有效的, 对于包含不同类型单元, 具有不同自由度节点的混合节点模型, 通常比基于单元团图的一般代数图论方法能取得更好的效果.

### 参考文献:

- [1] Kaveh A, Roosta G R. Comparative study of finite element nodal ordering methods [J]. *Engineering Structures*, 1998, 20 (1/2):86.

- [2] Cuthill E, Mckee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices [C] // *Proceedings of the 1969 24th national conference*. New York: ACM, 1969:157-172.
- [3] Kaveh A. Ordering for bandwidth reduction [J]. *Computers and Structures*, 1986, 24(3):413.
- [4] Sloan S W. Algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices [J]. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 1986, 23(2):239.
- [5] Lai Y C, Weingarten V I, Eshraghi H. Matrix profile and wavefront reduction based on the graph theory and wavefront minimization [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, 39(7):1137.
- [6] Kaveh A. Algebraic and topological graph theory for ordering [J]. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1991, 71(6):739.
- [7] Paulino G H, Menezes I, Gattass M, et al. Node and element resequencing using the laplacian of a finite-element graph. 1. general concepts and algorithm [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(9):1511.
- [8] Kaveh A, Bondarabady H. A hybrid method for finite element ordering [J]. *Computers & Structures*, 2002, 80(3/4):219.
- [9] Kaveh A, Rahimi Bondarabady H A. A multi-level finite element nodal ordering using algebraic graph theory [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2002, 38(3):245.
- [10] Fiedler M. Algebraic connectivity of graphs [J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1973, 23:298.
- [11] Bathe K J. *Finite element procedures* [M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1996.
- [12] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of structures* [M]. 2nd ed. Berkeley: Computers and Structures Inc, 2003.
- [13] Jung H J, Lee I W. An improved subspace iteration method with shift for structures with multiple natural frequencies [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(2):271.

(上接第 928 页)

### 参考文献:

- [1] Lewis F L. A survey of linear singular systems [J]. *Circuits, Systems and Systems Processing*, 1986, 5(1):3.
- [2] Campell S L, Petzold L. Canonical forms and solvable singular system of differential equation [J]. *SIAM J Alg Discrete Math*, 1983, 4(4):517.
- [3] Campell S L, Terrel W J. Observability for linear time-varying descriptor system [J]. *SIAM J Matrix Anal Applic*, 1991, 12(4):484.
- [4] Takaba K. Robust  $H_\infty$  control of descriptor system with time varying uncertainty [J]. *Int J*, 1998, 71(4):559.
- [5] SU Xiaoming, ZHANG Qingling. Stability for time-varying

singular system [J]. *Journal of Northeastern University: Natural Science*, 2001, 22(5):572.

- [6] 苏晓明, 张庆灵. 广义周期时变系统 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- SU Xiaoming, ZHANG Qingling. *Singular periodically system with time-varying* [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [7] Takaba K, Morrihira N. A generalized Lyapunov theorem for descriptor systems [J]. *IEE Proc Control Theory*, 1995, 4:49.
- [8] ZHU Jinghao. On nonautonomous linear-quadratic optimal control [J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 1997, 25(6):709.
- [9] Golub G H, Van Loan C F. *Matrix computations* [M]. 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.