文章编号:1000-6893(2010)03-0514-05

机翼带外挂系统极限环颤振的区间分析

周秋萍，邱志平
(北京航空航天大学 固体力学研究所，北京 100191)

Interval Analysis for Limit Cycle Flutter of a Wing with an External Store

Zhou Qiuping，Qiu Zhiping
(Institute of Solid Mechanics，Beijing University of Aeronautics and Astronautics，Beijing 100191，China)

摘 要：针对带有初偏间隙型非线性刚度的二元翼带外挂系统的极限环颤振，应用当量线化方法得出了颤振边界曲线，并根据颤振边界曲线用 4 阶 Runge-Kutta 法得到极限环相图，可明显看出极限环振动与普通周期振动的区别。然后引入了几个不确定量，通过区间分析方法给出了这些不确定量对机翼带外挂系统颤振边界曲线的影响，并用随机有限元法(FEM)验证区间分析方法的可靠性。进而可以得到一定来流速度下，具有不确定机翼外挂系统幅值的上下界，以及不确定参数对极限环相图的影响。知道机翼外挂幅值的上下界后，可以对外挂幅值进行适当控制。

关键词：极限环颤振；机翼带外挂系统；不确定性；区间分析；随机有限元

中图分类号：V211；O326 **文献标识码**：A

Abstract：In this article，the limit cycle flutter of a two-dimensional wing with an external store system with gaps in their connection is investigated. Applying the linearization method，the flutter boundary curve is gained，according to which the limit cycle phase pictures are acquired by using the 4th Runge-Kutta. Then the differences between the limit cycle flutter and normal cycle vibration are seen obviously. By using the interval analysis method the influence of the uncertainty in structure parameters on flutter boundary is studied. The stochastic finite element method (FEM) is introduced to verify the reliability of the interval analysis method. Moreover，for a fixed speed，the upper and lower amplitudes of the wing-store system with uncertainty are obtained and the influence of the uncertainty is cognized on the limit cycle phase pictures. Then proper control can be performed to restrain that known amplitude of the external store.

Key words：limit cycle flutter；wing with an external store；uncertainty；interval analysis；stochastic FEM

军机中，一般都会在机身或机翼上外挂导弹和油箱等物体。机翼外挂物与挂架之间一般由非线性弹性元件连接，恢复力与广义位移之间的关系不再是线性的，非线性使得机翼外挂气动弹性系统可能产生极为复杂的动力学行为，影响飞机的飞行安全。Y. R. Yang 应用 KBM 方法的一次、二次近似理论研究了机翼外挂系统以及三角机翼两种模型的极限环颤振[1]；Z. C. Yang 等研究了具有结构非线性二元机翼在定常流作用下的极限环颤振和混沌等较为复杂的运动现象[2]；L. N. Virgin 等研究了具有操纵面间隙非线性二元机翼的极限环振动(LCO)和混沌响应问题[3]；S. A. Morton 等基于分叉理论研究了具有间隙非线性二元机翼的颤振问题[4]；杨翊仁等按照工程处理的思路细想，先用一阶谐波平衡当量线化方法估计系统极限环颤振频率，然后引用孤立外挂单自由度系统在简谐迫振情况下的次谐分叉频率条件来预计机翼带外挂系统极限环颤振的次谐响应存在区域[5]。

但是这些都是建立在确定性结构参数下的极限环颤振分析。事实上，由于选用材料机械性能的偏差、零部件加工的公差和装配工艺差异等因素，使机翼和外挂的结构刚度和惯量分布具有一定的不确定性。不确定量在非线性气弹问题和气弹稳定性中的研究很重要。正确估计不确定参数对气弹响应的影响，对于工程设计实践具有十分重要的指导意义。

处理不确定性的方法有很多，可以分为概率方法与非概率方法。C. L. Pettit 对不确定性气动弹性分析工作进行了总结和展望[6]并用蒙特卡罗方法对非线性机翼极限环颤振问题进行了分

收稿日期：2009-01-12；**修订日期**：2009-03-23
基金项目：国家自然科学基金联合资助基金(10876100)；航空科学基金(2007ZA51003)；高等学校学科创新引智计划(B07009)；航天科技创新基金
通讯作者：周秋萍 E-mail：zhouqiupingaaa@sina.com

析[7]。非概率方法中运用比较广泛的是区间分析方法。X. J. Wang 等用区间有限元方法（FEM）进行了不确定性机翼颤振分析[8]。但是究竟对不确定问题采用什么理论进行处理往往取决于占有不确定量统计资料的多少和性质。

本文应用当量线化方法得出了颤振边界曲线，并根据颤振边界曲线用 4 阶 Runge-Kutta 法得到极限环相图，可明显看出极限环振动与普通周期振动的区别[9]。然后引入了几个不确定量，通过区间分析方法[10]给出了这些不确定量对机翼带外挂系统颤振边界曲线的影响，并用随机有限元法验证区间分析方法的可靠性。

1　系统颤振方程

本文研究对象为二元翼带外挂系统，其力学模型如图 1 所示。翼段分别由一个线性弹簧和一个旋转弹簧支持在弹性轴 E 点，弹簧常数分别为 k_h 和 k_α。假定作用在机翼上的气动力为准定常气动力，并忽略作用在外挂上的气动力，建立具有 3 个自由度、弦长为 $2b$、宽度为一个单位长度的二元机翼带外挂系统的运动方程。3 个自由度分别是：由于机翼上下运动引起的弯曲 h（在弹性轴上测量，向下为正）、机翼绕弹性轴的转动 α（前缘向上为正）和外挂绕外挂点 B 的转动 β。图 1 中：$x_\alpha b$ 和 $x_\beta b$ 分别为机翼质量中心到弹性轴以及外挂到外挂点的距离；L 为外挂点到弹性轴的距离；ab 为机翼弦长中心到弹性轴的距离；v 为来流速度。

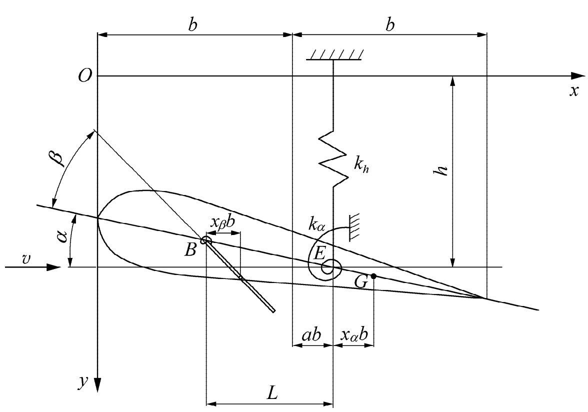

图 1　带外挂二元机翼力学模型

Fig. 1　Mechanics model of two-dimensional airfoil with an external store

为便于分析，假设外挂物仅有俯仰方向位移，且在此方向上带有初偏间隙型非线性刚度。该外挂系统中的恢复力 F 与广义位移 β 之间的关系如图 2 所示（图中：P 和 S 分别为预应力范围和间隙量）。

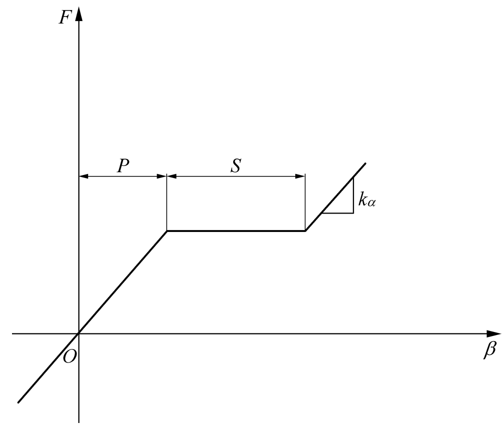

图 2　外挂力-位移关系

Fig. 2　Sketch of free-play stiffness curve

引用拉格朗日方程建立带外挂二元机翼的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&(m+m_\beta)\ddot{h}+(S_\alpha+S_\beta-m_\beta L)\ddot{\alpha}+\\&\qquad S_\beta\ddot{\beta}+c_1\dot{h}+K_h h=Q_h\\&(S_\alpha+S_\beta-m_\beta L)\ddot{h}+(I_\alpha+I_\beta+m_\beta L^2-2S_\beta L)\ddot{\alpha}+\\&\qquad(I_\beta-S_\beta L)\ddot{\beta}+c_1\dot{\alpha}+K_\alpha\alpha=Q_\alpha\\&S_\beta\ddot{h}+(I_\beta-S_\beta L)\ddot{\alpha}+I_\beta\ddot{\beta}+F(\beta)=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中：m 为单位展长的机翼质量；m_β 为外挂质量；c_1 为机翼上下运动方向的阻尼大小；$F(\beta)$ 为 β 位移上的广义力；S_α 为单位展长机翼对弹性轴的质量静矩，$S_\alpha=\int_{\text{机翼}} r_E\mathrm{d}m=mx_\alpha b$，$r_E$ 为机翼对称轴上任意点到弹性中心的距离；S_β 为外挂对外挂点的质量静矩，$S_\beta=\int_{\text{外挂}} r_B\mathrm{d}m=m_\beta x_\beta b$，$r_B$ 为外挂上任意一点到外挂点的距离；I_α 为单位展长机翼对弹性轴的惯性矩，$I_\alpha=\int_{\text{机翼}} r_E^2\mathrm{d}m=m_\alpha r_\alpha^2 b^2$，$r_\alpha$ 为单位展长机翼对弹性轴的回转半径，量纲为 1；I_β 为外挂对外挂点的惯性矩，$I_\beta=\int_{\text{外挂}} r_B^2\mathrm{d}m=m_\beta r_\beta^2 b^2$，$r_\beta$ 为外挂对外挂点的回转半径，量纲为 1；Q_h 为翼段上的气动力；Q_α 为翼段上的气动力矩。

由准定常气动理论，得

$$Q_h=-2\pi\rho v^2 b\left[\alpha+\frac{\dot{h}}{v}+\left(\frac{1}{2}-a\right)b\,\frac{\dot{\alpha}}{v}\right]\tag{2}$$

$$Q_\alpha=4\pi\rho v^2 b^2\left(\frac{1+a}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[\alpha+\frac{\dot{h}}{v}+\left(\frac{1}{2}-a\right)b\,\frac{\dot{\alpha}}{v}\right]-\frac{1}{2}\pi\rho v b^3\dot{\alpha}\tag{3}$$

把式(2)和式(3)代入式(1)并无量纲化，可得

$$\left.\begin{aligned}&(\mu+\mu_\beta)\ddot{\bar{h}}+(\mu x_\alpha+\mu_\beta x_\beta-\mu_\beta\bar{L})\ddot{\alpha}_1+\\&\mu_\beta x_\beta\ddot{\beta}_1+(\bar{c}+2\bar{v})\dot{\bar{h}}+(1-2a)\bar{v}\dot{\alpha}_1+\\&\bar{K}_h\bar{h}+2\bar{v}^2\alpha=0\\&(\mu x_\alpha+\mu_\beta x_\beta-\mu_\beta\bar{L})\ddot{\bar{h}}+(\mu r_\alpha^2+\mu_\beta r_\beta^2+\\&\mu_\beta\bar{L}^2-2\mu_\beta x_\beta\bar{L})\ddot{\alpha}_1+(\mu_\beta r_\beta^2-\mu_\beta x_\beta\bar{L})\ddot{\beta}_1-\\&(1+2a)\bar{v}\dot{\bar{h}}+(\bar{c}+2a^2\bar{v})\dot{\alpha}_1+\bar{K}_\alpha\alpha-\\&(1+2a)\bar{v}^2\alpha=0\\&\mu_\beta x_\beta\ddot{\bar{h}}+(\mu_\beta r_\beta^2-\mu_\beta x_\beta\bar{L})\ddot{\alpha}_1+\mu_\beta r_\beta^2\ddot{\beta}_1+\\&\mu_\beta r_\beta^2\frac{\omega_{\mathrm{eq}}^2}{\omega_\alpha^2}\beta=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

式中：$\mu=\dfrac{m}{\pi\rho b^2}$，$\mu_\beta=\dfrac{m_\beta}{\pi\rho b^2}$，$\bar{h}=\dfrac{h}{b}$，$\bar{L}=\dfrac{L}{b}$，$\bar{K}_h=\dfrac{K_h}{\pi\rho b^2\omega_\alpha^2}$，$\bar{K}_\alpha=\dfrac{K_\alpha}{\pi\rho b^4\omega_\alpha^2}$，$\bar{v}=\dfrac{v}{b\omega_\alpha}$，$\bar{c}=\dfrac{c_1}{\pi\rho b^2\omega_\alpha}$，$\dot{\bar{h}}=\dfrac{\mathrm{d}\bar{h}}{\mathrm{d}\tau}$，$\ddot{\bar{h}}=\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{h}}{\mathrm{d}\tau^2}$，$\dot{\alpha}_1=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau}$，$\ddot{\alpha}_1=\dfrac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\tau^2}$，$\ddot{\beta}_1=\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\tau^2}$，$\tau=\omega_\alpha t$ 都是无量纲量，其中：ρ 为空气密度，ω_α 为机翼俯仰方向的固有频率，t 为时间；ω_{eq} 为外挂等效线化频率。把 ω_{eq} 无量纲化得 $\omega_1=\dfrac{\omega_{\mathrm{eq}}}{\omega_\alpha}$。

2 区间分析方法

给定等效线化频率，由颤振方程式就可以求出颤振临界速度，它的表达式中包含有质量、阻尼和刚度等结构参数，可表示为

$$\boldsymbol{B}=[B_1\quad B_2\quad\cdots\quad B_m]^{\mathrm{T}}\tag{5}$$

结构参数的概率特性难以掌握，但不确定参数的界限相对容易确定，用区间符号可以表示为

$$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}=[\underline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{B}}]=[\boldsymbol{B}_0-\Delta\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}]=(B_i^{\mathrm{I}})\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{6}$$

而

$$B_i\in B_i^{\mathrm{I}}=[\underline{B}_i,\overline{B}_i]=[B_{0i}-\Delta B_i,B_{0i}+\Delta B_i]\tag{7}$$

式中：$\overline{\boldsymbol{B}}=(\overline{B}_i)$ 和 $\underline{\boldsymbol{B}}=(\underline{B}_i)$ 分别为结构参数 $\boldsymbol{B}=(B_i)$ 的上界和下界。

所以在知道不确定参数 $\boldsymbol{B}$ 的区间 $[\underline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{B}}]$ 后，由区间数学可知，$\boldsymbol{B}_0$ 和 $\Delta\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{B}_0=(\overline{\boldsymbol{B}}+\underline{\boldsymbol{B}})/2,\quad\Delta\boldsymbol{B}=(\overline{\boldsymbol{B}}-\underline{\boldsymbol{B}})/2\tag{8}$$

或分量形式

$$B_{i0}=(\overline{B}_i+\underline{B}_i)/2,\quad\Delta B_i=(\overline{B}_i-\underline{B}_i)/2\tag{9}$$

与中心值 $\boldsymbol{B}_0$ 有微小变化的结构参数可以记做

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B}\quad\text{或}\quad B_i=B_{i0}+\delta B_i\tag{10}$$

式中：结构参数 $\boldsymbol{B}=(B_i)$ 的小偏差 $\delta\boldsymbol{B}=(\delta B_i)\in\mathbf{R}^m$ 满足不等式：

$$|\delta\boldsymbol{B}|\leqslant\Delta\boldsymbol{B}\quad\text{或}\quad|\delta B_i|\leqslant\Delta B_i\tag{11}$$

借助一阶 Taylor 级数展开，有界不确定参数 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的带外挂机翼极限环颤振速度 $\bar{v}$ 随等效线化频率 ω_1 的变化情况，可近似为

$$\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1)=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)}{\partial B_i}\delta B_i\tag{12}$$

通过对式(12)进行自然区间扩张，可以得到 $\bar{v}$ 区间的表达式为

$$\bar{v}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{B},\omega_1)=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)+\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)}{\partial B_i}\right|\Delta B_i^{\mathrm{I}}\tag{13}$$

式中：$\Delta B_i^{\mathrm{I}}=[-\Delta B_i,\Delta B_i]$。

通过区间运算，并根据区间数相等的充分必要条件，可以得到 $\bar{v}$ 随等效线化频率 ω_1 变化的下界曲线和上界曲线分别为

$$\underline{\bar{v}}(\boldsymbol{B},\omega_1)=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)-\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)}{\partial B_i}\right|\Delta B_i\tag{14}$$

$$\overline{\bar{v}}(\boldsymbol{B},\omega_1)=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)+\sum_{i=1}^m\left|\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)}{\partial B_i}\right|\Delta B_i\tag{15}$$

3 随机有限元法

为比较，考虑不确定性结构参数 $\boldsymbol{B}=[B_1\quad B_2\quad\cdots\quad B_m]^{\mathrm{T}}$ 为随机变量，其均值为 $\boldsymbol{B}_0=[B_{01}\quad B_{02}\quad\cdots\quad B_{0m}]^{\mathrm{T}}$，标准差为 $\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_1\quad\sigma_2\quad\cdots\quad\sigma_m]^{\mathrm{T}}$。

对式(12)两边取均值，可得到颤振速度 $\bar{v}$ 的均值为

$$E(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1))=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)+\sum_{i=1}^m\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)}{\partial B_i}E(\delta B_i)\tag{16}$$

由于 $E(\delta B_i)=0$，式(16)可化简为

$$E(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1))=\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1)\tag{17}$$

假设结构参数之间相互独立，对式(12)两边取方差，可得到颤振速度 $\bar{v}$ 的方差为

$$\mathrm{Var}(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1))=\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1)}{\partial B_i}\right)^2\mathrm{Var}(B_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1)}{\partial B_i}\sigma_i\right)^2 \tag{18}$$

设 l 为一正整数，则偏离 l 倍标准差的颤振速度 $\bar{v}$ 的区间为

$$\begin{aligned}\bar{v}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{B},\omega_1) = [&\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1) - l\zeta(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1)),\\ &\bar{v}(\boldsymbol{B}_0,\omega_1) + l\zeta(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1))]\end{aligned} \tag{19}$$

式中：$\zeta(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1)) = \sqrt{\mathrm{Var}(\bar{v}(\boldsymbol{B},\omega_1))}$ 为 $\bar{v}$ 的标准差。

4　带外挂二元机翼极限环颤振分析算例

式(4)中各参数取值[1]如下：$\mu=12.8$，$\mu_\beta=4.0$，$x_\alpha=0.15$，$x_\beta=0.2$，$r_\alpha^2=0.3$，$r_\beta^2=0.89$，$\bar{L}=0.18$，$\bar{c}=0.2$，$a=-0.41$，$b=0.118$，$\bar{K}_h=1.979$，$\bar{K}_\alpha=3.84$。

4.1　确定的颤振极限环分析

颤振边界曲线是正确估算极限环幅值以及极限环相图的基础。所以通过当量线化方法得到外挂等效线化频率 ω_1 与外挂幅值 A 的关系(如图 3)以及颤振边界曲线(如图 4)。

根据图 4 颤振边界曲线，可以得到一定来流速度下，两个不同的等效线化频率。所以可以得到如图 5(a)和图 5(b)所示的两个不同幅值的极限环。从图 5 中可以看出极限环振动与普通周期振动的不同。极限环运动情况下，对于只存在一个极限环的情况，振动一开始受初始条件影响，但经过一定的时间，它们最终会到达极限环状态，并且这种极限环状态与初始条件无关，是一种自激振动。而对于普通的周期振动，其振动的相位以及幅值都与初始条件有关。

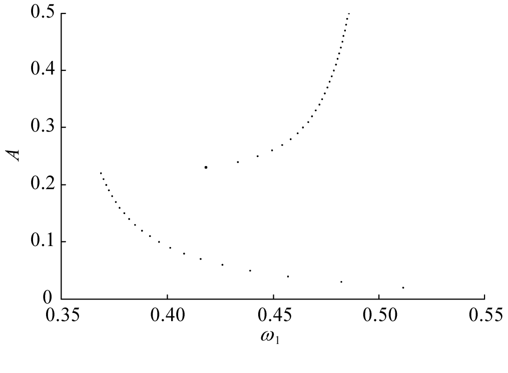

图 3　线化频率与外挂幅值的关系曲线($P=0.02$，$S=0.2$，$\omega_0=45\ \mathrm{s}^{-1}$)

Fig. 3　Curve of linearization frequency vs amplitude of external store($P=0.02$，$S=0.2$，$\omega_0=45\ \mathrm{s}^{-1}$)

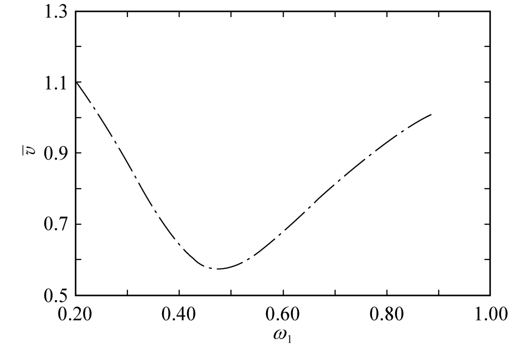

图 4　颤振边界曲线

Fig. 4　Flutter boundary curve

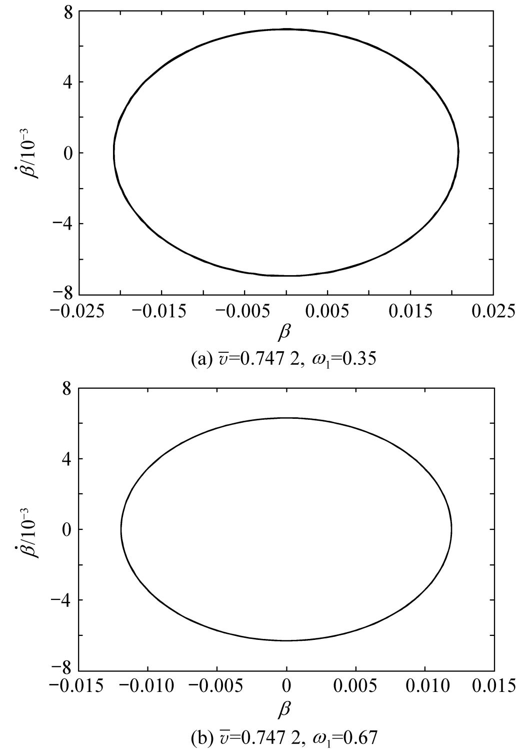

图 5　外挂 β 的极限环相图

Fig. 5　Phase trajectory of limit cycle for external store β

4.2　不确定的颤振极限环分析

现在设机翼质量 μ 与其关于弹性轴的回转半径 r_α^2 以及外挂质量 μ_β 与其对外挂点的回转半径 r_α^2 为不确定性参数，它们的区间分别为：$\mu^{\mathrm{I}}=[10.8,14.8]$，$(r_\alpha^2)^{\mathrm{I}}=[0.25,0.35]$，$\mu_\beta^{\mathrm{I}}=[3.6,4.4]$，$(r_\beta^2)^{\mathrm{I}}=[0.76,1.02]$。用随机有限元方法与区间分析方法进行比较，设这 4 个不确定性参数在所属区间内服从正态分布，按照“3σ”法则，它们的均值和方差分别为：$\mu_{\mathrm{m}}=12.8$，$\mu_{\beta\mathrm{m}}=4.0$，$r_{\alpha\mathrm{m}}^2=0.30$，$r_{\beta\mathrm{m}}^2=0.89$，$\sigma_\mu=0.667$，$\sigma_{\mu_\beta}=0.133$，$\sigma_{r_\alpha^2}=0.016\ 7$，$\sigma_{r_\beta^2}=0.043\ 0$。比较区间分析方法和随机有限元法可以得到如图 6 所示的 $\bar{v}$ 随线化

频率 ω_1 变化的上下界曲线。

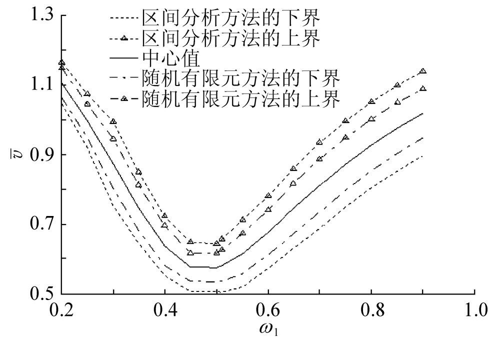

图 6 颤振边界曲线上下界

Fig. 6 Upper and lower bounds of flutter boundary curve

通过图 3、图 5 和图 6 可知，给定一个来流速度，就可以得到外挂幅值的上下界值，以及不确定参数对极限环相图的影响。从图 6 可以知道，通过区间分析方法所得到的幅值均包含随机有限元方法得到的幅值。即区间分析方法得到的幅值上界大于随机有限元方法得到的幅值上界，区间分析方法得到的幅值下界低于随机有限元方法得到的幅值下界。在已知的不确定性信息不多时，用区间分析方法可以较好地估计出具有不确定性的二元机翼带外挂系统的外挂幅值。

5 结 论

（1）应用当量线化方法得出了颤振边界曲线，并根据颤振边界曲线用 4 阶 Runge-Kutta 法得到极限环相图，可明显看出极限环振动与普通周期振动的区别，极限环振动是一种与初始条件无关的自激振动。

（2）在已知不确定性因素的信息较少时，用区间分析方法能可靠地估计出颤振边界曲线的上下界。区间分析方法所得的结果均包含随机有限元方法的结果，即区间分析方法解的上界大于随机有限元方法解的上界，区间分析方法解的下界低于随机有限元方法解的下界。这正与概率论和区间数学的意义是相一致的。进而可以得到一定来流速度下，具有不确定机翼外挂系统幅值的上下界值，以及不确定参数对于极限环相图的影响，这将为颤振控制奠定可靠的基础。

参 考 文 献

[1] Yang Y R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing with an external store and comparison with a wind-tunnel test[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(2): 271-280.

[2] Yang Z C, Zhao L C. Analysis of limit cycle flutter of an airfoil in incompressible flow[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 123(1): 1-13.

[3] Virgin L N, Dowell E H. Nonlinear aeroelasticity and chaos[C]// Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering. 1992: 531-546.

[4] Morton S A, Beran P S. Effects of structural nonlinearity in the bifurcation analysis of transonic airfoil flutter[R]. AIAA-1996-1975, 1996.

[5] 杨翊仁，赵令诚. 二元机翼带外挂系统极限环颤振次谐响应分析[J]. 航空学报，1992，13(7)：410-415.
Yang Yiren, Zhao Lingcheng. Subharmonic response of the limit cycle flutter of wing-store system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1992, 13(7): 410-415. (in Chinese)

[6] Pettit C L. Uncertainty quantification in aeroelasticity: recent results and research challenges[J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(5): 1217-1229.

[7] Pettit C L, Beran P S. Polynomial chaos expansion applied to airfoil limit cycle oscillations[R]. AIAA-2004-1691, 2004.

[8] Wang X J, Qiu Z P. Interval finite element analysis of wing flutter[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(2): 134-140.

[9] Dowell E, Edwards J, Thomas W S. Nonlinear aeroelasticity[R]. AIAA-2003-1816, 2003.

[10] 邱志平. 非概率集合理论凸方法及其应用[M]. 北京：国防工业出版社，2005.
Qiu Zhiping. Convex method based on non-probalistic set-theory and its application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005. (in Chinese)

作者简介：

周秋萍(1984－) 女，硕士研究生。主要研究方向：结构动力学、气动弹性力学和计算固体力学。

Tel：15810532791

E-mail：zhouqiupingaaa@sina.com

邱志平(1962－) 男，博士，教授，博士生导师。主要研究方向：结构动力学、计算固体力学、结构强度、复合材料力学、结构优化设计、结构可靠性和气动弹性力学等。

Tel：010-82317535

E-mail：zpqiu@buaa.edu.cn

(编辑：徐晓)