

具有 Markov 跳跃参数的随机非线性系统的自适应跟踪*

朱进, 季海波, 李大鹏, 奚宏生

(中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

摘要:采用随机控制 Lyapunov 设计方法, 针对参数严格反馈形式的 Markov 跳跃非线性系统, 研究了一类具有 Markov 跳跃参数的随机非线性系统的自适应跟踪问题, 给出了参数自适应律和控制律, 使得跟踪误差以概率 1 渐近衰减到零. 仿真结果表明了该设计方法的有效性.

关键词:随机稳定; Markov 跳跃系统; 自适应跟踪

中图分类号: TP273+.2 **文献标识码:** A

Adaptive tracking of stochastic nonlinear systems with Markovian jumping parameters

ZHU Jin, JI Hai-bo, LI Da-peng, XI Hong-sheng

(Dept. of Automation, USTC, Hefei 230027, China)

Abstract: Adaptive tracking problems for a class of stochastic nonlinear systems with Markovian jumping parameters were investigated. A Lyapunov design method was applied for Markovian jumping systems in the form of parametric-strict-feedback. A parameter adaptive law and a control law were obtained to ensure asymptotic attenuation of the tracking error to zero with probability 1. The simulation results show the validity of the method.

Key words: stochastic stability; Markovian jumping systems; adaptive tracking

0 引言

Markov 跳跃系统(简称跳跃系统)的概念最先由 Krasovskii 以及 Lidskii^[1]于 20 世纪 60 年代提出. 由于这一类跳跃系统在社会经济系统^[1]、制造系统^[2]等方面有着广泛的应用, 引起了国内外学者的广泛关注. 但是到目前为止, 有关 Markov 跳跃系统的研究大多局限于跳跃线性系统领域.

随着对跳跃系统研究的深入, 很多专家已着手

进行对跳跃非线性系统领域的探索. 其中, MAO 研究了一般形式的跳跃非线性系统方程解存在的惟一性问题和系统的随机稳定性问题. 文献[3]给出了系统方程存在惟一解的充分条件, 并研究了系统指数稳定问题. 文献[4]则研究了跳跃系统的依分布渐进稳定问题. 文献[5]研究了跳跃时滞系统的渐进稳定问题. 这些工作为跳跃非线性系统的稳定性研究提供了数学基础. 此外, 文献[6]、[7]探讨了跳跃非线性系统的 \mathcal{M}_∞ 设计问题, 文献[8]则提出了跳跃非线性

* 收稿日期: 2005-03-29; 修回日期: 2005-09-08

基金项目: 高等学校博士点专项基金(20050358044)资助.

作者简介: 朱进, 男, 1978 年生, 博士生. 研究方向: 混合动态系统. E-mail: zhujin@ustc.edu

通讯作者: 季海波, 博士/教授. E-mail: jihb@ustc.edu.cn

性系统无源性的概念. 需要指出的是, 现有对跳跃非线性系统的研究工作大多局限于理论范畴, 尚未涉及具体的控制器设计问题.

本文在文献[5]的基础上, 研究了具有 Markov 跳跃参数的非线性系统的自适应跟踪问题. 由于 Markov 跳跃参数的引入, 原有的非线性稳定性理论需要重新定义, 本文给出了跳跃系统的 Lasalle-like 定理. 然后针对该类系统, 设计了参数自适应律和控制律, 并给出了仿真实例, 阐述了有关设计方案, 实现了状态反馈自适应跟踪.

1 问题描述

考察下面的参数严格反馈形式的 Markov 跳跃系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \xi_i(\bar{x}_i, t, r(t))^T \theta^* \\ \dot{x}_n &= u + \xi_n(\bar{x}_n, t, r(t))^T \theta^* \\ y &= x_1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, 并记 $\bar{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T$, $\xi_i(\bar{x}_i, t, r(t))$ 是 p 维光滑向量值函数, $\theta^* \in \mathbb{R}^p$ 为未知常参数, $u \in \mathbb{R}$ 为输入. $r(t)$ 为定义于概率空间 (Ω, \mathcal{D}, P) 上的一个连续时间 Markov 过程, 在有限模态集 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值. Markov 过程的转移率矩阵为 $\Pi = [\pi_{kj}]$, 转移概率由下式给出

$$P(r(t+dt) = j | r(t) = k) = \begin{cases} \pi_{kj} dt + o(dt), & k \neq j \\ 1 + \pi_{jj} dt + o(dt), & k = j \end{cases}$$

其中, $o(dt)$ 为 dt 的高阶无穷小. 文献[3]给出了具有 Markov 跳跃参数的一般随机非线性系统存在唯一解的充分条件, 因此在本文中, 若不做特别声明, 上述式(1)系统存在唯一解.

本文的控制目标是使得输出 y 跟踪一个给定的有界参考信号 $y_r(t)$ (假设是光滑的), 并且保持闭环系统的其他信号都有界. 记跟踪误差

$$e_i = x_i - y_r^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中, $y_r^{(m)}$ 表示 y_r 的 m 阶导数, 且有 $y_r^{(0)} = y_r$. 根据式(1), 得到跟踪误差方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1} + \xi_i(\bar{x}_i, t, r(t))^T \theta^* \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= (u - y_r^{(n)}) + \xi_n(\bar{x}_n, t, r(t))^T \theta^* \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为了研究式(1)系统, 先对如下的随机微分方程

$$dx = f(\mathbf{x}, t, r(t))dt \quad (4)$$

给出有关引理和记号. 式中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ 满足局部 Lipschitz 条件, 且有 $f(\mathbf{0}, t, r(t)) = 0, \forall t \geq 0, \forall r(t) \in S$.

考察函数 $V(\mathbf{x}, t, r(t)) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S; \mathbb{R}_+)$, 定义关于 V 的无穷小算子 $\mathcal{L}V$ 为^[3]

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}, t, k) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, t, k)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t, k)}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t, k) + \sum_{j=1}^N \pi_{kj} V(\mathbf{x}, t, j) \quad (5)$$

与一般非跳跃系统(即 $S = \{1\}, k \equiv j = 1$)无穷小算子的差别在于, 式(5)中多了对转移率的有关计算.

注意到公式 $\sum_{j=1}^N \pi_{kj} = 0$, 从而有 $\sum_{j=1}^N \pi_{kj} V(\mathbf{x}, t, j) = 0, k \equiv j$. 此时, 跳跃系统的无穷小算子就退化为一般非跳跃系统的无穷小算子, 因此, 一般非跳跃系统可看作是跳跃系统的一个特例.

2 相关定理

Lasalle-like 定理是非线性系统中的重要稳定性理论, 本文给出具有 Markov 跳跃参数的非线性系统的随机渐进稳定的定义, 并给出跳跃非线性系统的 Lasalle-like 定理.

定义 2.1 考察式(1)系统, 若对任意给定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n, k_0 \in S$, 有

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, k_0)| = 0) = 1$$

则称式(1)系统依概率 1 渐进稳定.

这里的 $|\cdot|$ 表示向量的 Euclidean 范数.

定理 2.2 (Lasalle-like theorem) 考察式(1)系统, 设存在函数 $V(\mathbf{x}, t, k) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S; \mathbb{R}_+)$, 若存在径向无界函数 $W_1, W_2 \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ 及函数 $W \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, 使得下列式子成立

$$W_1(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}, t, k) \leq W_2(\mathbf{x}) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}V(\mathbf{x}, t, k) &\leq -W(\mathbf{x}) \\ \forall (\mathbf{x}, t, k) &\in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S, W(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0, a. s.$

证明 给定自然数 κ , 定义停时 $\tau_\kappa = \inf\{t \geq 0: |\mathbf{x}_\kappa(t)| \geq \kappa\}$. 令 $t_\kappa = t \wedge \tau_\kappa$, 根据上鞅不等式, 有

$$P\{|\mathbf{x}| \geq \kappa\} \leq \frac{EV(\mathbf{x}, t, r(t))}{V(\kappa, t, r(t))}, \text{ 从而有 } P\{|\mathbf{x}| < \kappa\} \geq$$

$$1 - \frac{EV(\mathbf{x}, t, r(t))}{V(\kappa, t, r(t))}. \text{ 当 } \kappa \rightarrow \infty \text{ 时, 由式(6)易知}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{EV(\mathbf{x}, t, r(t))}{V(\kappa, t, r(t))} = 0. \text{ 故有 } P\{|\mathbf{x}| < \infty\} = 1, \text{ 即}$$

$P\{\tau_\kappa = \infty\} = 1$, 根据广义 Ito 积分公式可得

$$EV(\mathbf{x}_\kappa(t_\kappa), t_\kappa, r(t_\kappa)) = EV(\mathbf{x}_\kappa(0), 0, r(0)) + E \int_0^{t_\kappa} \mathcal{L}V(\mathbf{x}_\kappa(s), s, r(s)) ds.$$

将式(7)代入,得到

$$EV(\mathbf{x}_\kappa(t_\kappa), t_\kappa, r(t_\kappa)) \leq V(\mathbf{x}_\kappa(0), 0, r(0)) - E \int_0^{t_\kappa} W(\mathbf{x}(s)) ds.$$

由式(6)可知, $V(\cdot, \cdot, \cdot) \geq 0$, 从而 $EV(\cdot, \cdot, \cdot) \geq 0$, 故有

$$E \int_0^{t_\kappa} W(\mathbf{x}(s)) ds \leq V(\mathbf{x}_\kappa(0), 0, r(0)) \quad (8)$$

由于 $W(\mathbf{x}) \geq 0$, 在式(8)中, 令 $t_\kappa \rightarrow \infty$, 并应用 Fatou's 引理, 得到 $E \int_0^\infty W(\mathbf{x}(s)) ds < \infty$. 从而

$$\int_0^\infty W(\mathbf{x}(s)) ds < \infty, (a. s.) \quad (9)$$

根据文献 [5] 定理 2.1 中的证明可知, 当 $\int_0^\infty W(\mathbf{x}(s)) ds < \infty, (a. s.)$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}(t)) = 0, a. s.$

定理 2.3 考察式(1)系统, 设存在函数 $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S; \mathbb{R}_+)$, 若存在径向无界函数 $W_1, W_2 \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ 及 κ_∞ 函数 $W_3 \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, 使得 $W_1(|\mathbf{x}|) \leq V(\mathbf{x}, t, k) \leq W_2(|\mathbf{x}|)$, 且 $\mathcal{L}V(\mathbf{x}, t, k) \leq -W_3(\mathbf{x}), \forall (\mathbf{x}, t, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S, W_3(0) = 0$. 则称式(1)系统依概率 1 渐进稳定.

证明 由定理 2.2 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} W_3(\mathbf{x}(t)) = 0, a. s.$, 又根据 κ_∞ 函数的性质, 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时, $W_3(\mathbf{x}(t))$ 严格为正, 从而 $W_3(\mathbf{x}) = 0$ 就隐含了 $\mathbf{x} = 0$, 即 $P\{\mathbf{x}(t) = 0\} \geq P\{W_3(\mathbf{x}) = 0\}$. 故有, 对任意 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, k_0 \in S, P\{\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0\} = 1$. 从而式(1)系统依概率 1 渐进稳定.

下面介绍计算过程中用到的一个引理.

引理 2.4 (Young 不等式) 对于任意两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 有如下不等式成立

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \leq \frac{\epsilon^p}{p} |\mathbf{x}|^p + \frac{1}{q\epsilon^q} |\mathbf{y}|^q \quad (10)$$

式中 $|\cdot|$ 表示向量或矩阵的 Euclidean 范数, $\epsilon > 0$, 常数 $p > 1, q > 1$, 且满足 $(p-1)(q-1) = 1$.

3 控制设计

我们下面采用 backstepping 递归设计思想, 来设计式(3)系统的控制方案. 记参数 θ^* 的估计值为 $\hat{\theta}$, 首先进行坐标变换

$$z_i = e_i - \alpha_{i-1}(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, \theta, t, r(t)), i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

式中, 取 $\alpha_0 = 0, z_{n+1} = 0$, 则实际控制输入 $u = \alpha_n + y_r^{(n)}$. 为了记号方便, 将 $\alpha_{i-1}(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, \theta, t, r(t) = k), \xi_i(\bar{\mathbf{x}}_{i-1}, t, r(t) = k)$ 分别简记为 $\alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k), \xi_i(\cdot, \cdot, \cdot, k)$. 利用式(5)得到

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} + \alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) + \xi_i^T(\cdot, \cdot, \cdot, k) \theta^* - \\ &\quad \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \dot{\theta} - \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} [x_{j+1} + \xi_j(\cdot, \cdot, \cdot, k)^T \theta^*] - \\ &\quad \sum_{j=1}^N \pi_{kj} \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, j) \end{aligned} \quad (12)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, n$.

取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (13)$$

其中, $\tilde{\theta} = \theta^* - \theta, \gamma$ 为正常数.

下面计算 V 沿式(1)系统的时间变化率

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &= \sum_{i=1}^n z_i [z_{i+1} + \alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) + \xi_i^T(\cdot, \cdot, \cdot, k) \theta^* - \\ &\quad \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \dot{\theta} - \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} x_{j+1} - \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} \xi_j(\cdot, \cdot, \cdot, k)^T \theta^* - \\ &\quad \sum_{j=1}^N \pi_{kj} \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, j)] - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\theta} \end{aligned} \quad (14)$$

利用 Young 不等式有

$$\sum_{i=1}^n z_i z_{i+1} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \delta_i^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\delta_i^{\frac{1}{2}}} \right) z_i^2$$

其中, $\delta_0 = \infty, \delta_n = 0, \delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$. 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V &\leq \sum_{i=1}^n z_i \left[\alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) + \left(\frac{1}{2} \delta_i^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\delta_i^{\frac{1}{2}}} \right) z_i - \right. \\ &\quad \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \dot{\theta} - \\ &\quad \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} x_{j+1} - \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^N \pi_{kj} \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, j) + \sigma_i^T(k) \theta \right] - \\ &\quad \tilde{\theta}^T \left(\frac{1}{\gamma} \dot{\theta} - \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i(k) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

式中定义:

$$\sigma_i(k) = \xi_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) -$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} \xi_j(\cdot, \cdot, k), i = 1, 2, \dots, n.$$

根据式(15),选取参数自适应律

$$\dot{\theta} = \gamma \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i(k) \quad (16)$$

虚拟控制

$$\begin{aligned} \alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) = & -c_i z_i - \left(\frac{1}{2} \delta_i^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\delta_i^{\frac{1}{2}}} \right) z_i + \\ & \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \dot{\theta} + \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} x_{j+1} + \\ & \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, j) - \sigma_i^T(k) \theta \end{aligned} \quad (17)$$

其中, c_1, c_2, \dots, c_n 为正常数. 选定参数自适应率式(16)后, 由于在 $\alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k)$ 求解式(17)中包含了 $\dot{\theta}$, 它与 z_1, \dots, z_n 有关, 于是式(17)不能直接递归求解 $\alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k)$. 为此, 本文对 $\mathcal{L}V$ 表达式中含 $\dot{\theta}$ 的项进行如下处理

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \dot{\theta} = & \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \gamma \left[\sum_{j=1}^i z_j \sigma_j(k) + \sum_{j=i+1}^n z_j \sigma_j(k) \right] = \\ & \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \gamma \sum_{j=1}^i z_j \sigma_j(k) + \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} z_i \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \gamma z_j \sigma_j(k) = \\ & \sum_{i=1}^n z_i \left[\frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \gamma \sum_{j=1}^i z_j \sigma_j(k) + \right. \\ & \left. \left(\sum_{j=1}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \right) \gamma \sigma_i(k) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 第二个等号通过交换求和顺序得到, 而第三个等号通过交换求和指标得到.

将式(18)代入 $\mathcal{L}V$ 表达式(14). 设计可递归计算的虚拟控制

$$\begin{aligned} \alpha_i(\cdot, \cdot, \cdot, k) = & -c_i z_i - \left(\frac{1}{2} \delta_i^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\delta_i^{\frac{1}{2}}} \right) z_i + \\ & \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial t} - \sigma_i^T(k) \theta + \\ & \gamma \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \sum_{j=1}^i z_j \sigma_j(k) + \\ & \gamma \sum_{j=1}^{i-1} z_j \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial \theta} \sigma_i(k) + \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)}{\partial x_j} x_{j+1} + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, j) \quad (19)$$

式中, $z_i = x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}(\cdot, \cdot, \cdot, k)$. 实际控制输入为

$$u(k) = \alpha_n(\cdot, \cdot, \cdot, k) + y_r^{(n)} \quad (20)$$

将式(16)、(19)和(20)带入式(14), 并考虑式(18), 得到

$$\mathcal{L}V \leq -c \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (21)$$

式中, $c = \min\{c_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. 令函数 $W(\mathbf{Z}), \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 为 $W(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n z_i^2$. 则 W 为 κ_∞ 函数, 根据定理 2.3 易知, $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 依概率 1 渐进稳定. 由 $e_1 = z_1 = x_1 - y^{(0)} = y - y_r$, 立即可知, $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0\} = 1$, 即跟踪误差依概率 1 渐进趋近于 0.

结论 Markov 跳跃非线性式(1)系统在控制律式(19)、(20)和参数自适应律式(16)的作用下, 实现了对给定信号的自适应渐进跟踪; 特别在控制率式(17)、(20)和自适应律式(16)的作用下, 跟踪误差依概率 1 渐进趋近于零.

4 算例

考察二阶系统并设系统的状态空间为 $S=1, 2$, 状态转移率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

系统动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \xi_1(x_1, r(t)) \theta \\ \dot{x}_2 &= u + \xi_2(x, r(t)) \theta \\ y &= x_1 \end{aligned} \right\}$$

其中, $\xi_1(x_1, 1) = x_1^2, \xi_1(x_1, 2) = x_1, \xi_2(x, 1) = x_1 x_2, \xi_2(x, 2) = x_1 \sin x_2$. 按照上述方法, 推出该系统的控制律和参数自适应律如下(取 $\delta_i = 1$):

当系统处于模态 1 时:

$$\begin{aligned} \alpha_1(k=1) &= -\left(c_1 + \frac{1}{2}\right) z_1 - \sigma_1(k=1) \theta; \\ \alpha_2(k=1) &= -\left(c_2 + \frac{1}{2}\right) z_2 - \sigma_2(k=1) \theta - \\ & \gamma \sigma_1(k=1) [z_1 \sigma_1(k=1) + \\ & z_2 \sigma_2(k=1)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma z_1 \sigma_1(k=1) \sigma_2(k=1) - \\ & 2x_1 x_2 \theta + \pi_{11} \alpha_1(k=1) + \pi_{12} \alpha_1(k=2); \\ u(k=1) &= \alpha_2(k=1) + \dot{y}_r; \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = \gamma [z_1 \sigma_1(k=1) + z_2 \sigma_2(k=1)].$$

其中, $\sigma_1(k=1) = x_1^2$, $\sigma_2(k=1) = x_1 x_2 + 2x_1^3 \theta$, $z_1 = x_1 - y_r$, $z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1(k=1)$.

当系统处于模态 2 时:

$$\alpha_1(k=2) = -\left(c_1 + \frac{1}{2}\right) z_1 - \sigma_1(k=2) \theta;$$

$$\alpha_2(k=2) = -\left(c_2 + \frac{1}{2}\right) z_2 - \sigma_2(k=2) \theta -$$

$$\gamma \sigma_1(k=2) [z_1 \sigma_1(k=2) + z_2 \sigma_2(k=2)] -$$

$$\gamma z_1 \sigma_1(k=2) \sigma_2(k=2) - x_2 \theta + \pi_{21} \alpha_1(k=1) + \pi_{22} \alpha_1(k=2);$$

$$u(k=2) = \alpha_2(k=2) + \dot{y}_r;$$

$$\dot{\theta} = \gamma [z_1 \sigma_1(k=2) + z_2 \sigma_2(k=2)].$$

其中, $\sigma_1(k=2) = x_1$, $\sigma_2(k=2) = x_1 \sin x_2 + x_1 \theta$, $z_1 = x_1 - y_r$, $z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1(k=2)$.

当跟踪信号取为 $y_r = 1$ 时, 参数真值 $\theta^* = 2$, 有关设计常数取 $c_1 = c_2 = 5$, $\gamma = 0.8$, 计算初始值取 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \theta(0) = 0$. 设定值跟踪曲线如图 1 所示, 其中, 实线是 Markov 跳跃系统的实际输出信号 y , 虚线是给定的需要跟踪的参考信号 $y_r = 1$, 控制曲线如图 2 所示, 参数 θ 的变化曲线如图 3 所示, 模态转移曲线如图 4 所示. 计算步长取 0.01 s, 时间轴以时间步长为单位.

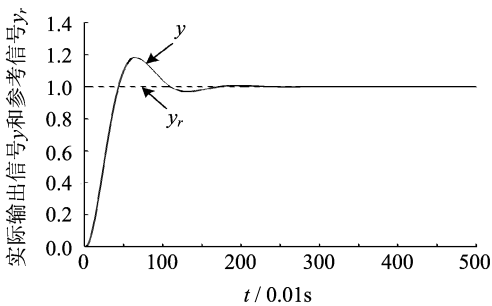


图 1 常设定值跟踪

Fig. 1 Set point tracking

当跟踪信号取成正弦信号 $y_r = \sin 5t$ 时, 参数真值 $\theta = 2$, 其他计算和设计常数取值不变, 计算初始值全部取为零, 周期信号跟踪曲线如图 5 所示, 其中, 实线是 Markov 跳跃系统的实际输出信号 y , 虚线是给定的需要跟踪的参考信号 $y_r = \sin 5t$; 相应的

控制曲线如图 6 所示, 参数 θ 的变化曲线如图 7 所示, 模态转移曲线如图 8 所示. 从图中可以看出, 该设计方案具有良好的跟踪性能.

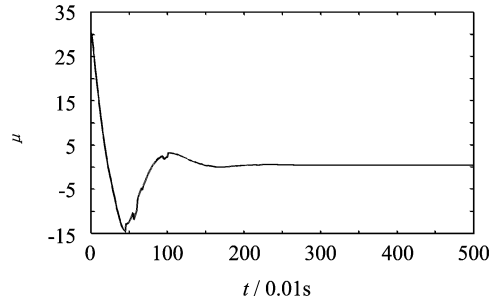


图 2 跟踪常设定值的控制量

Fig. 2 Control in set point tracking

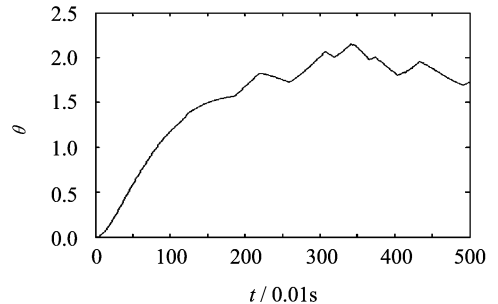


图 3 常设定值跟踪自适应参数变化曲线

Fig. 3 θ in set point tracking

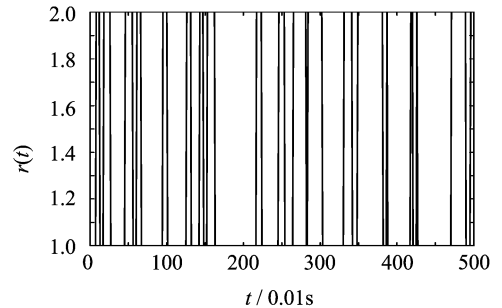


图 4 常设定值跟踪模态跳跃曲线

Fig. 4 Regime in set point tracking

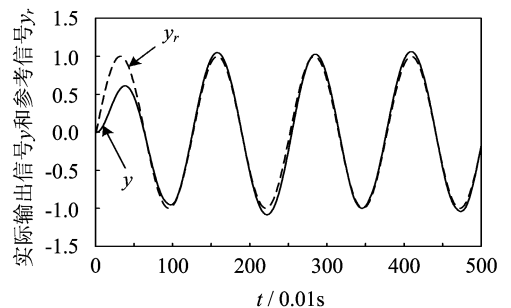


图 5 周期信号跟踪

Fig. 5 Periodic signal tracking

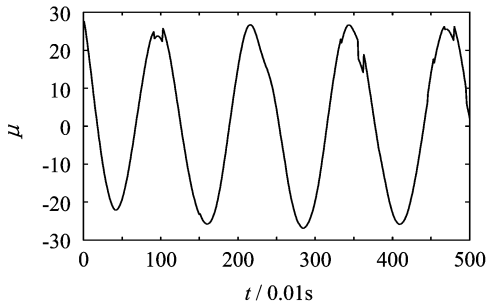


图 6 跟踪周期信号的控制量

Fig. 6 Control in periodic tracking

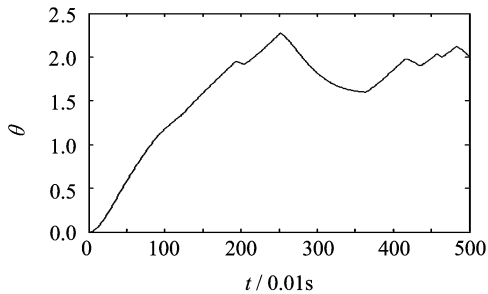


图 7 周期信号跟踪自适应参数变化曲线

Fig. 7 θ in periodic signal tracking

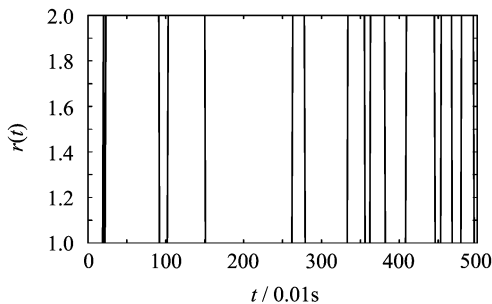


图 8 周期信号跟踪模式跳跃曲线

Fig. 8 Regime in periodic signal tracking

5 结论

本文把 Markov 跳跃过程和非线性系统的控制问题结合起来,研究了具有 Markov 跳跃参数的一

类随机非线性系统的自适应跟踪问题,通过构造随机控制 Lyapunov 函数和运用 Backstepping 的递归设计方法,实现了对任意给定信号的全局自适应跟踪,并且跟踪误差依概率 1 渐进趋近于零.由于一般非跳跃的非线性系统可看作是跳跃非线性系统的一个特例,因此本文拓宽了非线性问题研究的领域.

参考文献 (References)

- [1] Mariton M. Jump Linear Systems in Automatic Control [M]. New York: Marcel Dekker, 1990.
- [2] Sethi S P, Zhang Q. Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems [M]. Berlin: Birkhauser, 1994.
- [3] MAO Xue-rong. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1999, 79: 45-67.
- [4] YUAN Cheng-gui, MAO Xue-rong. Asymptotic stability in dirtribution of stochastic differential equations with Markovian switching [J]. Stochastic Process and Their Applications, 2003, 103: 277-291.
- [5] YUAN Cheng-gui, MAO Xue-rong. Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching [J]. Automatic, 2004, 40: 343-354.
- [6] Sthanathan S, Keel L H. Optimal practical stabilization and controllability of systems with Markovian jumps [J]. Nonlinear Analysis, 2003, 54: 1 011-1 027.
- [7] Aliyu M D S, Boukas E K. \mathcal{H}_∞ control for markovian jump nonlinear systems [C] // 37th CDC 98, Tampa, Florida, 1998: 766-771.
- [8] Aliyu M D S. Dissipativity and stability of nonlinear jump systems [C] // Proceedings of the American Control Conference, 1999: 795-799.
- [9] JI Hai-bo, CHEN Zhi-fu, XI Hong-sheng. Adaptive stabilization for stochastic parametric-strict-feedback systems with Wiener noises of unknown covariance [J]. International Journal of Systems Science, 2003, 34: 123-127.