第36卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 36, No. 5
2006年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2006
文章编号:0253-2778(2006)05-0512-05

具有 Markov 跳跃参数的一类非线性系统的鲁棒反馈镇定*

李大鹏，季海波，朱 进，奚宏生

(中国科学技术大学自动化系,安徽合肥 230027)

摘要：利用随机控制的 Lyapunov 设计方法,研究了一类带 Markov 跳跃参数的随机非线性混合系统的鲁棒控制问题. 给出了受方差不确定的 Wiener 噪声干扰的跳跃严格反馈系统的镇定设计,该设计可使稳态误差在 4 阶矩意义下收敛到一个小范围内.

关键词:随机稳定性;Markov 跳跃系统;Backstepping 方法;扰动抑制;混合系统

中图分类号:TP13 **文献标识码**:A

The robust feedback stabilization of a class of nonlinear systems with Markovian jumping

LI Da-peng, JI Hai-bo, ZHU Jin, XI Hong-sheng

(*Dept. of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *China*)

Abstract: The robust control problem of a class of stochastic nonlinear hybrid systems with Markovian jumps was studied. A stochastic Lyapunov design method was applied for parametric strict-feedback systems with Markovian jumps. An effective control scheme is obtained to guarantee that the closed-loop stochastic system is stable and the error could converge to a small residual set around the origin in the sense of 4th moment.

Key words: stochastic stability; Markovian jump systems; backstepping techniques; disturbance attenuation; hybrid systems

0 引言

线性跳跃系统(jump linear systems)最先由 Krasovskii 以及 Lidskii 于 20 世纪 60 年代提出. 随后,这一类系统得到了广泛的重视. 跳跃系统在制造系统、社会经济系统中有着广泛的应用[1,2].

Markov 跳跃系统实际上是一类随机混合系统(hybrid system),该系统的状态向量包含 $\boldsymbol{x}(t)$、$\boldsymbol{r}(t)$ 两部分，其中，$\boldsymbol{x}(t)$ 为状态(state)，$\boldsymbol{r}(t)$ 为模态(regime). 在系统运行过程中,由于系统可以随机地从一个模态跳跃到另一个模态，因此,整个系统就显现出随机特性. 模态间的跳跃以连续时间、有限离散模态 Markov 过程的形式进行;当模态保持不变时，则以确定性系统的方式运行.

近年来，非线性 Markov 跳跃系统受到了一定程度的关注. MAO 给出了 Markov 跳跃系统的稳

* 收稿日期:2004-11-02;;修回日期:2005-02-23
基金项目:高等学校博士点专项基金(20050358044)资助.
作者简介:李大鹏,男,1981 年生,硕士. 研究方向:Markov 跳跃系统. E-mail:dpli@ustc. edu
通讯作者:季海波,博士/教授. E-mail:jihb@ustc. edu. cn

定性分析，涉及 p 阶矩的指数稳定[3]，依分布稳定[4]等；Aliyu 讨论了非线性 Markov 跳跃系统的无源性理论[5]以及 H_∞ 控制[6]；文献[7]分析了此类系统的实用镇定设计及能控性分析.

对于带 Wiener 噪声的严格反馈系统，Deng[8]提出了噪声-状态稳定(noise-state stability, NSS)以及相应的鲁棒镇定设计. 文献[9]则针对具有不确定噪声的严格反馈系统，利用 Lyapunov 控制设计和backstepping方法，研究了其镇定、扰动抑制问题.

本文考察一类严格反馈非线性系统的鲁棒镇定问题，系统中除了 Morkov 跳跃之外，还含有方差不确定的 Wiener 噪声. 利用 backstepping 方法，我们得出了鲁棒镇定设计，使得系统满足在 4 阶矩意义下的噪声-状态稳定.

1　问题描述

考察下面的参数严格反馈形式的 Markov 跳跃系统

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{d}x_i = x_{i+1}\mathrm{d}t + \varphi_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, t, \boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i, t, \boldsymbol{r}(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{w} \\ i = 1,2,\cdots,n-1 \\ \mathrm{d}x_n = u\mathrm{d}t + \varphi_n(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{r}(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{w} \end{array}\right\} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态，并记 $\bar{\boldsymbol{x}}_i = (x_1, x_2, \cdots, x_i)^{\mathrm{T}}$，$u \in \mathbb{R}$ 为输入，$\boldsymbol{r}(t)$ 为一个连续时间有限模态的 Markov 过程，并记其模态(regime)在有限集 $S = \{1,2,\cdots,N\}$ 中取值. Markov 过程的转移率矩阵 $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_{i,j}]$，$(i,j \in S)$，转移率由式(2)给出

$$P(\boldsymbol{r}(t+h) = i \mid \boldsymbol{r}(t) = j) = \begin{cases} \pi_{i,j}h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \pi_{i,j}h + o(h), & i = j \end{cases} \tag{2}$$

式中，$\pi_{i,i} = -\sum\limits_{j\neq i}\pi_{i,j}$，$o(h)$ 为高阶无穷小，满足 $o(h)/h \to 0$，$\forall k \in S$，$\varphi_i(\cdot, \cdot, k)$ 为光滑标量函数，且其在原点处取 0 值；$\boldsymbol{g}_i$ 是 r 维光滑向量值函数；噪声干扰 $\boldsymbol{w}$ 是定义于概率空间 $(\Omega, \mho, P)$ 上的 r 维独立 Wiener 过程，其中，Ω 为样本空间，$\mho$ 为 σ 代数，P 为概率测度，记增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{w}$ 的协方差为 $\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t$，即均值

$$E\{\mathrm{d}\boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\} = \boldsymbol{\Delta}(t)\boldsymbol{\Delta}(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{3}$$

其中，函数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}(t)$ 是范数有界但不确定的.

为了研究式(1)系统，先对如下的随机微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{w} \tag{4}$$

给出有关引理和记号. 式中，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，Wiener 噪声 $\boldsymbol{w}$ 定义于概率空间 $(\Omega, \mho, P)$，函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}^n$ 是光滑的，且有 $f(0,t,k) = 0$，$\boldsymbol{g}(0,t,k) = 0$，$\forall t \geqslant 0$，$\forall k \in S$. 如果 $V \in \boldsymbol{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S; \mathbb{R}_+)$，定义关于 V 的无穷小算子 $\mathcal{L}V$ 为

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V(\boldsymbol{x},t,k)}{\partial t} + \frac{\partial V(\boldsymbol{x},t,k)}{\partial \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x},t,k) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V(\boldsymbol{x},t,k)}{\partial \boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{g\Delta}\right] + \sum_{j=1}^{N}\pi_{k,j}V(\boldsymbol{x},t,j) \tag{5}$$

出于研究带噪声的扰动抑制问题的需要，文献[8]首先提出了噪声-状态稳定(NSS)，这实际上是对输入-状态稳定(ISS)的推广. 下面给出 p 阶矩意义下噪声-状态稳定(NSS)的定义.

定义 1.1(NSS-稳定性)　式(4)随机系统称为 p 阶矩意义下的噪声-状态稳定，是指存在正整数 p，以及 $\mathcal{KL}$ 函数 β 和 $\mathcal{K}$ 类函数 γ，使得不等式

$$E|\boldsymbol{x}|^p \leqslant \gamma\left(\sup_{s\in[0,t]}|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}|\right) + \beta(|x_0|, t) \tag{6}$$

对 $\forall t \geqslant 0$，$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立.

引理 1.2　考虑式(4)系统，假设存在 $V(\boldsymbol{x},t,l) \in \boldsymbol{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+, S)$，正常数 c, a_1, a_2，以及 Borel 可测的 $\mathcal{K}$ 函数 η 使得

$$a_1|\boldsymbol{x}|^p \leqslant V(\boldsymbol{x},t,l) \leqslant a_2|\boldsymbol{x}|^p \tag{7}$$

$$\mathcal{L}V \leqslant -c|\boldsymbol{x}|^p + \eta(|\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}|) \tag{8}$$

那么该系统在 p 阶矩意义下 NSS 稳定.

证明　首先定义停时 $\tau_k = \inf\{t \geqslant 0: |\boldsymbol{x}(t)| \geqslant k\}$，当 $k \to \infty$ 时，$\tau_k \to \infty$. 注意到，如果 $0 \leqslant t \leqslant \tau_k$，则 $0 < |\boldsymbol{x}(t)| \leqslant k$，于是运用广义 Itô 公式[3]得

$$\begin{aligned} &E[\mathrm{e}^{(a_2/c)t}V(\boldsymbol{x}(t\wedge\tau_k), t\wedge\tau_k, \boldsymbol{r}(t\wedge\tau_k))] = \\ &\quad V(x_0, 0, \boldsymbol{r}(0)) + \\ &\quad E\int_0^{t\wedge\tau_k}\mathrm{e}^{(a_2/c)s}[(a_2/c)V(\boldsymbol{x}(s), s, \boldsymbol{r}(s)) + \\ &\quad \mathcal{L}V(\boldsymbol{x}(s), s, \boldsymbol{r}(s))]\mathrm{d}s \leqslant \\ &V(x_0, 0, \boldsymbol{r}(0)) + E\int_0^{t\wedge\tau_k}\mathrm{e}^{(a_2/c)s}[(c/a_2)a_2|\boldsymbol{x}(s)|^p - \\ &\quad c|\boldsymbol{x}(s)|^p + \eta(|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}|)]\mathrm{d}s = \\ &\quad V(x_0, 0, \boldsymbol{r}(0)) + \\ &\quad E\int_0^{t\wedge\tau_k}\mathrm{e}^{(a_2/c)s}\eta(|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}|)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{9}$$

令 $k \to \infty$，且对不等式左边运用 Fatou 引理，右边用单调收敛原理，得到

$$
\begin{aligned}
&E[\mathrm{e}^{(a_2/c)t}V(\boldsymbol{x}(t),t,\boldsymbol{r}(t))]\leqslant\\
&\quad V(x_0,0,\boldsymbol{r}(0))+\\
&\quad E\int_0^t \mathrm{e}^{(a_2/c)s}\eta(|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm T}|)\mathrm{d}s
\end{aligned}\tag{10}
$$

$\forall\, t\geqslant 0$, 对式(10)运用积分中值定理可以得到

$$
\begin{aligned}
&a_1E|\boldsymbol{x}|^p\leqslant EV(\boldsymbol{x}(t),t,\boldsymbol{r}(t))\leqslant\\
&\quad \mathrm{e}^{-(a_2/c)t}V(x_0,0,\boldsymbol{r}(0))+\\
&\quad (c/a_2)\eta(\sup_{s\in[0,t]}|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm T}|)
\end{aligned}\tag{11}
$$

因此,由定义 1.1 知,该系统在 p 阶矩意义下噪声-状态稳定(NSS).

引理 1.3(Young 不等式) 对于任意两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, 有下面的不等式成立

$$
\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}\leqslant\frac{\varepsilon^p}{p}|\boldsymbol{x}|^p+\frac{1}{q\varepsilon^q}|\boldsymbol{y}|^q\tag{12}
$$

式中, $\varepsilon>0$, 常数 $p>1, q>1$, 且满足 $(p-1)\cdot(q-1)=1$.

2 控制设计

为了简化讨论,假设我们可以确知每一时刻系统所处模态,也就是 $\boldsymbol{r}(t)$ 的值. 事实上,如何取得 $\boldsymbol{r}(t)$ 的值也是跳跃系统的一个重要课题.下面采用 backstepping 递归设计思想 来设计式(1)系统的镇定方案. 首先进行坐标变换

$$
z_i=x_i-\alpha_{i-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1},t,\boldsymbol{r}(t)),\ i=1,2,\cdots,n\tag{13}
$$

式中,取 $\alpha_0=0, \boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm T}$ 是变换后的状态坐标. 因 $\varphi_i(0,\cdot)=0$, 平衡点 $x=0$, 不受系统所处模态的影响,故可令 $\alpha_i(0,\cdot,\cdot)=0$, 利用 Itô 随机微分公式, 得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_i=&(x_{i+1}+\varphi_i)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}_i^{\mathrm T}\mathrm{d}\boldsymbol{w}-\mathrm{d}\alpha_{i-1}=\\
&\Big[\boldsymbol{z}_{i+1}+\alpha_i+\varphi_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j)-\\
&\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial t}-\frac12\sum_{p,q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\boldsymbol{g}_p^{\mathrm T}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_q-\\
&\sum_{j=1}^{N}\pi_{r(t),j}\alpha_{i-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1}(t),t,\boldsymbol{r}(t))\Big]\mathrm{d}t+\\
&\Big(\boldsymbol{g}_i^{\mathrm T}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j^{\mathrm T}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{w}
\end{aligned}\tag{14}
$$

式中, $i=1,2,\cdots,n$, 为了记号方便,约定 $z_{n+1}=0$ 且 $\alpha_n=u$.

我们选用 4 次 Lyapunov 函数

$$
V(z)=\frac14\sum_{i=1}^n z_i^4\tag{15}
$$

下面计算 V 沿式(1)系统的时间变化率

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V=&\sum_{i=1}^n z_i^3\Big[z_{i+1}+\alpha_i+\varphi_i-\\
&\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}+\varphi_j)-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial t}-\\
&\frac12\sum_{p,q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\boldsymbol{g}_p^{\mathrm T}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_q-\\
&\sum_{j=1}^{N}\pi_{r(t),j}\alpha_{i-1}(\cdot,\cdot,\boldsymbol{r}(t))\Big]+\\
&\frac32\sum_{i=1}^n z_i^2\Big(\boldsymbol{g}_i^{\mathrm T}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial \boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{g}_i^{\mathrm T}\Big)\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}\cdot\\
&\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_i\Big)\leqslant\\
&\sum_{i=1}^n z_i^3\Big[\Big(\frac34\delta_i^{\frac43}+\frac{1}{4\delta_{i-1}^4}\Big)\boldsymbol{z}_i+\alpha_i+\\
&\varphi_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_{j+1}+\varphi_j)-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial t}+\\
&\lambda\boldsymbol{z}_i^3\sum_{p,q=1}^{i-1}\Big(\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\Big)^2\boldsymbol{g}_p^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_q^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_q+\\
&\mu\boldsymbol{z}_i\Big[\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)^{\mathrm T}\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)\Big]^2-\\
&\sum_{j=1}^{N}\pi_{r(t),j}\alpha_{i-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1}(t),t,r(t))\Big]+k|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}|^2
\end{aligned}\tag{16}
$$

式中, $i=1,2,\cdots,n$.

在式(16)的推导过程中,我们使用了 Young 不等式估计来分离不同的 $\boldsymbol{z}_i$, 以便表达式 $\mathcal{L}V$ 中的各项通过选择适当的 α_i 进行处理. 得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n z_i^3z_{i+1}\leqslant\frac34\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i^{\frac43}z_i^4+\frac14\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\delta_i^{\,4}}z_{i+1}^4=\\
&\quad\sum_{i=1}^n\Big(\frac34\delta_i^{\frac43}+\frac{1}{4\delta_{i-1}^4}\Big)z_i^4
\end{aligned}\tag{17}
$$

其中, $\delta_0=\infty, \delta_n=0, \delta_i>0, i=1,2,\cdots,n-1$. 故

$$
\begin{aligned}
&\frac12\sum_{i=1}^n z_i^3\sum_{p,q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\boldsymbol{g}_p^{\mathrm T}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_q\leqslant\\
&\quad\sum_{i=1}^n\lambda z_i^6\sum_{p,q=1}^{i-1}\Big(\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\Big)^2|\boldsymbol{g}_p|^2|\boldsymbol{g}_q|^2+\\
&\quad\sum_{i=1}^n\sum_{p,q=1}^{i-1}\frac{1}{16\lambda}|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}|^2=\\
&\quad\sum_{i=1}^n\lambda z_i^6\sum_{p,q=1}^{i-1}\Big(\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\Big)^2\boldsymbol{g}_p^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_q^{\mathrm T}\boldsymbol{g}_q+\\
&\quad\frac{|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm T}|^2}{96\lambda}(n-1)n(2n-1)
\end{aligned}\tag{18}
$$

$$\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\Big(\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}\Big(g_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_i\Big)\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\mu z_i^4\Big[\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)\Big]^2+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{16\mu}|\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}|^2 \tag{19}$$

其中，$\lambda>0$，$\mu>0$，并记为

$$k=\frac{(n-1)n(2n-1)}{96\lambda}+\frac{9n}{16\mu} \tag{20}$$

考虑到虚拟控制 α_i 需要保证 $\mathcal{L}V$ 满足引理 1.2，同时各个 α_i 要能按递归方式逐个求得. 因此可以选定计算虚拟控制

$$\alpha_i=-c_i\boldsymbol{z}_i-\Big(\frac{3}{4}\delta_i^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{4\delta_{i-1}^4}\Big)\boldsymbol{z}_i-$$
$$\varphi_i+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\boldsymbol{x}_j}(\boldsymbol{x}_{j+1}+\varphi_j)+\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial t}-$$
$$\lambda z_i^3\sum_{p,q=1}^{i-1}\Big(\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\Big)^2\boldsymbol{g}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_q-$$
$$\mu z_i\Big[\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{g}_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{g}_j\Big)\Big]^2+$$
$$\sum_{j=1}^{N}\pi_{r(t),j}\alpha_{i-1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i-1}(t),t,\boldsymbol{r}(t)) \tag{21}$$

式中，常数 $c_i>0, i=1,2,\cdots,n$，而实际控制输入为

$$u=\alpha_n \tag{22}$$

将式(21)带入式(16)得到

$$\mathcal{L}V\leqslant-\sum_{i=1}^{n}c_iz_i^4+k|\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}|^2\leqslant$$
$$-cV+k|\boldsymbol{\Delta\Delta}^{\mathrm{T}}|^2 \tag{23}$$

式中，$c=\min\{c_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$.

综上所述，且由引理 1.2 我们可以得到如下定理：

定理 2.1　式(1)系统在式(21)和(22)反馈控制率的作用下，满足

$$E|\boldsymbol{z}(t)|^4\leqslant \mathrm{e}^{-ct}|z(0)|^4+$$
$$\frac{4k}{c}\sup_{s\in[0,t]}|\boldsymbol{\Delta}(s)\boldsymbol{\Delta}(s)^{\mathrm{T}}|^2 \tag{24}$$

即，反馈控制率使得系统满足 NSS 稳定.

这里注意到 $\boldsymbol{x}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{z}=0$.

3　算例

考查一个二阶系统并设 $S=\{1,2\}$，且系统的转移率矩阵为 $\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$，系统的动力学方程为

$$\mathrm{d}x_1=x_2\mathrm{d}t+\varphi_1(x_1,\boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}x_2=u\mathrm{d}t+\varphi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}t+$$
$$g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}(t))\mathrm{d}\boldsymbol{w}.$$

其中，$\varphi_1(x_1,1)=x_1^2$，$\varphi_1(x_1,2)=x_1\sin x_1$，$\varphi_2(\boldsymbol{x},1)=x_1x_2$，$\varphi_2(\boldsymbol{x},2)=x_1^2\sin x_2$，$g_2(\boldsymbol{x},1)=\sin x_2$，$g_2(\boldsymbol{x},2)=x_2^2$.

按照所给出的设计方法，计算该系统的控制律为(取 $\delta_1=\delta_2=1$)：

当 $\boldsymbol{r}(t)=1$ 时，

$$\alpha_1=-\Big(c_1+\frac{3}{4}\Big)z_1-x_1^2,$$
$$\alpha_2=-(c_2+1+\mu\sin^2x_2)z_2-x_1x_2+$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_1^2+x_2)+$$
$$\pi_{1,1}\alpha_1(\cdot,\cdot,1)+\pi_{1,2}\alpha_1(\cdot,\cdot,2);$$

当 $\boldsymbol{r}(t)=2$ 时，

$$\alpha_1=-\Big(c_1+\frac{3}{4}\Big)z_1-\sin x_1,$$
$$\alpha_2=-(c_2+1+\mu x_2^4)z_2-x_1^2\sin x_2+$$
$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_1\sin x_1+x_2)+$$
$$\pi_{2,1}\alpha_1(\cdot,\cdot,1)+\pi_{2,2}\alpha_1(\cdot,\cdot,2).$$

仿真计算中，有关的设计参数为 $c_1=c_2=5$，$\mu=100$，噪声方差为 $\boldsymbol{\Delta}(t)=1+0.5\sin(0.4\,t)$，计算初始值取为 $x_1(0)=7.5$，$x_2(0)=-2.5$，$\boldsymbol{r}(0)=1$，时间步长取为 $\Delta(t)=0.01$ s. 状态响应曲线、控制曲线以及模态跳跃过程曲线分别如图 1～3 所示. 从图中可以看出，状态被调节到平衡点，且误差被控制到较小范围. 本文方案的计算结果表现出良好的扰动抑制性能.

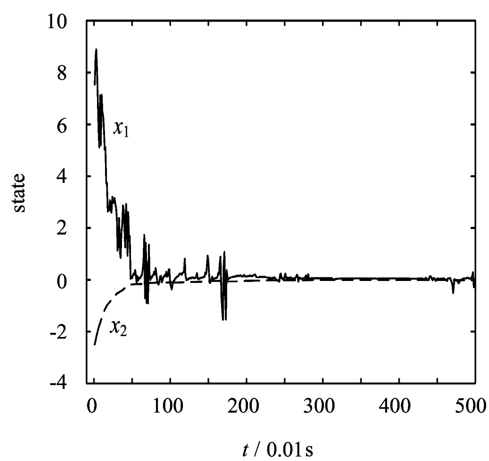

图 1　闭环系统状态曲线

Fig. 1　State of closed-loop system

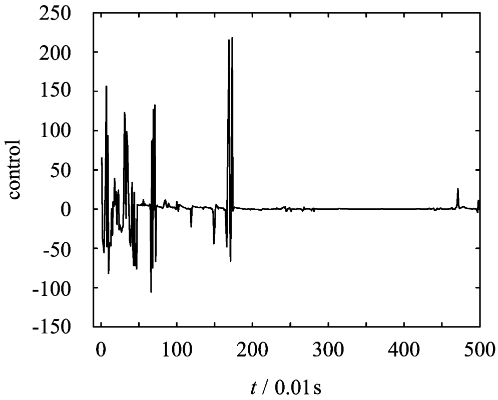

图 2 反馈控制曲线

Fig. 2 Feedback control

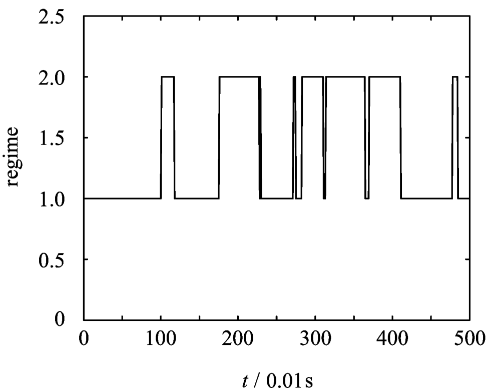

图 3 模态曲线

Fig. 3 Markovian mode

4 结论

本文研究了一类参数严格反馈形式的随机Markov 跳跃系统，通过构造 4 次随机控制Lyapunov函数和运用 backstepping 的递归设计方法，获得了使系统在 4 阶矩意义下的噪声-状态稳定，推广了随机非线性系统及非线性Hybrid系统研究的范围.

参考文献(References)

[1] Mariton M. Jump Linear Systems in Automatic Control[M]. New York: Marcel Dekker, 1990.

[2] Sethi S P, Zhang Q. Hierarchical Decision Making in Stochastic Manufacturing Systems [M]. Berlin: Birkhauser, 1994.

[3] MAO Xue-rong. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1999, 79(1): 45-67.

[4] YUAN Cheng-gui, MAO Xue-rong. Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 103(2): 277-291.

[5] Aliyu M D S. Dissipasivity and stability of nonlinear jump systems [C] // Proceedings of the American Control Conference, 1999: 795-799.

[6] Aliyu M D S, Boukas E K. $\mathcal{H}_\infty$ control for Markovian jump nonlinear systems[C] // 37th CDC 98, Tampa, Florida, 1998: 766-771.

[7] Sthananthan S, Keel L H. Optimal practical stabilization and controllability of systems with Markovian jumps [J]. Nonlinear Analysis, 2003, 54: 1 011-1 027.

[8] Deng H, Krstić M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, 46: 1 237-1 253.

[9] JI Hai-bo, XI Hong-sheng, CHEN Zhi-fu, et al. Robust adaptive tracking of stochastic nonlinear systems with uncertain noises[J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(6): 843-848.
季海波，奚宏生，陈志福，等. 具有不确定噪声的随机非线性系统的鲁棒自适应跟踪[J]. 控制理论与应用, 2003, 20: 843-848.