

严格反馈非线性系统的鲁棒自适应逆最优跟踪*

闫根峰, 王俊, 奚宏生, 陈欢

(中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

摘要: 针对具有未知定常参数和未知有界扰动的严格反馈非线性系统, 结合参考信号, 构造了误差系统, 并解决了其逆最优控制问题. 使用 Backstepping 算法, 设计了误差系统鲁棒自适应逆最优控制器和参数自适应律, 从而解决了原系统的鲁棒自适应逆最优跟踪问题, 并给出性能估计. 仿真结果表明该控制算法的有效性.

关键词: 未知有界扰动; 逆最优; 鲁棒自适应跟踪; Backstepping 算法

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Robust adaptive inverse optimal tracking for strict-feedback nonlinear systems

YAN Gen-feng, WANG Jun, XI Hong-sheng, CHEN Huan

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: Combining the reference signal with a strict-feedback nonlinear continuous system with unknown bounded disturbances and constant unknown parameters, an error system was constructed and its inverse optimal robust adaptive control problem was solved. The inverse optimal controller and parameter adaptive laws were designed by using Backstepping algorithm, thus solving the robust adaptive inverse optimal tracking problem was solved for the continuous system. The results of simulation show the effectiveness of the control algorithms.

Key words: unknown bounded disturbance; inverse optimality; robust adaptive tracking; Backstepping algorithm

0 引言

对于不确定非线性系统的最优控制问题, 最后都归结为求解 Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程 (HJI 方程). 实际上, 在许多情况下, HJI 方程的解是不存在或非惟一的, 因此, 求解 HJI 方程是获得不确定非线性系统最优控制的主要障碍. 为了避免求解 HJI 方程, 20 世纪 90 年代中期, Kokotovic 等

人系统提出了逆最优控制问题^[1,2]. 它不是使一个在最优控制设计之前给出的目标泛函取极小值, 相反, 而是使一待定的或者说经过推导获得的目标泛函取极小值, 这个推得的目标泛函与最优控制策略有关. 逆最优控制的基本思想是: 对于不确定非线性控制系统, HJI 方程稳定的状态解是一个控制 Lyapunov 函数 (CLF). 这样, 求解 HJI 方程就转变为寻求闭环系统的 CLF, 需要强调的是这种方法目前只

* 收稿日期: 2004-03-15; 修回日期: 2005-11-10

基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金 (2006KJ048B) 资助.

作者简介: 闫根峰, 男, 1980 年生, 硕士. 研究方向: 自动控制. E-mail: mdty@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 王俊, 博士/副教授. E-mail: wangjun@ustc.edu.cn

限于严格反馈系统.

文献[3~6]针对几种典型的非线性系统,解决了鲁棒自适应跟踪问题,但均未涉及最优控制问题.文献[7]解决了严格反馈非线性系统的自适应最优跟踪,但未考虑系统具有不确定输入.我们针对具有未知定常参数和未知有界扰动的严格反馈非线性系统,结合跟踪信号,构造了相应的误差系统,使用Backstepping算法,设计了鲁棒自适应逆最优控制器和参数自适应律,从而解决了原系统的鲁棒自适应逆最优跟踪问题.本文可以看作是文献[8]的续篇.

1 问题描述

考察下列具有扰动输入的严格反馈非线性系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_i^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{d} \\ \dot{x}_n &= u + \boldsymbol{\varphi}_n^T(\mathbf{x}_n)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_n^T(\mathbf{x}_n)\mathbf{d} \\ y &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T (1 \leq i \leq n)$ 是状态变量; $u \in \mathbb{R}$ 是输入信号(\mathbb{R} 表示实数集); $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^r$ 、 $\boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^p$ 均是已知连续函数向量; $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^r$ 是未知参数常向量, 设 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计值是 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, 则误差定义为 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$; $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ 是未知有界扰动函数向量, 当 $\mathbf{d} = 0$ 时, 式(1)系统退化为严格反馈的 Benchmark 系统^[6]; 当 $\mathbf{d} = 1$ 时, 式(1)系统退化为一般的非线性控制系统^[3, 9]; y 是系统的输出.

引理 1.1^[9] 对于一类 κ_∞ 函数 γ , 其导数存在, 且其导数也是一类 κ_∞ 函数, $l\gamma$ 表示 Legendre-Fenchel 变换, 即

$$l\gamma(y) = y(\gamma')^{-1}(y) - \gamma((\gamma')^{-1}(y)),$$

且 $l\gamma$ 是一类 κ_∞ 函数. 其中, $(\gamma')^{-1}(y)$ 表示 $\frac{d\gamma(y)}{dy}$ 的逆函数.

为了研究系统(1), 考察一般非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}$ 定义如式(1)系统, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{g}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是光滑连续函数, $\mathbf{x} = 0$ 是系统的平衡点.

引理 1.2^[8] 构造式(2)系统的辅助系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})l\gamma(2|L_{g_1}V|) \frac{(L_{g_1}V)^T}{|L_{g_1}V|^2} + \\ &\quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 是一个设计的 Lyapunov 函数; γ 是一

类 κ_∞ 函数, 其导数存在且也是一类 κ_∞ 函数; $L_{g_1}V$ 是李导数, 表示 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}_1(\mathbf{x})$; $L_{g_2}V$ 表示 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}_2(\mathbf{x})$; L_fV 表示 $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. 假定存在一正定函数 $R_2(\mathbf{x})$, 控制律

$$u = \alpha(\mathbf{x}) = -R_2^{-1}(\mathbf{x})(L_{g_2}V) \quad (4)$$

使式(3)系统全局渐近稳定, 则控制律

$$u = \alpha^*(\mathbf{x}) = \beta\alpha(\mathbf{x}) = -\beta R_2^{-1}(\mathbf{x})(L_{g_2}V), \beta \geq 2 \quad (5)$$

通过使目标泛函

$$\begin{aligned} J(u) &= \sup_{d \in B} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[2\beta V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \int_0^t \left(l(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + R_2(\mathbf{x})u^2 - \beta\lambda\gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) \right) d\tau \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

达到极小, 解式(3)系统的逆最优控制问题. 其中, d 是 \mathbf{x} 局部有界函数的集合,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= -2\beta \left[L_fV - \frac{\beta}{2} L_{g_2}V R_2^{-1}(\mathbf{x})(L_{g_2}V) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\lambda}{2} l\gamma(2|L_{g_1}V|) \right], \lambda \in (0, 2] \end{aligned} \quad (7)$$

式(6)目标泛函也称为式(2)系统的微分对策问题, 又称为“最坏情况下的最优控制”, 方程(7)称为式(2)系统关于 $V(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 的 HJI 方程, β, λ 称为设计的自由度.

问题是设计式(1)系统的控制律和参数自适应律, 使系统输出 y 渐近跟踪一个给定的有界参考信号 $y_r(t)$ (假定是光滑的), 并保持闭环系统的其他信号都有界, 且确保待定的目标泛函最小. 记跟踪误差

$$e_i = x_i - y_r^{(i-1)}, i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

式中, $y_r^{(k)}$ 表示 y_r 的 k 阶导数, 且有 $y_r^{(0)} = y_r$. 根据式(1), 得到跟踪误差方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_i &= e_{i+1} + \boldsymbol{\varphi}_i^T\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_i^T\mathbf{d}, (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \dot{e}_n &= \bar{u} + \boldsymbol{\varphi}_n^T\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}_n^T\mathbf{d} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中, $\bar{u} = u - y_r^{(n)}$.

2 逆最优控制器设计

现在采用 Backstepping 递归思想, 来设计式(9)系统的参数自适应律和逆最优控制器. 作坐标变换

$$z_i = e_i - \alpha_{i-1}(t, \bar{e}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}}), (i = 1, \dots, n) \quad (10)$$

式中, $\alpha_0 = 0$. 在某些文献中 $\alpha_{i-1}(t, \bar{e}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 取成

$\alpha_{i-1}(y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i-1)}, \bar{e}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 的形式, 然而因 $y_r(t)$ 是 t 的已知函数, 故它们与式(10)里的取法是一致的.

取 $\gamma(y) = \frac{1}{\mu}y^2$, 其中, μ 是任意设定的常数, 由引理 1.1 可得 $t\gamma(2y) = \mu y^2$, 并由引理 1.2, 构造式(9)系统的辅助系统为

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 + \boldsymbol{\varphi}_1^T \boldsymbol{\theta} \\ \vdots \\ e_n + \boldsymbol{\varphi}_{n-1}^T \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\varphi}_n^T \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} + \mu \mathbf{g}_1 (L_{g_1} V)^T + \mathbf{g}_2 \bar{u} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{g}_1 = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$, $\mathbf{g}_2 = [0, \dots, 0, 1]^T$.

设计式(9)系统的 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 为

$$V(\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{P}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$$

其中, \mathbf{P} 是对称正定矩阵, 取 $z_0 = 0, \alpha_0 = 0, x_{n+1} = 0, z_{n+1} = 0$. 考虑到

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i=1}^n z_i \left(-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \sum_{i=1}^n z_i \left(-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \dot{\mathbf{e}} &= z_n \bar{u} + \mu |\mathbf{w}_n|^2 z_n^2 + \mu z_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_n - z_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e_k} e_{k+1} + \mu \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i z_i + \\ & z_n z_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[z_{i-1} + \alpha_i + \mu \left(\sum_{k=1}^i \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} e_{k+1} \right] z_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\theta} z_i \end{aligned} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{w}_j = \boldsymbol{\eta}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} \boldsymbol{\eta}_k, j = 1, 2, \dots, n; \mathbf{w}_i = \boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} \boldsymbol{\varphi}_k, i = 1, 2, \dots, n$.

Lyapunov 函数 $V(\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 沿式(11)系统的解对时间的变化率是

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} \dot{\mathbf{e}} + \frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \frac{\partial V}{\partial t} = z_n \bar{u} + \mu |\mathbf{w}_n|^2 z_n^2 + \mu z_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_n - z_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e_k} e_{k+1} + \mu \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i z_i + \\ & z_n z_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[z_{i-1} + \alpha_i + \mu \left(\sum_{k=1}^i \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} e_{k+1} \right] z_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\theta} z_i + \\ & \sum_{i=1}^n z_i \left(-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + \sum_{i=1}^n z_i \left(-\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \right) = \\ & z_n \bar{u} + \mu |\mathbf{w}_n|^2 z_n^2 + \mu z_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_n - z_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e_k} e_{k+1} + \mu \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i z_i + z_n z_{n-1} + \\ & \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\theta} z_i + \sum_{i=1}^{n-1} \left[z_{i-1} + \alpha_i + \mu \left(\sum_{k=1}^i \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} e_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right] z_i - \\ & \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} z_n - z_n \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{P}^{-1} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \end{aligned} \quad (15)$$

在式(15)中, 设计 α_i 为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -z_{i-1} - c_i z_i - \mu |\mathbf{w}_i|^2 z_i - 2\mu \left(\sum_{k=1}^{i-1} \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_i + \\ & \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial e_k} e_{k+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} - \mathbf{w}_i^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \boldsymbol{\tau}_i + \left(\sum_{k=1}^{i-2} z_{k+1} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) \mathbf{P} \bar{\mathbf{w}}_i \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_{i-1} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{w}}_i z_i = \mathbf{P} \sum_{k=1}^i \bar{\mathbf{w}}_k z_k \quad (17)$$

将式(16)代入式(15), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n \left[\bar{u} + z_{n-1} + \mu |\mathbf{w}_n|^2 z_n + 2\mu \left(\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{w}_k^T z_k \right) \mathbf{w}_n - \left(\sum_{k=1}^{n-2} z_{i+1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \right) \mathbf{P} \bar{\mathbf{w}}_n - \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e_k} e_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} + \bar{\mathbf{w}}_n^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right] + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\tau}_n - \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}) - \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} z_{i+1} \right) (\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \boldsymbol{\tau}_n) \end{aligned} \quad (18)$$

设计参数自适应律

$$\dot{\hat{\theta}} = \tau_n = P \sum_{k=1}^n \bar{w}_k z_k \quad (19)$$

由式(10), $e_{k+1} = z_{k+1} + \alpha_k, k=1, 2, \dots, n-1$, 当 $z=0$ 时, 方程(18)中中括号后四项等于零, 因此, 根据中值定理, 存在光滑函数 $\phi_k, k=1, 2, \dots, n$, 使式(20)成立.

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial e_k} e_{k+1} - \frac{\partial \alpha_{n-1} \hat{\theta}}{\partial \hat{\theta}} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} + \bar{w}_n^T \hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \phi_i z_i \quad (20)$$

将式(19)、(20)代入式(18), 得

$$\dot{V}(z, \hat{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n \bar{u} + \mu |w_n|^2 z_n^2 + z_n \sum_{i=1}^n \Phi_i z_i \quad (21)$$

其中,

$$\Phi_i = 2\mu w_i^T w_n + \phi_i, i=1, 2, \dots, n-2;$$

$$\Phi_{n-1} = 1 + 2\mu w_{n-1}^T w_n + \phi_{n-1};$$

$$\Phi_n = \phi_n.$$

若设计控制律 \bar{u} 取方程(4)的形式, 则

$$R_i(e) = \left(c_n + \mu |w_n|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i} \right)^{-1} > 0, c_n > 0.$$

将上式代入式(4), 再代入式(21), 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(z, \hat{\theta}) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 - \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \left(z_i - \frac{\Phi_i}{c_i} z_n \right)^2. \end{aligned}$$

由引理 1.2 得, 控制律

$$\begin{aligned} \bar{u} = \beta \alpha(e) = & -\beta R_2(e)^{-1} (L_{g_2} V)^T = \\ & -\beta \left(c_n + \mu |w_n|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i} \right)^{-1} z_n \quad (22) \end{aligned}$$

解式(9)系统的逆最优控制问题, 从而解系统(1)的逆最优跟踪问题.

α_i 的设计不是惟一的, 具有一定的灵活性. 在文献[3]中, u 的设计是使方程(15)中括号内所有项被取消, 使第二项等于 $-c_n z_n^2$, 这样设计确保了系统的稳定性, 但不是逆最优控制设计. 对于式(9)系统, 在逆最优控制策略式(22)的作用下, 令 $\beta=2, \lambda=2$, 由引理 1.2 的证明过程, 目标泛函(6)取得极值

$$J^* = 2|z(0)|^2 + 2\hat{\theta}^T(0)P^{-1}\hat{\theta}(0).$$

逆最优控制律(22)是处处连续的, 且 $\alpha(0)=0$.

3 性能估计

定理 3.1 闭环系统(9)、(22), 令 $\beta=2, \lambda=2$,

下列性能估计不等式成立,

$$\int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \frac{\bar{u}^2}{2 \left(c_n + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i} \right)} \right] dt \leq \frac{1}{\mu} \|d\|_2^2 + 2\beta |z(0)|^2 + \beta |\hat{\theta}(0)|_{P^{-1}}^2.$$

证明 由引理 1.2, 控制律式(22)是逆最优控制, 目标泛函式(6)改写为

$$\begin{aligned} J(u) = & \sup_{d \in B} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[4V(x, \hat{\theta}) + \int_0^t \left(2 \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \right. \right. \right. \\ & 2 \sum_{i=1}^n c_i \left(z_i - \frac{\Phi_i}{c_i} z_n \right)^2 + \\ & \left. \left. \left. \frac{u^2}{c_n + \mu |w_n|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i}} - \frac{1}{\mu} |d|^2 \right) dt \right] \right\} = \\ & 2|z(0)|^2 + 2\hat{\theta}^T(0)P^{-1}\hat{\theta}(0), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(2 \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \frac{u^2}{c_n + \mu |w_n|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i}} - \frac{1}{\mu} |d|^2 \right) dt \leq \\ \int_0^\infty \left(2 \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n c_i \left(z_i - \frac{\Phi_i}{c_i} z_n \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{u^2}{c_n + \mu |w_n|^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i^2}{2c_i}} - \frac{1}{\mu} |d|^2 \right) dt \leq J^*. \end{aligned}$$

定理 3.1 得证.

4 算例与结论

考察二阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \theta + x_1 d, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \theta + (x_1^2 + x_2) d + u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

根据前述算法, 得

$$\alpha_1 = -c_1 e_1 - x_1^2 e_1 - x_1^2 \hat{\theta},$$

$$\dot{\hat{\theta}} = P[x_1^2 e_1 + (x_1 x_2 + c_1 x_1^2 + x_1^4)(e_2 - \alpha_1)],$$

$$\phi_1 = P x_1^4 - (c_1 + x_1^2)^2,$$

$$\phi_2 = c_1 + x_1^2 + P x_1^2 (x_1 x_2 + c_1 x_1^2 + x_1^4),$$

$$u = \ddot{y}_r - \frac{\beta(e_2 - \alpha_1)}{c_2 + \mu A^2 + \frac{1 + 2\mu x_1 A + \phi_1}{2c_1} + \frac{\phi_2^2}{2c_2}}.$$

式中,

$$A = x_1^2 + x_2 + c_1 x_1 - x_1^3.$$

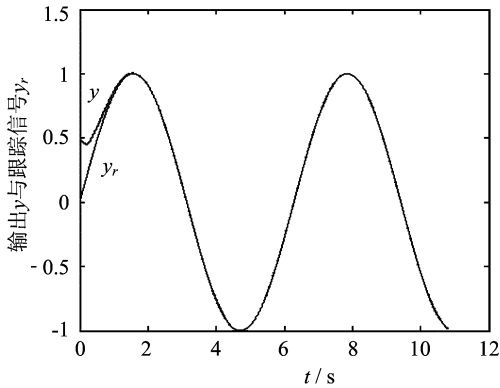


图 1 对正弦信号的跟踪

Fig. 1 Tracking for sin function

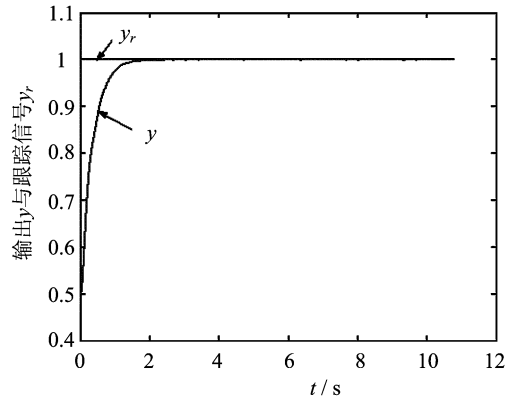


图 2 对阶跃信号的跟踪

Fig. 2 Tracking for step function

取 $\beta=2, \lambda=2, \mu=1, c_1=c_2=3, \theta=0.5, \hat{\theta}(0)=0.2, P=0.3, x_1(0)=0.5, x_2(0)=0.2$, 假定扰动

$$d = 0.1 \sin(t) + 0.25 \cos(13t)$$

(只要有界就满足要求). 分别对 $y_r = \sin(t)$ 和 $y_r = 1$, 利用 Matlab 语言编程进行仿真. 仿真结果如图 1, 图 2 所示. 由图 1, 图 2 可见, 在虚拟控制律 α_1 、控制律 u 以及参数自适应律的作用下, 跟踪效果是令人满意的, 说明了该控制方案的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Freeman R A, Kokotovic P V. Robust Nonlinear Control Design[M]. Boston: Birkhauser, 1996.
- [2] Freeman R A, Kokotovic P V. Inverse optimality in robust stabilization[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, 34(4):1 365-1 391.
- [3] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design [M]. New York: Wiley, 1995.
- [4] JI Hai-bo, CHEN Zhi-fu, XI Hong-sheng, et al. Robust adaptive tracking of stochastic nonlinear systems with uncertain noises[J]. Control Theory & Applications, 2003, 20(6):843-848.

季海波, 陈志福, 奚宏生, 等. 具有不确定噪声的随机非线性系统的鲁棒自适应跟踪[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6):843-848.

- [5] HUANG Chang-shui, RUAN Rong-yao. Robust adaptive control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(1):82-87.
- 黄长水, 阮荣耀. 一类不确定非线性系统的鲁棒自适应控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(1):82-87.
- [6] Jing Z P, Kanellakopoulos I. Global output-feedback tracking for a benchmark nonlinear system[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2000, 45(5):907-915.
- [7] Li Z H, Krstic M. Optimal design of adaptive tracking controllers for non-linear systems [J]. Automatica, 1997, 33(8): 1 459-1 473.
- [8] WANG Jun, JI Hai-bo, XI Hong-sheng, et al. Adaptive inverse optimal control for strict-feedback nonlinear systems [J]. Journal of Science and Technology of China, 2002, 32(6):713-719.
- 王俊, 季海波, 奚宏生, 等. 严格反馈非线性系统的自适应逆最优控制[J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(6):713-719.
- [9] Krstic M, Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems[M]. New York: Springer, 1998.