文章编号：0253-374X(2010)05-0762-04 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.05.024

Finsler 流形的强极小子流形

贺 群，苗 玲
（同济大学 数学系，上海 200092）

摘要：对于 Finsler 流形间非蜕化的光滑映射，利用射影球丛纤维上的散度公式给出了其能量泛函第一变分公式的另一种简洁的证明．同时，给出了 Randers 空间中子流形关于 Finsler 度量和黎曼度量的第二基本形式，以及平均曲率向量场之间的关系．最后，给出了 Randers 空间中强极小子流形的一个分类定理．

关键词：强极小子流形；Randers 度量；能量泛函
中图分类号：O 186.14 **文献标识码**：A

Strongly Minimal Submanifolds of Finsler Manifold

HE Qun, *MIAO Ling*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For the nondegenerate smooth map between manifolds, a simpler way to prove the first variation formula of the energy functional is given by using the divergence formula on fibre of the projective sphere bundle. At the same time, the relationship between the second fundamental forms (resp. the mean curvature) of Finsler metric and that of Riemannian metric in Randers spaces is discussed. At last, a classification theorem of strongly minimal submanifolds is given.

Key words: strongly minimal submanifold; randers metric; energy functional

文献[1]运用由射影球丛诱导的体积形式给出了 Finsler 流形之间非蜕化光滑映射能量泛函的第一和第二变分公式．但这些公式的推导过程相当繁琐，本文利用球丛纤维上的散度公式，从另一个角度出发，给出了能量泛函第一变分公式的另一种证明，大大简化了推导过程．

Finsler 子流形几何学的发展已经历了相当长的时间，但由于其几何形式复杂，计算量大，研究进展缓慢，许多黎曼子流形几何学中重要的结果并未得到很好的推广，尚有许多问题有待进一步研究．文献[2]使用由射影球丛诱导的体积形式研究 Finsler 子流形几何，给出了子流形第二基本形式和平均曲率的定义，并引入了极小子流形和强极小子流形的概念．这两种极小性在黎曼流形中是等价的．文献[3]研究了 Randers 空间的子流形，证明了关于 Randers 度量 $\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}$ 和黎曼度量 $\widetilde{\alpha}$，M 的体积元相等，从而极小性完全相同．本文将进一步给出其第二基本形式和平均曲率向量场之间的关系，并以此来研究强极小子流形的性质，证明了 Randers 空间中的强极小子流形必为全测地子流形或者黎曼极小子流形，从而也表明极小性和强极性在非黎曼情形是不同的．

1 Finsler 子流形

设(M,F)是 n 维 Finsler 流形．投影 $\pi: TM\to M$ 给出了到 $TM\backslash\{0\}$上拉回丛 π^*TM 及其对偶丛 π^*T^*M 的提升．以下，将在射影球丛 SM 上讨论，并将 y 看作齐次坐标．除特别声明外，将使用下列指标值域：

$$1\leqslant i,j,\cdots\leqslant n;\quad 1\leqslant \alpha,\beta,\cdots\leqslant m(>n)$$

在 π^*T^*M 中，存在一个整体的截面 $\omega=[F]_{y^i}\mathrm{d}x^i$，称为 Hilbert 形式，它的对偶向量场是 $\ell=\ell^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$\ell^i=y^i/F$，称为特异场．射影球丛 SM 关于 $\hat{g}$ 的体积元 $\mathrm{d}V_{SM}$ 可表示为

收稿日期：2009-02-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771160；10971239)；上海市自然科学基金资助项目(09ZR1433000)
作者简介：贺 群(1962—)，女，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为整体微分几何．E-mail:hequn@tongji.edu.cn

$$dV_{SM} = \Omega d\tau \wedge dx \tag{1}$$

其中

$$\Omega := \det\left(\frac{g_{ij}}{F}\right),$$

$$d\tau := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}y^i dy^1 \wedge \cdots \wedge d\hat{y}^i \wedge \cdots \wedge dy^n \tag{2}$$

n 维 Finsler 流形(M,F)的体积形式定义为

$$dV_M := \sigma(x)dx, \quad \sigma(x) := \frac{1}{c_{n-1}}\int_{S_xM}\Omega d\tau \tag{3}$$

其中:c_{n-1}表示 $n-1$ 维单位 Euclidean 球面 S^{n-1} 的体积;S_xM 是 SM 在 $x\in M$ 的纤维. 在 $\pi^* TM$ 上存在唯一的 Chern 联络${}^c\nabla$,使得${}^c\nabla\frac{\partial}{\partial x^j} = \omega_j^i\frac{\partial}{\partial x^i}$,$\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$ 满足

$$d(dx^i) - dx^j \wedge \omega_j^i = 0$$
$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{jk}\omega_i^k = 2A_{ijk}\delta y^k \tag{4}$$

其中:$\delta y^i = \frac{1}{F}(dy^i + N_j^i dx^j)$;$A_{ijk} = FC_{ijk}$ 和 $C_{ijk} = \frac{1}{4}[F^2]_{y^iy^jy^k}$ 称为 Cartan 张量. $\pi^* TM$ 上的 Berwald 联络 ${}^b\nabla$可表示为[4]

$${}^b\nabla = {}^c\nabla + \dot{A}, \quad {}^b\omega_j^i = \omega_j^i + \dot{A}_{jk}^i dx^k \tag{5}$$

其中,$\dot{A}_{jk}^i$是张量$A_{jk}^i = g^{il}A_{ljk}$沿 Hilbert 形式的共变导数.

作为 Riemannian 流形,$(SM,\hat{g})$上微分形式 $\phi = \phi_i dx^i$ 的散度为[5]

$$\mathrm{div}_{\hat{g}}\phi = g^{ij}(\phi_{i|j} - \phi_i\dot{\eta}_j) \tag{6}$$

其中 $\dot{\eta}_j = \dot{A}_{kj}^k$,

$$\phi_{i|j} = \frac{\delta\phi_i}{\delta x^j} - \phi_k\Gamma_{ij}^k \tag{7}$$

$$\frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}, \quad N_j^k = \Gamma_{ji}^k y^i \tag{8}$$

引理 1[1] 设 $f:M\to\widetilde{M}$ 是非蜕化的光滑映射,f_t 为$f=f_0$ 的变分,$\widetilde{V}$ 为 f_t 诱导的变分向量场,则能量泛函的第一变分是

$$\frac{d}{dt}E(f_t)|_{t=0} = -\frac{1}{V_{ol}(S^{n-1})}\int_{SM}\langle\tau(f),\widetilde{V}\rangle_{\widetilde{g}}dV_{SM} \tag{9}$$

其中

$$\tau(f) = \mathrm{tr}_g({}^b\widetilde{\nabla}^{f^{-1}}df) + 4\mathrm{tr}_g\widetilde{C}(df,F^c\widetilde{\nabla}_{\hat{\ell}}^{f^{-1}}df) + \mathrm{tr}_g\widetilde{C}(df,df,F^2({}^c\widetilde{\nabla}_{\hat{\ell}}^{f^{-1}}df)(\hat{\ell}))$$

这里

$$\widetilde{C}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \widetilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha\widetilde{X}^\beta\widetilde{Y}^\gamma\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha}, \widetilde{C}_{\beta\gamma}^\alpha = \widetilde{g}^{\alpha\gamma}\widetilde{C}_{\sigma\beta\gamma},$$

$$\widetilde{C}(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}) := \widetilde{C}_{\beta\gamma\sigma}^\alpha\widetilde{X}^\beta\widetilde{Y}^\gamma\widetilde{Z}^\sigma\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha}, \widetilde{C}_{\beta\gamma\sigma}^\alpha = \widetilde{g}^{\alpha\tau}\widetilde{C}_{\tau\beta\gamma\sigma}$$

引理 2[6] 设(M,F)是 Finsler 流形,则球丛 SM 上的任意函数f满足

$$\int_{S_xM}g^{ij}[F^2f]_{y^iy^j}\Omega d\tau = 2n\int_{S_xM}f\Omega d\tau$$

设 $f:M\to\widetilde{M}$ 是等距浸入;$\pi^*\mathcal{N} = (\pi^* TM)^\perp$ 是 $\pi^* TM$ 在 $\pi^*(f^{-1}T\widetilde{M})$中关于 $\widetilde{g}$ 的余正交丛.

$$h := \frac{h^\alpha}{F^2}\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha}, \quad h^\alpha = f_{ij}^\alpha y^iy^j - f_k^\alpha G^k + \widetilde{G}^\alpha,$$

$$h_\alpha = \widetilde{g}_{\alpha\beta}h^\beta \tag{10}$$

称为 f 的法曲率,其中 G^i 和 $\widetilde{G}^\alpha$ 分别是(M,F)和$(\widetilde{M},\widetilde{F})$的测地系数;

$$\mu := \mu_h = \frac{\left(\int_{S_xM}\frac{h^\alpha}{F^2}\Omega d\tau\right)d\widetilde{x}^\alpha}{c_{n-1}\sigma(x)} \tag{11}$$

称为 f 的平均曲率形式,当它等于零时,f 称为极小浸入;

$$B := \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\beta}[h_\beta]_{y^iy^j}dx^i\otimes dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha} \tag{12}$$

称为 f 的第二基本形式,它的迹

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}_gB = \frac{1}{2n}(g^{ij}\widetilde{g}^{\alpha\beta}[h_\beta]_{y^iy^j})\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha}$$

称为 f 的平均曲率向量场[1]. 由文献[2]可知 $h,B,H\in\pi^*\mathcal{N}$. 如果 H 恒为零,则 f 称为强极小浸入. 如果 B 恒为零,则 f 称为全测地浸入. 显然当且仅当 $h=0$ 时,$B=0$,即(M,F)中任意测地线同样是$(\widetilde{M},\widetilde{F})$中测地线. 则通过计算可得

引理 3 设 $f:(M,\alpha+\beta)\to(\widetilde{M},\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})$是到$(n+p)$维 Randers 空间的等距浸入,如果 $\widetilde{\beta}$ 是闭的 1-形式,则

$$h = \frac{\alpha^2}{F^2}[\bar{h} - \widetilde{\beta}(\bar{h})\widetilde{l}] \tag{14}$$

其中,$\bar{h}$ 是 f 关于 $\widetilde{\alpha}$ 的法曲率.

2 能量泛函第一变分公式的新证明

设(M,F)和$(\widetilde{M},\widetilde{F})$是 Finsler 流形，$f:M\to\widetilde{M}$是非蜕化的光滑映射，即 $\mathrm{Ker}df=\{0\}$，设 $f_t:M\to\widetilde{M}$，$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$是 f 的光滑变分，使得 $f_0=f$ 并且 $f_t|_{\partial M}=f|_{\partial M}$. 则$\{f_t\}$诱导了一个向量场，即

$$\widetilde{V}:=\frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0}=\widetilde{V}^\alpha\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}^\alpha}\quad \widetilde{V}|_{\partial M}=0 \tag{15}$$

称为$\{f_t\}$的变分向量场. f 的能量密度 $e(f):SM\to R$ 定义为

$$e(f)(x,y)=\frac{1}{2}g^{ij}(x,y)f_i^\alpha f_j^\beta\widetilde{g}_{\alpha\beta}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \tag{16}$$

其中：$f_i^\alpha=\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}$；$\widetilde{x}^\alpha=f^\alpha(x)$，$\widetilde{y}^\alpha=f_i^\alpha y^i$；$\widetilde{g}_{\alpha\beta}$表示$(\widetilde{M},\widetilde{F})$上的基本张量.

文献[1]给出了能量泛函的第一变分公式(见引理 1)，但它的表达式及推导过程非常繁琐. 这里，首先利用引理 2 中的公式改写引理 1，并给出另一种非常简洁的证明.

定理 1 设 $f:M\to\widetilde{M}$ 是非蜕化的光滑映射，f_t 为$f=f_0$ 的变分，$\widetilde{V}$ 为 f_t 诱导的变分向量场，则能量泛函的第一变分是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(f_t)|_{t=0}=-\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}<\tau(f),\widetilde{V}>_{\widetilde{g}}\mathrm{d}V_{SM}=-\frac{n}{c_{n-1}}\int_{SM}<\widetilde{\tau},\widetilde{V}>_{\widetilde{g}}\mathrm{d}V_{SM} \tag{17}$$

其中

$$\widetilde{\tau}^\alpha=f_{ij}^\alpha y^iy^j-f_k^\alpha G^k+\widetilde{G}^\alpha \tag{18}$$

证明 由引理 2 得 f 的能量泛函为

$$E(f)=\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}e(f)\mathrm{d}V_{SM}=\frac{1}{2c_{n-1}}\int_{SM}g^{ij}f_i^\alpha f_j^\beta\widetilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}V_{SM}=\frac{1}{4c_{n-1}}\int_{SM}g^{ij}(\widetilde{F})^2_{y^iy^j}\mathrm{d}V_{SM}=\frac{n}{2c_{n-1}}\int_{SM}\frac{\widetilde{F}^2}{F^2}\mathrm{d}V_{SM}$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(f_t)|_{t=0}=\frac{n}{2c_{n-1}}\int_{SM}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{F}_t^2}{F^2}\right)\Big|_{t=0}\mathrm{d}V_{SM} \tag{19}$$

其中，$\widetilde{F}_t=f_t^*\widetilde{F}$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{F}_t^2}{F^2}\right)\Big|_{t=0}=\frac{2\widetilde{F}}{F^2}([\widetilde{F}]_{\widetilde{x}^\alpha}\widetilde{V}^\alpha+[\widetilde{F}]_{\widetilde{y}^\alpha}[\widetilde{V}^\alpha]_{x^k}y^k) \tag{20}$$

设 $\theta:=\theta_i\mathrm{d}x^i=\dfrac{\widetilde{F}}{F}[\widetilde{F}]_{\widetilde{y}^\alpha}\widetilde{V}^\alpha[F]_{y^i}\mathrm{d}x^i$. 由于 $\dfrac{\delta\widetilde{F}}{\delta\widetilde{x}^\alpha}=0$，$\dfrac{\delta F}{\delta x^i}=0$，则由式(6)可得

$$\mathrm{div}_{\hat{g}}\theta=\frac{\widetilde{F}}{F}g^{ij}[\widetilde{F}]_{\widetilde{y}^\alpha}[F]_{y^j}[\widetilde{V}^\alpha]_{x^i}+\frac{1}{F^2}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\widetilde{V}^\alpha\widetilde{\tau}^\beta+\frac{\widetilde{F}}{F^2}[\widetilde{F}]_{\widetilde{y}^\sigma}\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\alpha}\widetilde{V}^\alpha\widetilde{y}^\beta$$

因而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(f_t)|_{t=0}&=\frac{n}{2c_{n-1}}\int_{SM}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\widetilde{F}_t^2}{F^2}\right)\Big|_{t=0}\mathrm{d}V_{SM}=\\&\frac{n}{c_{n-1}}\int_{SM}(\mathrm{div}_{\hat{g}}\theta-\frac{1}{F^2}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\widetilde{V}^\alpha\widetilde{\tau}^\beta)\mathrm{d}V_{SM}=\\&-\frac{n}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\widetilde{\tau},\widetilde{V}\rangle_{\widetilde{g}}\mathrm{d}V_{SM}=\\&-\frac{n}{2c_{n-1}}\int_{SM}g^{ij}(\widetilde{\tau}_\alpha)_{y_iy_j}\widetilde{V}^\alpha\mathrm{d}V_{SM}=\\&-\frac{1}{c_{n-1}}\int_{SM}\langle\tau(f),\widetilde{V}\rangle_{\widetilde{g}}\mathrm{d}V_{SM}\end{aligned}$$

3 Randers 空间的强极小子流形

设 $f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$是到$(n+p)$维 Randers 空间$(\widetilde{M},\widetilde{F})$的等距浸入，则

$$\widetilde{F}=\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}=\sqrt{\widetilde{\alpha}_{\alpha\beta}(\widetilde{x})\widetilde{y}^\alpha\widetilde{y}^\beta}+\widetilde{b}_\alpha(\widetilde{x})\widetilde{y}^\alpha,$$

$$\|\widetilde{\beta}\|=\sqrt{\widetilde{\alpha}^{\alpha\beta}\widetilde{b}_\alpha\widetilde{b}_\beta}=\widetilde{b}(0\leqslant\widetilde{b}<1)$$

设 $a_{ij}=\widetilde{a}_{\alpha\beta}f_i^\alpha f_j^\beta$，$b_i=\widetilde{b}_\alpha f_i^\alpha$，则 $F=f^*\widetilde{F}=\alpha+\beta=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}+b_iy^i$. 显然$(M,F)$也是一个 Randers 空间.

下面考虑关于 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{\alpha}$ 的第二基本形式和平均曲率之间的关系. 设 $\bar{G}^i$ 和$\bar{\widetilde{G}}^\alpha$ 分别代表(M,F)和$(\widetilde{M},\widetilde{F})$关于 Riemannian 度量 α 和 $\widetilde{\alpha}$ 的测地系数，$\bar{h}$ 是 f 关于 $\widetilde{\alpha}$ 的法曲率. 由引理 3，如果 $\widetilde{\beta}$ 是闭的 1-形式，则

$$h_\alpha=\frac{F}{\alpha}\bar{h}_\alpha \tag{21}$$

根据式(12)对式(21)两边求导,由于$(h^{\alpha})_{y^i}=2h^{\alpha}_{ik}y^k$,并且关于$\widetilde{\alpha}$的第二基本形式有$\bar{B}^{\alpha}_{ij}=\bar{h}^{\alpha}_{ij}$,则由文献[4]有关 Randers 度量的公式可得

$$
\begin{aligned}
2B^{\beta}_{ij}=&\left(\frac{3\beta}{\alpha^2F}\alpha_{y^i}\alpha_{y^j}-\frac{\beta\alpha_{ij}}{\alpha^2F}-\frac{1}{\alpha F}(b_i\alpha_{y^j}+b_j\alpha_{y^i})\right)\cdot\\
&(\bar{h}^{\beta}-\alpha^2\widetilde{\beta}(\bar{h})\widetilde{l}^{\beta})+\frac{2\beta}{\alpha F}\widetilde{l}^{\beta}\widetilde{b}_{\gamma}(\bar{B}^{\gamma}_{kj}y^k\alpha_{y^i}+\\
&\bar{B}^{\gamma}_{ki}y^k\alpha_{y^j})-\frac{2\beta}{\alpha F}(\bar{B}^{\beta}_{kj}y^k\alpha_{y^i}+\bar{B}^{\beta}_{ki}y^k\alpha_{y^j})+\\
&\frac{2}{F}(b_i\bar{B}^{\beta}_{kj}y^k+b_j\bar{B}^{\beta}_{ki}y^k)-\frac{2}{F}\widetilde{l}^{\beta}\widetilde{b}_{\gamma}(b_i\bar{B}^{\gamma}_{kj}y^k+\\
&b_j\bar{B}^{\gamma}_{ki}y^k)-2\widetilde{l}^{\beta}\widetilde{b}_{\alpha}\bar{B}^{\alpha}_{ij}+2\bar{B}^{\beta}_{ij}
\end{aligned}
$$

对(27)求迹得

$$
H=\frac{\alpha}{F}(\bar{H}-\widetilde{\beta}(\bar{H})\widetilde{\ell})-\frac{(n+1)\alpha\beta}{2nF^2}(\bar{h}-\widetilde{\beta}(\bar{h})\widetilde{\ell})
$$

于是有以下定理:

定理 1　如果 $f:(M,\alpha+\beta)\to(\widetilde{M},\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})$是到$(n+p)$维 Randers 空间的等距浸入,$\widetilde{\beta}$是闭的 1-形式,则关于$\widetilde{F}$和$\widetilde{\alpha}$的第二基本形式$B$和$\bar{B}$以及平均曲率$H$和$\bar{H}$的关系为

$$
\begin{aligned}
B=&(\bar{B}+\widetilde{\beta}(\bar{B})\widetilde{\ell})-\frac{1}{2F}[3\beta\bar{\omega}\otimes\bar{\omega}-\beta a-\\
&\alpha\kappa(\beta\otimes\bar{\omega}+\bar{\omega}\otimes\beta)](\bar{h}-\widetilde{\beta}(\bar{h})\widetilde{\ell})+\\
&[\beta-\frac{\beta}{\alpha}\bar{\omega}]\otimes[\bar{B}(l)-\widetilde{\beta}(\bar{B}(l))\widetilde{\ell}]+\\
&[\bar{B}(l)-\widetilde{\beta}(\bar{B}(l))\widetilde{\ell}]\otimes\left[\beta-\frac{\beta}{\alpha}\bar{\omega}\right]
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{\alpha}{F}(\bar{H}-\widetilde{\beta}(\bar{H})\widetilde{\ell})-\\
&\frac{(n+1)\alpha\beta}{2nF^2}(\bar{h}-\widetilde{\beta}(\bar{h})\widetilde{\ell})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

其中,$a=a^{ij}dx^i\otimes dx^j$.

定理 3　设 $f:(M,\alpha+\beta)\to(\widetilde{M},\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta})$是到$(n+p)$维 Randers 空间的等距浸入,$\widetilde{\beta}$是闭的 1-形式. 如果 f 是强极小浸入,则,或者 $\beta=0$,$(M,F)=(M,\alpha)$是$(\widetilde{M},\widetilde{\alpha})$的黎曼极小子流形,或者$(M,F)$是$(\widetilde{M},\widetilde{F})$的全测地子流形.

证明　由式(11)可得

$$
\begin{aligned}
\bar{\mu}(\widetilde{V})=&\frac{1}{c_{n-1}\sigma(x)}\int_{S_xM}\widetilde{\alpha}(\bar{h},\widetilde{V})\bar{\Omega}d\tau=\\
&\frac{1}{c_{n-1}\sigma(x)}\int_{S_xM}\widetilde{\alpha}(\bar{H},\widetilde{V})\bar{\Omega}d\tau
\end{aligned}
\tag{24}
$$

其中$\bar{\Omega}:=\det\left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha}\right)$. 将$H=0$代入式(11)得$\mu(\widetilde{V})=0$. 由文献[2]可知,在 Randers 空间中,$\mu(\widetilde{V})=\bar{\mu}(\widetilde{V})$且$\bar{\mu}$与$\bar{H}$对偶. 所以,$\bar{H}=0$. 将之代入式(24)即得$\beta=0$,或者$h=0$即$B=0$.

当$\beta=0$时,$(M,F)=(M,\alpha)$是$(\widetilde{M},\widetilde{\alpha})$的黎曼极小子流形.

当$h=0$时,(M,F)是$(\widetilde{M},\widetilde{F})$的全测地子流形,命题得证.

参考文献:

[1] SHEN Y B, ZHANG Y. The second variation of harmonic maps between Finsler manifolds[J]. Science in China Ser A, 2004, 47(1): 39.

[2] HE Q, SHEN Y B. On the mean curvature of Finsler submanifolds[J]. Chin J of Cont Math, 2006, 27C(4): 431.

[3] HE Q, SHEN Y B. On bernstein type theorems in Finsler spaces with the volume form induced from the projective sphere bundle[J]. Proceedings of the American Math Society, 2005, 134(3): 871.

[4] BAO D, CHERN S S, SHEN Z. An introduction to Riemann-Finsler geometry[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

[5] MO X H. Harmonic maps from Finsler manifolds[J]. Illinois J Math, 2001, 45: 1331.

[6] HE Q, SHEN Y B. Some results on harmonic maps for Finsler manifolds[J]. International Journal of Math, 2005, 16(9): 1017.