

含超单元连接子结构的自由界面模态综合法

卢凯良^{1,2}, 邱惠清¹, 毛飞¹

(1. 同济大学机械工程学院, 上海 201804; 2. 江西省交通科学研究所, 江西 南昌 330038)

摘要: 根据模态综合法中连接子结构的定义, 认为连接子结构实际上是一种将全部界面坐标作为主自由度的超单元. 在此基础上, 分别利用静力变换和动力变换将连接子结构变换成超单元, 推导了界面位移和界面力双协调条件下的自由界面模态综合法(超单元间接法). 该法保留了自由界面法的可大大缩减系统自由度、精度高的优点, 并且由于引入了超单元连接子结构, 可合理近似集中阻尼, 在局部非线性结构动力分析中亦具有广泛应用前景. 最后, 将超单元间接法应用于自动化码头桁架桥结构的固有频率和地震反应计算, 将铅芯橡胶支座视为超单元连接子结构, 分析了静力变换和动力变换超单元间接法的计算精度和效率, 并得到了在铅芯橡胶支座不同配置形式下桁架桥的固有特性.

关键词: 模态综合法; 自由界面; 连接子结构; 超单元法; 铅芯橡胶支座

中图分类号: TH 113.1

文献标识码: A

Free-interface Component Mode Synthesis Technique with Link Substructure as Super-element

LU Kailiang^{1,2}, QIU Huiqing¹, MAO Fei¹

(1. College of Mechanical Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Jiangxi Communication Research Institute, Nanchang 330038, China)

Abstract: According to the definition of link substructure in component mode synthesis (CMS) method, link substructure is essentially a kind of super element with the interface degree of freedoms(DOFs). A new technique of free-interface CMS, compatible for both displacement and force on interfaces, was then presented, by transforming link substructure into super element with Guyan static condensation or dynamic condensation. The new technique not only retains free-interface CMS's advantages of reducing the system DOF efficiently and high accuracy, but also can deal with lumped

damping reasonably, thus, it has a widespread application in dynamic analysis of the structures with local non-linearity. Then, the application of the proposed technique was shown by modal and seismic response analysis of a truss bridge in which the girder and brace are lead rubber bearings (LRB) linked. Regarding LRB as super element link substructure, the calculation accuracy and efficiency of Guyan and dynamic condensation methods are compared with finite element method (FEM) or direct integration method. Furthermore, inherent characteristic results of the truss bridge under different LRB disposition forms were obtained.

Key words: component mode synthesis; free interface; link substructure; super element method; lead rubber bearing

在有限元法和计算机广泛应用的基础上, 逐步发展形成了对复杂结构振动分析的模态综合法. 其中, 自由界面模态综合法由于综合方程中不含界面节点位移坐标, 综合效率高及便于和实验模态技术结合和相互验证等优点, 得到了最广泛的应用并在方法上获得不断修正.

各种模态综合法, 相邻子结构之间均为直接对接的共同界面. 针对相邻子结构之间非直接对接的情形, 许多研究者展开了相关研究, 并提出了连接子结构的概念. 文献[1-2]率先研究了采用 Hou 法的自由界面子结构间的非直接对接问题, 通过子结构间耦合弹簧力和阻尼力来集结总体运动方程, 并将这一方法应用于子结构间弱耦合非线性连接的动力问题. 文献[3]提出把弹性连接件, 如船舶组合轴系, 装有减隔振装置的结构等, 作为“软子结构”单独处理, 使子结构界面间不协调的界面转化为“软子结构”的内部变形而子结构与“软子结构”连接处满足协调条件, 采用双协调自由界面模态综合法综合运

收稿日期: 2009-05-08

基金项目: 国家“863”高技术研究发展计划资助项目(2009AA043000); 上海市科学技术委员会重点科技攻关资助项目(06DZ11202); 上海市科委上海工程技术研究中心建设资助项目(08DZ2210103)

作者简介: 卢凯良(1984—), 男, 博士生, 主要研究方向为机械结构动态设计理论与方法. E-mail: lk1984@163.com
邱惠清(1948—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为机械振动及其应用. E-mail: qhq_tj@163.com

动方程;文献[4]进一步引入了连接子结构的概念,连接子结构的讨论仍仅限于弹性或刚性连接件.文献[5-6]给出了模态综合法中连接子结构的特征定义,即仅存在界面自由度而无内部自由度,所有界面自由度又同时与非连接子结构所共有.描述了弹性、刚性和混合型三种类型的连接子结构,提出了具有连接子结构的间接对接混合界面模态综合法,讨论了位移协调和位移与力双协调两种对接方式.另外,其他一些研究者也在间接对接模态综合法上进行了相近研究^[7-8].

根据文献[5-6]给出的模态综合法中连接子结构的特征定义,连接子结构的实质是一种已经静力变换或动力变换过的超单元.基于这一特点,本文推导了含超单元连接子结构的双协调(位移协调和力协调)自由界面模态综合法(简称超单元间接法),并将该方法应用于含铅芯橡胶支座的自动化码头低架桥桁架结构的固有特性和动力响应分析.

1 静力变换超单元间接法

1.1 子结构的划分

不失一般性,讨论两个自由界面子结构间含有一个连接子结构的情形,如图1所示,自由界面子结构A、B之间不直接对接,而是存在一个连接子结构E.子结构E的所有界面自由度与相邻子结构A、B共有,但与某一相邻子结构所共有的自由度不再与其他相邻子结构所共有. ${}^A u_j, {}^B u_j$ 分别为子结构A、B的界面自由度; ${}^E u_{jA}, {}^E u_{jB}$ 分别为子结构E上与子结构A、B共有的界面自由度;显然, ${}^E u_m = [{}^E u_{jA} \quad {}^E u_{jB}]^T$. ${}^A f_j, {}^B f_j$ 分别为子结构A、B作用在各自界面自由度上的界面力向量; ${}^E f_{jA}, {}^E f_{jB}$ 分别为子结构E作用在界面自由度上的界面力向量.

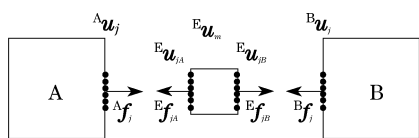


图1 子结构界面对接模型示意图

Fig.1 Substructure interface connection

1.2 各子结构的第一次坐标变换

1.2.1 自由界面子结构

设物理坐标下子结构A的刚度矩阵和质量矩阵为

$${}^A z = \begin{bmatrix} {}^A z_{ii} & {}^A z_{ij} \\ {}^A z_{ji} & {}^A z_{jj} \end{bmatrix}, \quad z = k, m \quad (1)$$

式中:下标*i*表示子结构的非界面自由度,*j*表示子结构的界面自由度.(子结构B亦自由界面子结构,将左上标A改为B即得子结构B的相应矩阵,故以下推导中略去左上标.)

采用前*k*阶主模态 Φ_k 和剩余附着模态 Ψ_d 组成的假设分支模态集 Φ 作为变换矩阵,则物理坐标*u*与模态坐标*p*的变换关系为

$$u = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{id} \\ \Phi_{jk} & \Psi_{jd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ f_j \end{Bmatrix} = \Phi p \quad (2)$$

式中: f_j 为子结构作用在界面自由度*j*上的界面力向量.子结构有、无刚体模态情况下剩余附着模态 Ψ_d 的计算可参考文献[9].

模态对质量矩阵正则化,则模态坐标下,自由界面子结构的质量矩阵和刚度矩阵为

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} I_{kk} & \\ & \Psi_d^T m \Psi_d \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \Lambda_{kk} & \\ & \Psi_d^T k \Psi_d \end{bmatrix} \quad (3b)$$

式中,等式右边矩阵中非对角元素为0.

1.2.2 超单元连接子结构

超单元的特点是将子结构的全部自由度缩聚到界面自由度(即主自由度) ${}^E u_m$ 上.设主坐标 ${}^E u_m$ 、副坐标 ${}^E u_s$ 下连接子结构的质量矩阵和刚度矩阵为

$${}^E z = \begin{bmatrix} {}^E z_{ss} & {}^E z_{sm} \\ {}^E z_{ms} & {}^E z_{mm} \end{bmatrix}, \quad z = m, k \quad (4)$$

经Guyan静凝聚变换,仅在界面自由度下的质量矩阵和刚度矩阵为

$${}^E \tilde{z} = {}^E \Psi_c^T {}^E z {}^E \Psi_c, \quad z = m, k \quad (5)$$

式中: ${}^E \Psi_c$ 为静力变换矩阵

$${}^E \Psi_c = [-{}^E k_{ss}^{-1} {}^E k_{sm} \quad I]^T \quad (6)$$

因 ${}^E u_m = [{}^E u_{jA} \quad {}^E u_{jB}]^T$,可将式(5)写成分块形式

$${}^E \tilde{z} = \begin{bmatrix} {}^E \tilde{z}_{(jA)(jA)} & {}^E \tilde{z}_{(jA)(jB)} \\ {}^E \tilde{z}_{(jB)(jA)} & {}^E \tilde{z}_{(jB)(jB)} \end{bmatrix}, \quad z = m, k \quad (7)$$

1.3 第二次坐标变换

1.3.1 界面位移协调

当各子结构完成第一次模态坐标变换后,在广义坐标 $p = [{}^A p_k \quad {}^A f_j \quad {}^E u_{jA} \quad {}^E u_{jB} \quad {}^B p_k \quad {}^B f_j]^T$ 张成的近似空间下,系统的无阻尼自由振动方程为

$$m \ddot{p} + k p = 0 \quad (8)$$

式中:

自由振动方程

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (19)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \mathbf{m} \mathbf{T} \quad (20a)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (20b)$$

1.4 返回物理坐标,再现子结构

对于自由界面子结构

$$\mathbf{u} = [\mathbf{A}\mathbf{u} \quad \mathbf{B}\mathbf{u}]^T = \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{q} \quad (21)$$

式中:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\Phi_{ik} & \mathbf{B}\Phi_{ik} & \mathbf{A}\Phi_{jk} & \mathbf{B}\Phi_{jk} \\ \mathbf{A}\Psi_{id} & \mathbf{B}\Psi_{id} & \mathbf{A}\Psi_{jd} & \mathbf{B}\Psi_{jd} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

对于超单元连接子结构

$${}^E \mathbf{u} = {}^E \Psi_c \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3 \mathbf{q} \quad (23)$$

2 变频动力变换超单元间接法

2.1 变频动力变换超单元连接子结构

设主、副坐标下连接子结构的刚度矩阵、阻尼矩阵和质量矩阵为

$${}^E \mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}^E \mathbf{z}_{ss} & {}^E \mathbf{z}_{sm} \\ {}^E \mathbf{z}_{ms} & {}^E \mathbf{z}_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m} \quad (24)$$

经变频动力变换后的刚度、阻尼和质量矩阵为

$${}^E \tilde{\mathbf{z}} = {}^E \Psi_d(\omega) {}^T E \mathbf{z} {}^E \Psi_d(\omega), \quad \mathbf{z} = \mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m} \quad (25)$$

式中: ${}^E \Psi_d(\omega)$ 为变频动力变换矩阵; ω 为系统固有频率, 仍为未知.

$${}^E \Psi_d(\omega) = [-{}^E \mathbf{D}(\omega)_{ss}^{-1} {}^E \mathbf{D}(\omega)_{sm} \quad \mathbf{I}]^T \quad (26)$$

$${}^E \mathbf{D}(\omega)_{ss} = {}^E \mathbf{k}_{ss} + j\omega {}^E \mathbf{c}_{ss} - \omega^2 {}^E \mathbf{m}_{ss} \quad (27)$$

$${}^E \mathbf{D}(\omega)_{sm} = {}^E \mathbf{k}_{sm} + j\omega {}^E \mathbf{c}_{sm} - \omega^2 {}^E \mathbf{m}_{sm} \quad (28)$$

将式(25)写成分块形式

$${}^E \tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} {}^E \tilde{\mathbf{z}}_{(jA)(jA)} & {}^E \tilde{\mathbf{z}}_{(jA)(jB)} \\ {}^E \tilde{\mathbf{z}}_{(jB)(jA)} & {}^E \tilde{\mathbf{z}}_{(jB)(jB)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m} \quad (29)$$

至此完成连接子结构的第一次坐标变换. 自由界面子结构的第一次坐标变换同 1.2.1.

2.2 界面力协调

连接子结构 E 的动力平衡方程为

$$\begin{Bmatrix} {}^E \mathbf{f}_{jA} \\ {}^E \mathbf{f}_{jB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^E \tilde{\mathbf{D}}(\omega)_{(jA)(jA)} & {}^E \tilde{\mathbf{D}}(\omega)_{(jA)(jB)} \\ {}^E \tilde{\mathbf{D}}(\omega)_{(jB)(jA)} & {}^E \tilde{\mathbf{D}}(\omega)_{(jB)(jB)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^E \mathbf{u}_{jA} \\ {}^E \mathbf{u}_{jB} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

式中:

$${}^E \tilde{\mathbf{D}}(\omega) = {}^E \tilde{\mathbf{k}} + j\omega {}^E \tilde{\mathbf{c}} - \omega^2 {}^E \tilde{\mathbf{m}} \quad (31)$$

界面位移协调关系与静力变换情况下相同, 注意到式(30)与式(13)的形式相同, 将式(13)中的 $\tilde{\mathbf{k}}$

替换为 $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$ 即得式(30). 因此, 将式(14), (16)中的 $\tilde{\mathbf{k}}$ 也替换为 $\tilde{\mathbf{D}}(\omega)$ 就可得到变频动力变换下的第二次坐标变换; 返回物理坐标, 再现子结构的过程也一样.

由于变频动力变换下, 坐标变换矩阵是关于待求的系统固有频率的函数, 这将导致非线性特征值问题, 需要进行迭代计算, 从而降低了计算效率.

2.3 小结

观察式(27), (28), (31)可知, 忽略阻尼和惯性项, 即假定 $\omega = 0$, 变频动力变换即变为静力变换, 故静力变换是变频动力变换的零阶近似; 如果令 $\omega = \omega_r$ (ω_r 为常数), 则变频动力变换转化为定频动力变换. 静力变换和定频动力变换都是避免非线性特征值问题的有效途径.

无论是静力变换还是动力变换, 本文所推导的超单元间接法最后都将只在各个自由子结构的主模态坐标张成的近似空间下求解系统的动力分析问题, 大大缩减了系统自由度. 因连接子结构的广义坐标不参与构建近似求解空间, 所以当连接子结构中含有非线性单元时, 并不改变近似求解空间, 只需要通过修改坐标变换矩阵对系统的广义 $\mathbf{k}, \mathbf{c}, \mathbf{m}$ 矩阵进行局部修改, 从而提高了计算效率. 另一方面, 超单元连接子结构的引入, 可将部件的结构阻尼和连接件的集中阻尼分开处理再耦合到整体系统中, 适用于橡胶支座、各种阻尼器这类集中阻尼装置的近似.

通过构建波尔矩阵的方式^[9]借助于直接刚度法的思想不难将此方法推广到多个子结构的情况.

3 应用实例

3.1 自动化码头低架桥结构简介

集装箱自动化码头港口前沿装卸机械与后方堆场之间的集装箱运输通常采用自动导航小车系统(AGV)或集装箱卡车, 但两者却存在同样的问题: 成本太高并且装卸效率低. 上海振华港机的自动化码头试验线(见图2)中创新地提出了在码头前沿与后方堆场之间构筑专用的低架桥, 通过在低架桥上高速运行的电动平板小车和起重小车来转送集装箱^[10].

低架桥桁架结构(见图3)主要由桁架梁、支柱和支柱连杆等构件组成. 其中, 支柱和桁架梁之间或直接刚性连接或采用铅芯橡胶支座间接连接.

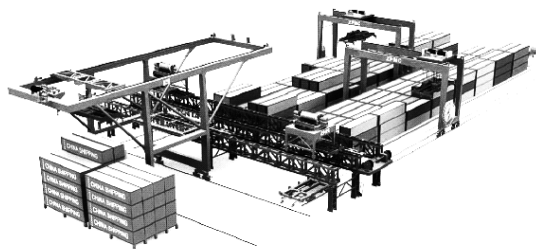


图2 自动化码头试验线仿真图

Fig.2 Simulation for automated container terminal experimentation

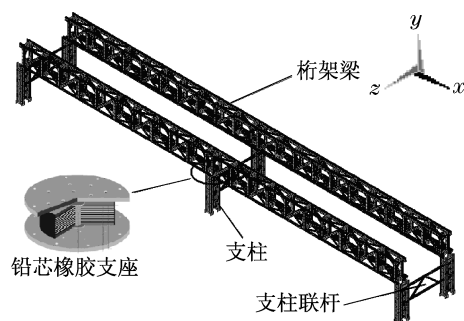


图3 低架桥结构示意图

Fig.3 Truss bridge structure

3.2 铅芯橡胶支座力学特性参数

铅芯橡胶支座是一种隔震耗能常用装置,具有构造简单、加工制造容易、安装方便等优点.由于复杂的非线性特性,目前分析和设计中主要采用等效线性化模型和双线性模型^[11].按等效线性化模型,列出三种铅芯橡胶支座的力学特性参数见表1.

表1 铅芯橡胶支座的力学特性参数

Tab.1 Characteristic parameters of lead rubber bearings(LRB)

型号	质量 m/kg	竖向刚度 $K_v/$ $(10^6\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	等效刚度 $k_B/$ $(10^3\text{kN}\cdot\text{m}^{-1})$	等效阻尼 $c_B/$ $(\text{kN}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$
GZY300	56	1.188	1.13	3.484
GZY400	126	1.850	1.69	6.713
GZY500	228	1.972	1.91	9.349

3.3 静力变换、动力变换固有频率结果对比

应用静力变换和变频动力变换超单元间接法,将铅芯橡胶支座视为连接器结构,桁架梁、支柱、支柱联杆作为自由界面子结构,子结构主模态取前30阶,对支柱与桁架梁间全部使用铅芯橡胶支座连接(简称全柔性连接)的低架桥的固有频率求解,并以有限元法解为精确解作误差分析,前20阶部分计算结果见表2(表中括号内数值为与有限元法解相比的误差,%).

表2 全柔性连接时低架桥固有频率结果对比

Tab.2 Natural frequency results comparison of truss bridge with girder and brace LRB linked Hz

阶数	GZY300			GZY400			GZY500		
	有限元解 f	静力变换 $f(e)$	动力变换 $f(e)$	有限元解 f	静力变换 $f(e)$	动力变换 $f(e)$	有限元解 f	静力变换 $f(e)$	动力变换 $f(e)$
1	1.119 7	1.121 3(0.14)	1.120 3(0.05)	1.297 3	1.302 4(0.39)	1.299 0(0.13)	1.349 7	1.359 6(0.73)	1.353 5(0.28)
5	1.616 4	1.622 2(0.36)	1.619 2(0.17)	1.854 8	1.873 8(1.02)	1.860 2(0.29)	1.920 1	1.948 0(1.45)	1.931 1(0.57)
10	4.393 3	4.443 8(1.15)	4.419 4(0.59)	4.739 1	4.834 8(2.02)	4.785 5(0.98)	4.837 2	4.960 5(2.55)	4.895 5(1.21)
15	6.906 9	7.017 3(1.59)	6.966 8(0.86)	7.033 9	7.192 7(2.26)	7.110 7(1.09)	7.040 7	7.252 4(3.01)	7.137 8(1.38)
20	10.261 0	10.445 0(1.79)	10.357 0(0.94)	10.269 0	10.516 0(2.41)	10.387 0(1.15)	10.204 0	10.539 0(3.43)	10.357 0(1.50)

由表2可知:(1)显然,随着铅芯橡胶支座型号的增大,竖向和水平向刚度增大,整体结构的固有频率也增大;(2)静力变换和动力变换超单元法均具有较高精度,与有限元法相比,固有频率的最大误差分别为3.43%和1.50%;(3)动力变换比静力变换精度高,但二者误差也较小.这主要是因为铅芯橡胶支座的阻尼相对整体结构而言很小,换算为整体结构阻尼比分别约为0.70%,1.15%和1.54%,橡胶支座的质量相对于整体结构的213 t更小,可知连接器结构对整体结构的固有特性的贡献率接近静态量.再者,动力变换由于涉及迭代计算,耗时比直接有限元法和静力变换明显增长.因此,当整体结构为弱阻尼系统时,可用静力变换超单元间接法代替动

力变换超单元间接法对结构固有频率进行求解.

3.4 不同支撑形式下的固有特性

为比较在支柱与桁架梁间全刚性连接、全柔性连接、两端橡胶支座中间刚性连接(简称端柔中刚连接)、中间橡胶支座两端刚性连接(简称中柔端刚连接)四种不同支撑形式下的低架桥固有特性,将选用型号GZY400铅芯橡胶支座的整体结构前20阶固有频率部分计算结果(静力变换法)列于表3.

观察表3发现如下规律:铅芯橡胶支座布置得越多,则低架桥的固有频率值越小.其中,全刚性连接的第五阶固有频率是全柔性连接的约2.6倍,使用铅芯橡胶支座对整体结构低频调频效果明显,同时也可改变结构振型顺序.

表3 不同支撑形式下高架桥固有频率结果对比

Tab.3 Natural frequency results comparison of truss bridge in different support conditions Hz

阶数	全刚性	全柔性	端柔中刚	中柔端刚
1	2.363 4	1.302 4	1.879 6	1.493 9
5	4.804 3	1.873 8	3.270 8	3.735 1
10	7.443 2	4.834 8	5.583 8	6.816 1
15	8.736 3	7.192 7	7.196 3	8.590 3
20	11.395 0	10.516 0	10.610 0	11.117 0

3.5 地震反应分析比较

沿图3中 z 向水平输入El Centro波(最大加速度0.34 g,持时54 s,每0.2 s一个数据点),在基本配置为Intel Pentium Dual CPU 1.60 GHz,1 GB内存的Dell PC机上,基于ANSYS10.0和Matlab6.5平台分别利用直接积分法(Newmark- β 法)、静力变换超单元间接法和动力变换超单元间接法求解所得GZY400全柔性连接时高架桥跨中任意一节点的 z 向位移响应 U_z 。时程曲线如图4所示。

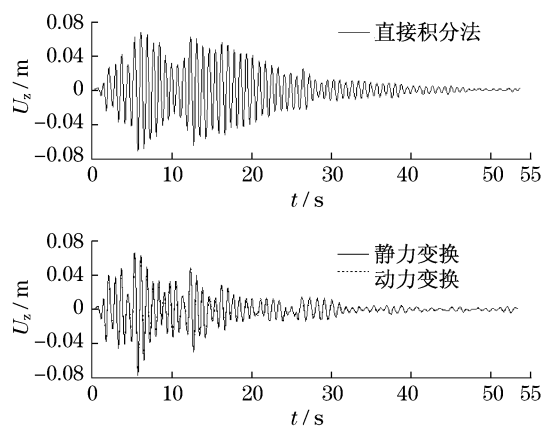


图4 不同求解方法下跨中某节点的位移响应时程曲线

Fig.4 Displacement response time history curves of a node in the middle of the span with different solution methods

由图4可见,超单元间接法的位移响应曲线在峰值和波形上均与直接积分法所得的结果较吻合,静力变换法和动力变换法的计算结果在波形上则基本一致;静力变换法和动力变换法响应结果的最大峰值分别为0.075 m和0.077 m,与直接积分法(0.072 m)相比,误差为4.2%和6.9%,说明超单元间接法在动力响应计算中亦具有较高精度.在计算时间上,直接积分法、静力变换法和动力变换法分别耗时5 h48 min,2 h5 min,7 h12 min,三种方法中静力变换法效率最高。

4 结束语

基于连接子结构可看成是一种将全部界面坐标作为主自由度的超单元这一实质,本文在对连接子结构静力变换和动力变换下推导了含超单元连接子结构的双协调(位移协调和力协调)自由界面模态综合法(简称超单元间接法).该法最后只在各个自由子结构的主模态坐标张成的近似空间下求解系统的动力分析问题,保留了自由界面法的可大大缩减系统自由度的优点;并且由于引入了超单元连接子结构,可将部件的结构阻尼和连接件的集中阻尼分开处理再耦合到整体系统中,对集中阻尼的近似处理更合理,适用于结构中含有非线性弹簧连接、橡胶支座减隔振装置、土壤等软弱层面等的动力分析问题。

将超单元间接法应用于含铅芯橡胶支座的自动化码头桁架桥的固有频率和地震反应计算,并分别与有限元法和直接积分法对比,得出以下结论:(1)超单元间接法(包括静力变换和动力变换法)在固有频率和动力响应计算中均具有较高精度,动力变换法精度稍高,但在计算效率上欠佳;静力变换法在动力响应计算上比直接积分法效率高;(2)铅芯橡胶支座对桁架桥整体结构的固有频率影响明显;改变橡胶支座的型号(即刚度、质量、阻尼)、配置形式(即数量)均能有效调节桁架桥的固有频率,而质量、阻尼的调频效果不如刚度和配置形式。

参考文献:

- [1] 郑兆昌.复杂结构振动研究的模态综合技术[J].振动与冲击,1982(1):28.
ZHENG Zhaochang. The study on vibration of complex structure systems by component mode synthesis techniques[J]. Journal of Vibration and Shock, 1982(1):28.
- [2] 郑兆昌.非线性系统动力分析的模态综合技术[J].应用数学与力学,1983,4(4):563.
ZHENG Zhaochang. Dynamic analysis of nonlinear systems by modal synthesis techniques [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1983,4(4):563.
- [3] 张洪田,王传涛,张志华.具有弹性耦合结构振动系统的自由界面模态综合法[J].工程力学,1990,7(3):93.
ZHANG Hongtian, WANG Chuanfu, ZHANG Zhihua. Free-interface mode synthesis method for vibration system of contains stiffness coupling component [J]. Engineering Mechanics, 1990,7(3):93.
- [4] 张洪田,张志华,王芝秋,等.自由界面模态综合技术中的连接子结构[J].振动与冲击,1994,13(1):55.

(下转第1233页)