

混凝土单轴受压本构关系的概率密度描述

曾莎洁, 李 杰

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 利用混凝土材料的细观随机损伤物理模型获取混凝土应力—应变关系的概率密度描述. 以细观物理模型为基础, 利用 K-L(Karhunen-Loeve)正交分解和密度演化方法得到了单轴受力状态任意应变处应力的概率密度函数估计. 将数值计算结果与试验结果进行概率密度层次的对比. 研究证实: 可以采用这一方法描述混凝土受力本构关系的概率密度演化过程.

关键词: 混凝土; 随机损伤演化; K-L(Karhunen-Loeve)分解; 密度演化方法

中图分类号: TU 528.01

文献标识码: A

Analysis on Constitutive Law of Plain Concrete Subjected to Uniaxial Compressive Stress Based on Generalized Probability Density Evolution Method

ZENG Shajie, LI Jie

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Efforts are made to grasp the probability information of the stress strain relationship. Firstly, a class of mesoscopic damage mechanics models of concrete is listed to understand the mesoscopic damage evolution characteristics of concrete material. Then the Karhunen-Loeve orthogonal decomposition is adopted to simulate the stochastic field mentioned in the former model. Based on the generalized probability density evolution method (PDEM), probability density function (PDF) of stress strain relationship in uniaxial loading condition and its evolution are provided. In the end, the comparison between the theoretical and experimental results verifies that the probability density evolution process of constitutive relationship for concrete material can be obtained from this method.

Key words: concrete; stochastic damage evolution; K-L

orthogonal decomposition; probability density evolution method

众所周知,混凝土是由水泥、粗骨料、细骨料、各种掺和料组成的多相复合材料. 在其形成之初,混凝土内部就具有微孔洞、微裂缝等初始缺陷. 在外部作用下,这些初始损伤因应力集中而进一步发展,导致材料的应力—应变关系逐渐偏离线性,呈现出非线性的基本特性. 同时,混凝土材料的各组分又具有随机分布的特征,这必然导致初始的损伤分布与后续的损伤演化都具有随机性的特征. 非线性与随机性是混凝土本构关系的 2 个基本特征^[1].

直至 20 世纪 90 年代初,混凝土力学特性的随机性才开始得到了一些学者的注意和认真的研究^[2-5]. 1990 年,在 Krajinovic 模型^[6]的基础上, Breyse 结合连续介质损伤力学,导出了一类损伤力学本构模型^[3]. 由于采用了细观单元断裂概率定义损伤变量, Breyse 模型与 Krajinovic 模型一样,在本质上属于确定性本构关系模型. 1994 年, Carmeliet 和 Hens 采用 2 维 Nataf 随机场表示材料参数,首次引入了真正意义上的随机损伤本构关系. 1996 年, Kandarpa 等对 Krajinovic 模型作出进一步扩展,将弹簧的破坏强度用连续随机变量表示,并且通过随机场的相关结构考虑相邻缺陷之间的相互影响,建立了基于弹簧模型的混凝土单轴受压随机损伤本构模型. 1998 年, Frantziskonis 对非均质材料随机模型进行了研究,其研究思路与 Carmeliet 和 Hens 的思路相类似^[7]. 1999 年, Augusti 等研究了连续体内微裂缝的随机演化问题,将微裂缝的密度变化视为随机过程,通过损伤熵流动的引入和位形熵的定义,将损伤准则引入到不等式中,描述了能量的

收稿日期: 2009-03-26

基金项目: 国家自然科学基金创新研究群体基金资助项目(50321803, 50621062); 国家自然科学基金重点资助项目(90715033)

作者简介: 曾莎洁(1983—),女,博士生,主要研究方向为现代混凝土结构. E-mail: zsjfly@126.com

李 杰(1957—),男,教授,博士生导师,工学博士,主要研究方向为现代混凝土结构及生命线工程. E-mail: lijie@tongji.edu.cn

耗散过程^[8]. 1999年以来,李杰等对经典弹簧模型作出实质性改进,明确引入细观断裂应变作为基本的随机变量,提出了细观随机断裂模型,分别建立了混凝土单轴受拉和单轴受压随机损伤本构关系^[9-11],科学解释了细观损伤随机性导致损伤过程非线性的本质原因^[12].与此同时,李杰等将双标量弹塑性损伤模型与单轴受力随机损伤本构模型相结合,通过引入等效能量应变的概念,在细观随机断裂模型的基础上建立了混凝土多轴随机损伤本构模型^[1,11,13],并进行了系列的试验研究以对理论模型加以验证^[14].

在这一背景下,本文试图利用概率密度演化方法,对混凝土随机损伤本构关系作出概率密度演化的描述,进行这一工作的目的意在说明随机损伤本构关系具有物理实证性.

1 随机损伤模型

经过近10年的探索,本研究梯队对李杰等提出的随机损伤本构模型进行了不断的改进,发展了一类用于描述混凝土材料单轴受力条件下的细观随机损伤模型.这里,以单轴受压模型(图1,图中 σ 为应力, ϵ 为应变, Δ_i 为断裂应变.)为例展开研究.在以压应力为主的受剪破坏机制中,小柱体破坏起源于骨料和水泥砂浆之间界面或初始微缺陷因剪应力作用导致的界面拉开,在模型中表现为受剪弹簧的随机断裂^[12].

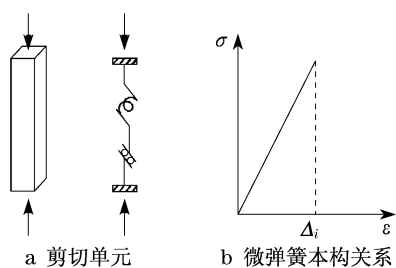


图1 细观物理模型

Fig.1 Meso-physical model

根据 Robotnov 的损伤定义^[15],混凝土材料的损伤描述可以采用如下公式:

$$D = \frac{A_d}{A} \quad (1)$$

式中: A_d 表示因细观剪切单元破坏而导致材料退出工作的面积; A 为受压试件的横截面积.

假定材料离散后模型中的细观单元截面积均相

等,受剪损伤变量则可以定义为

$$D_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N H(\epsilon - \Delta_i) A_i \quad (2)$$

式中: A_i 为第 i 个细观单元截面积; N 为细观单元的总数量; Δ_i 为第 i 个细观单元发生剪切破坏时的断裂应变,是服从一定概率分布的随机变量; $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数,即

$$H(\epsilon - \Delta_i) = \begin{cases} 0, & \epsilon - \Delta_i \leq 0 \\ 1, & \epsilon - \Delta_i > 0 \end{cases} \quad (3)$$

当模型中细观单元总数 N 趋于无穷大时,上述细观模型可以看作是1维连续体,则受剪损伤变量可以改写为

$$D_s(\epsilon) = \int_0^1 H[\epsilon - \Delta(x)] dx \quad (4)$$

其中,1维随机场 $\Delta(x)$ 反映了细观单元的断裂应变沿 x 方向的随机分布性质.

同时,定义随机场的1维、2维分布函数分别为 $F(\epsilon)$ 和 $F(\epsilon, \epsilon; \eta)$,其中 $\eta = |x_1 - x_2|$.利用期望算子与积分算子的可交换性,可得损伤变量 D 的均值函数和方差函数分别为

$$\begin{aligned} \mu_{D_s}(\epsilon) &= E\left[\int_0^1 H[\epsilon - \Delta(x)] dx\right] = \\ &= \int_0^1 E[H[\epsilon - \Delta(x)]] dx = \\ &= \int_0^1 F(\epsilon) dx = F(\epsilon) \end{aligned} \quad (5)$$

$$V_{D_s}^2 = 2 \int_0^1 (1 - \eta) F(\epsilon, \epsilon; \eta) d\eta - [\mu_{D_s}(\epsilon)]^2 \quad (6)$$

根据受力平衡原理,得到混凝土在单轴受力情况下的随机损伤本构关系为

$$\sigma = (1 - D_s) E(\epsilon - \epsilon_p) \quad (7)$$

式中:塑性应变 ϵ_p 采用表达式 $\delta / (1 - D_s + \delta)$ 计算,用 δ 反映微裂缝面张开或滑移变形的程度^[11].

假定随机场 $\Delta(x)$ 是满足对数正态分布的1维随机场,具有2阶平稳性,且其数学期望和标准差分别为 μ_Δ 和 σ_Δ ,则 $Z(x) = \ln \Delta(x)$ 服从正态分布.假定 $Z(x)$ 的数学期望和标准差分别为 λ 和 ζ ,可得

$$\lambda = E[\ln \Delta(x)] = \ln\left(\frac{\mu_\Delta}{\sqrt{1 + \sigma_\Delta^2 / \mu_\Delta^2}}\right) \quad (8)$$

$$\zeta^2 = \text{Var}[\ln \Delta(x)] = \ln(1 + \sigma_\Delta^2 / \mu_\Delta^2) \quad (9)$$

显然,随机场 $\Delta(x)$ 的1维、2维分布函数可以表示为

$$F_{\Delta}(\varepsilon) = \Phi\left[\frac{\ln \varepsilon - \lambda}{\zeta}\right] = \Phi(\alpha) \quad (10)$$

$$F(\varepsilon, \varepsilon; \eta) = \Phi\left(\frac{\ln \varepsilon - \lambda}{\zeta}, \frac{\ln \varepsilon - \lambda}{\zeta} \middle| \rho_z\right) = \Phi(\alpha, \alpha | \rho_z) \quad (11)$$

式中: $\Phi(\alpha)$ 为 1 维标准正态分布函数; $\Phi(\alpha, \alpha | \rho_z)$ 为 2 维标准正态分布函数.

设 $Z(x)$ 的自相关系数为

$$\rho_z(\eta) = \exp(-c\eta) \quad (12)$$

则其自相关函数和自协方差函数分别为

$$R_Z = \zeta^2 \exp(-c\eta) + \lambda^2 \quad (13)$$

$$\Gamma_Z(\eta) = \zeta^2 \exp(-c\eta) \quad (14)$$

综上所述, 利用上述细观模型, 只需引入 λ, ζ, c 参数, 即可完整描述损伤变量的分布特性. 在这一模型中, 定义了单轴损伤演化方式, 实现了损伤演化规律的细观物理解释.

2 细观断裂应变随机场的 K-L 正交分解

Karhunen-Loeve 分解可以将随机场描述为由互不相关的随机系数所调制的确定性函数的线性组合, 从而提供了从随机变量集合的角度研究随机场主要概率特征的可能性^[16].

引入 K-L 分解, 随机场 $\Delta(x, \theta)$ 可以展开为^[17]

$$\Delta(x, \theta) = \Delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(x) \quad (15)$$

式中: $\Delta(x)$ 为随机场 $\Delta(x, \theta)$ 的均值函数, 不失一般性, 可假定其值为 0; ξ_n 是一组互不相关的标准随机变量, 且满足

$$E[\xi_n(\theta)] = 0 \quad (16)$$

$$E[\xi_m(\theta) \xi_n(\theta)] = \delta_{mn} \quad (17)$$

λ_n 和 $f_n(x)$ 分别是自相关函数的特征值和特征函数, 一般可以通过求解下述 Fredholm 积分方程获得, 即

$$\int_D \rho(x_1, x_2) f_n(x_1) dx_1 = \lambda_n f_n(x_2) \quad (18)$$

式中, $\rho(x_1, x_2)$ 即为随机场的自相关函数, 本文中采用式(12).

对于 1 维随机场, 若其定义域为 $[-a, a]$, 则 Fredholm 积分方程可以写为

$$\int_{-a}^a \exp(-c|x_1 - x_2|) f_n(x_2) dx_2 = \lambda_n f_n(x_1) \quad (19)$$

通过求解上述方程, 可得特征值和特征函数的解分别为

$$\begin{cases} \lambda_n = 2c/(c^2 + b_n^2) \\ \lambda_n^* = 2c/(c^2 + b_n^{2*}) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\cos(b_n x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2ab_n)}{2b_n}}} \\ f_n^*(x) = \frac{\sin(b_n^* x)}{\sqrt{a + \frac{\sin(2ab_n^*)}{2b_n^*}}} \end{cases} \quad (21)$$

其中, b_n 和 b_n^* 是通过求解下面的方程获得的:

$$\begin{cases} b - c \tan(ab) = 0 \\ c + b^* \tan(ab^*) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

因此, 针对前述随机损伤模型, 其细观断裂应变随机场可以分解为

$$\Delta(x, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) f_i(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j^*} \xi_j^*(\theta) f_j^*(x) \quad (23)$$

以单轴受压为例, 取式(12)中的相关参数 $c = 1/80$, 随机场的定义域为 $[-0.5, 0.5]$, 可给出细观断裂应变随机场的 K-L 分解数值结果如图 2—4 所示.

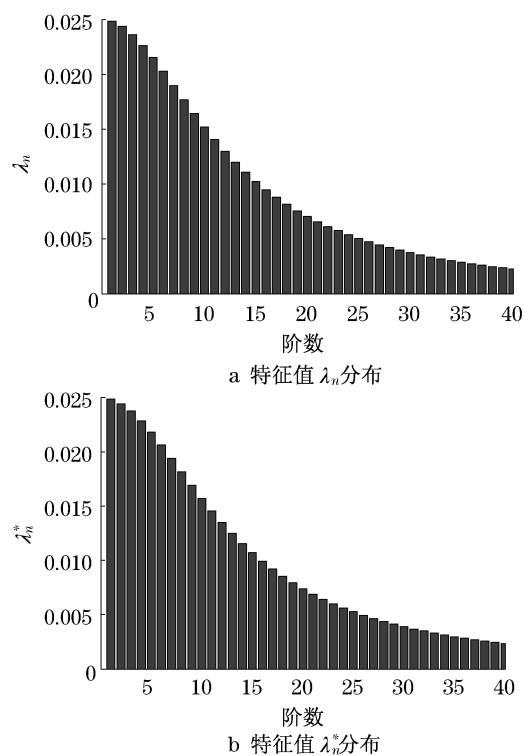


图 2 特征值分布图

Fig. 2 Distribution of eigenvalue

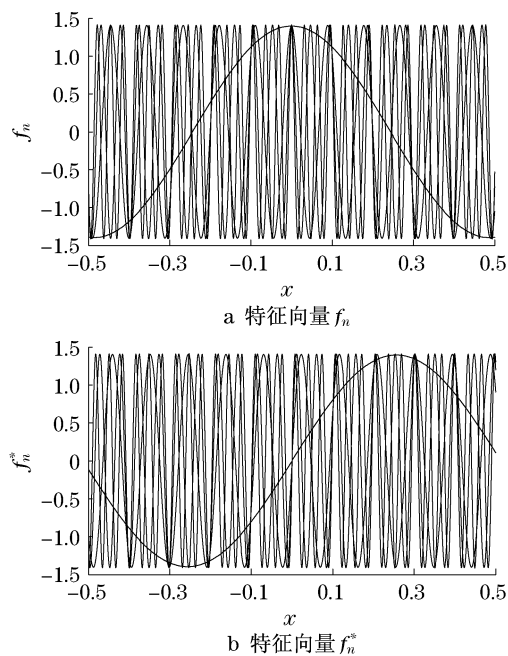


图3 特征向量曲线

Fig.3 Curve of eigenvector

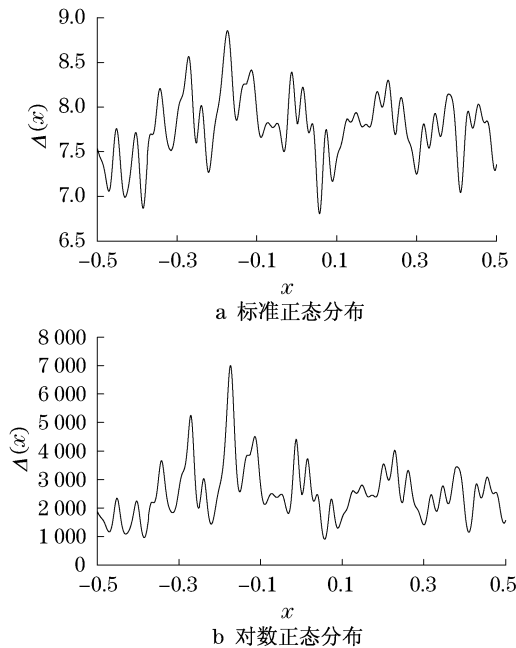


图4 随机场 K-L 正交分解样本

Fig.4 Decomposition curve of the random field

3 混凝土单轴应力—应变关系的概率密度演化

3.1 广义密度演化方程

不失一般性,取应变 ϵ 为广义时间参数,设随机系

统为

$$\sigma = f(\Theta, \epsilon), \sigma(\epsilon_0) = \sigma_0 \quad (24)$$

式中:应力 σ 为状态变量; Θ 为随机参数,其概率密度函数为 $p_\Theta(\theta)$; ϵ 为广义时间参数.

则 σ 关于 ϵ 的导数记为

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial f(\Theta, \epsilon)}{\partial \epsilon} = h(\Theta, \epsilon) \quad (25)$$

记 $\{\Theta = \theta\}$ 的条件下, $\sigma(\epsilon)$ 的条件概率密度函数为 $p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta)$, 根据概率相容原理,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta) d\sigma = 1 \quad (26)$$

同时, $\{\Theta = \theta\}$ 条件下必有 $\sigma(\epsilon) = f(\theta, \epsilon)$, 则有

$$p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta) = 0, \sigma \neq f(\theta, \epsilon) \quad (27)$$

$$p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta) \rightarrow \infty, \sigma = f(\theta, \epsilon) \quad (28)$$

综合式(25)—(28), 可得该条件概率密度函数为

$$p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta) = \delta(\sigma - f(\theta, \epsilon)) \quad (29)$$

其中, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数.

对式(29)两边求导, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta)}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial \delta(\sigma - f(\theta, \epsilon))}{\partial \epsilon} = \\ & \left[\frac{\partial \delta(y)}{\partial y} \right]_{y=\sigma-f(\theta, \epsilon)} \cdot \frac{\partial(\sigma - f(\theta, \epsilon))}{\partial \epsilon} = \\ & - \frac{\partial f(\theta, \epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{\partial \delta(\sigma - f(\theta, \epsilon))}{\partial \sigma} = \\ & - h(\theta, \epsilon) \frac{\partial p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta)}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (30)$$

式中, $h(\theta, \epsilon) = \frac{\partial f(\theta, \epsilon)}{\partial \epsilon}$.

根据条件概率公式, (σ, θ) 的联合概率密度函数 $p_{\sigma\theta}(\sigma, \theta, \epsilon)$ 为

$$p_{\sigma\theta}(\sigma, \theta, \epsilon) = p_{\sigma|\theta}(\sigma, \epsilon | \theta) p_\Theta(\theta) \quad (31)$$

将式(30)两边同时乘以 $p_\Theta(\theta)$, 并结合式(25), 可得

$$\frac{\partial p_{\sigma\theta}(\sigma, \theta, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \dot{\sigma}(\theta, \epsilon) \frac{\partial p_{\sigma\theta}(\sigma, \theta, \epsilon)}{\partial \sigma} = 0 \quad (32)$$

称式(32)为广义概率密度演化方程^[18-19].

3.2 混凝土应力—应变概率密度演化过程的计算

从上述推导过程可以看出, 状态方程和概率密度演化方程构成了概率密度演化分析理论的基本框架. 分析过程的核心则是解答概率密度演化方程式(32). 根据密度演化分析各控制方程中信息传递的顺序, 可给出概率密度演化方程的数值求解的基本步骤:

(1) 离散选点. 利用 K-L 分解将随机场 $\Delta(x,$

θ 在其分布区域 Ω_{θ} 离散为一系列的独立随机变量,即方程(15),再利用均匀选点策略选出代表点 $\theta_q (q=1,2,\dots,N_{sel})$. 其中 N_{sel} 为选点总数.

(2) 计算目标量. 对于每一组代表点 θ_q , 利用物理方程计算其相应的目标物理量. 在本文中, 目标量分别为损伤量 D_s 和应力 σ , 它们是通过随机损伤模型的物理方程(4)和(7)确定的.

(3) 求解概率密度. 根据概率密度演化方程(32)的数值解法, 计算出相应的概率密度数值解. 本文中, 需要计算的是混凝土应力—应变关系中给定应变处所对应应力的概率密度演化和损伤的概率密度演化.

4 实例分析

采用本研究小组对混凝土本构关系的系统试验研究结果进行实例分析. 为简单计, 本文仅采用单轴受压条件下的试验结果进行对比. 典型试验情况和相关曲线见图5和图6(图6中2AC-2至2AC-12均为板式试件编号).

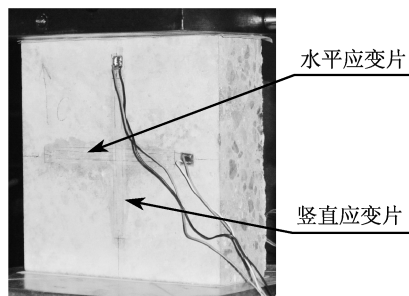


图5 板式试件
Fig.5 Plate specimen

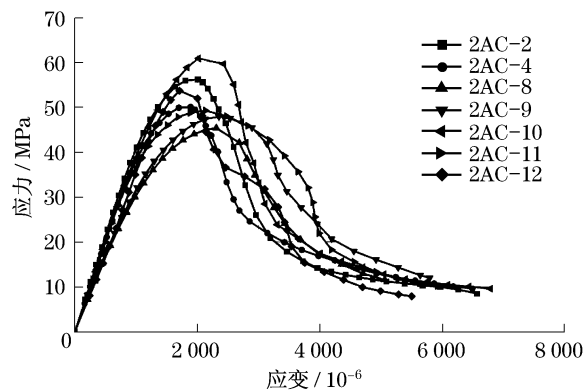
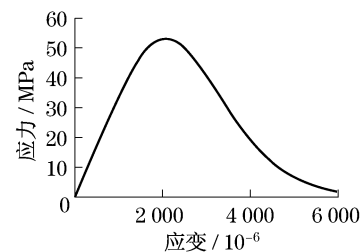


图6 单轴受压试验曲线

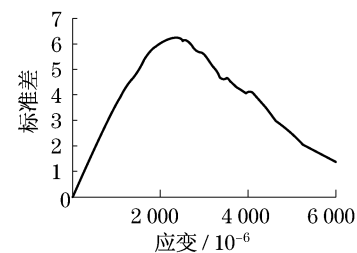
Fig.6 Experimental curves under uniaxial compression loading

依据上述方法对单轴受压条件下的混凝土随机损伤本构模型进行数值计算, 其中参数的选择如下: 分布参数 $\lambda = 7.95$, $\zeta = 0.47$; 相关参数 $c = 1/80$; 弹性模量 E 服从正态分布, 其均值和标准差分别为 37 101 MPa, 4 181 MPa. 基于上述参数的计算结果如图7和图8所示.

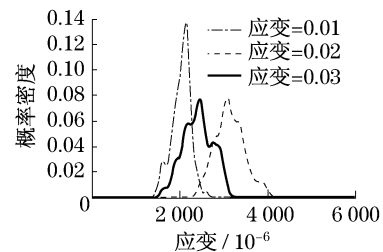
为了印证试验结果与数值计算结果之间的一致性, 本文对图6所示试验数据进行进一步统计分析, 给出了典型应变时的统计直方图分布, 见图9. 图中, 曲线表示基于随机损伤模型和密度演化算法计算得到的给定应变处应力的概率密度曲线. 可以清晰地看到: 理论结果与试验结果吻合良好, 充分体现了随机损伤本构模型的物理实证性.



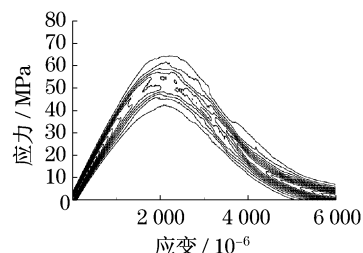
a 应力均值



b 应力标准差



c 应力概率密度演化



d 应力概率密度演化等值线

图7 应力—应变关系

Fig.7 Stochastic fluctuation of stress-strain curve

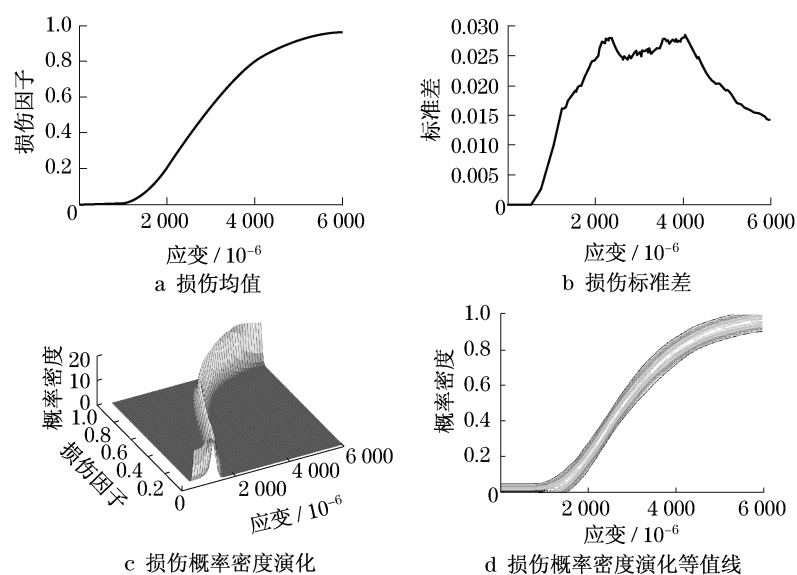


图8 损伤演化过程

Fig.8 Stochastic fluctuation of damage evolution

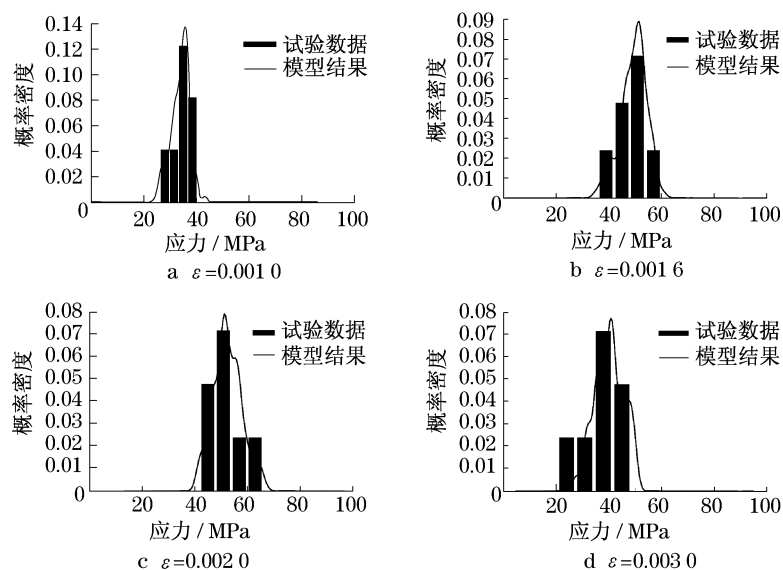


图9 试验与理论对比

Fig.9 Comparison between experimental and theoretical results

5 结论

在混凝土本构关系的研究中,非线性、随机性及其耦合作用一直都是一个较难解决的问题.随机损伤本构模型从细观破坏机制入手,可以实现对混凝土材料随机损伤及其演化规律的物理解释.本文借助K-L分解,将细观断裂应变随机场分解为由互不相关的随机系数所调制的确定性函数的线性组合,利用概率密度演化方法,得到了单轴受力状态任意应变处应力的概率密度函数估计.将数值计算结果与试验结果进行了统计层次的对比,证实了随机损

伤本构模型的物理实证性.同时,这一研究进展表明:可以采用概率密度演化方法描述混凝土受力本构行为的概率密度演化过程,从而为在结构层次上进行精细的结构非线性随机反应分析提供了基础.

参考文献:

- [1] 李杰.混凝土随机损伤力学的初步研究[J].同济大学学报:自然科学版,2004,32(10):1270.
LI Jie. Research on the stochastic damage mechanics for concrete materials and structures [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(10): 1270.
- [2] Krajcinovic D, Stojimirovic A. Deformation processes in semi-

- brittle polycrystalline ceramics [J]. International Journal of Fracture, 1990, 42: 73.
- [3] Breyssse D. Probabilistic formulation of damage-evolution law of cementers composites [J]. Journal of Engineering Mechanics: ASCE, 1990, 116(7): 1489.
- [4] Carmeliet J, Hens H. Probable nonlocal damage model for continue with random field properties [J]. Journal of Engineering Mechanics: ASCE, 1994, 120(10): 2013.
- [5] Kandarpa S, Kirkner D J, Spencer B F. Stochastic damage model for brittle materiel subjected to monotonic loading [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 126(8): 788.
- [6] Krajcinovic D, Silva M A G. Statistical aspects of the continuous damage theory [J]. International Journal of Solids and Structures, 1982, 7(18): 551.
- [7] Frantziskonis G N. Stochastic modeling of heterogeneous materials—a process for the analysis and evaluation of alternative formulations [J]. Mechanics of Materials, 1998, 27: 165.
- [8] Augusti G, Mariano P M. Stochastic evolution of microcracks in continua [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 168: 155.
- [9] 李杰, 张其云. 混凝土随机损伤本构关系 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2001, 29(10): 1135.
LI Jie, ZHANG Qiyun. Stochastic damage constitutive law for concrete [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2001, 29(10): 1135.
- [10] 李杰, 卢朝辉, 张其云. 混凝土随机损伤本构关系——单轴受压分析 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2003, 31(6): 505.
LI Jie, LU Zhaohui, ZHANG Qiyun. Study on stochastic damage constitutive law for concrete material subjected to uniaxial compressive stress [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2003, 31(6): 505.
- [11] 李杰, 杨卫忠. 混凝土弹塑性随机损伤本构关系研究 [J]. 土木工程学报, 2009, 42(2): 31.
LI Jie, YANG Weizhong. Elastoplastic stochastic damage constitutive law for concrete [J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(2): 31.
- [12] 李杰. 混凝土随机损伤力学——背景、意义与研究进展 [M] // 李宏男, 伊廷华. 结构防灾、监测与控制. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008: 70–86.
LI Jie. Stochastic damage mechanics of concrete structures [M] // LI Hongnan, YI Tinghua. Structural disaster prevention, monitoring and control. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008: 70–86.
- [13] LI Jie, REN Xiaodan. Stochastic damage model for concrete based on energy equivalent strain [J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46: 2407.
- [14] 李杰, 任晓丹, 杨卫忠. 混凝土二维本构关系试验研究 [J]. 土木工程学报, 2007, 40(4): 6.
LI Jie, REN Xiaodan, YANG Weizhong. Experimental study on 2-D constitutive relationship for concrete [J]. China Civil Engineering Journal, 2007, 40(4): 6.
- [15] Knajcinovic D. Damage mechanics [M]. Amsterdam: Elsevier B V, 1996.
- [16] 李杰. 随机结构系统——分析与建模 [M]. 北京: 科学出版社, 1996.
LI Jie. Stochastic structural systems: analysis and modeling [M]. Beijing: Science Press, 1996.
- [17] 刘章军. 工程随机动力作用的正交展开理论及其应用研究 [D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2007.
LIU Zhangjun. Orthogonal expansion method of engineering stochastic dynamic loads and its application [D]. Shanghai: Tongji University. College of Civil Engineering, 2007.
- [18] LI Jie, CHEN Jianbing. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation [J]. Structural Safety, 2008, 30: 65.
- [19] 李杰, 陈建兵. 概率密度演化方程——历史、进展与应用 [M] // 李杰, 陈建兵. 随机振动理论与应用新进展. 上海: 同济大学出版社, 2009: 60–103.
LI Jie, CHEN Jianbing. Probability density evolution equations: history, development and applications [M] // LI Jie, CHEN Jianbing. Advances in theory and applications of random vibration. Shanghai: Tongji University Press, 2009: 60–103.

(上接第 786 页)

参考文献:

- [1] EERI. Northridge earthquake of January 17. 1994 reconnaissance report [J]. Earthquake Spectra, 1995(11): 1.
- [2] 日本阪神大地震考察组. 日本阪神大地震考察报告 [M]. 北京: 地震出版社, 1997.
Technical Studying Group of Osaka-Kobe Earthquake. Survey report of Osaka-Kobe earthquake [M]. Beijing: Earthquake Press, 1997.
- [3] 台湾地区建筑师协会. 集集大地震考察报告 [R]. 台北: 台湾地区建筑师协会, 1999.
Architects Association of Taiwan District. Survey report of Jiji earthquake [R]. Taipei: Architects Association of Taiwan District, 1999.
- [4] 李杰. 生命线工程抗震——基础理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
LI Jie. Earthquake resistance of lifeline engineering——basic theory and application [M]. Beijing: Science Press, 2005.
- [5] Hwang Howard H M, Lin Huijie, Shinozuka Masanobu. Seismic performance assessment of water delivery systems [J]. Journal of Infrastructure Systems: ASCE, 1998, 4(3): 118.
- [6] Indrani G, Gupta A, Khanna P. Genetic algorithm for optimization of water distribution systems [J]. Environmental Modelling and Software, 1999, 4(5): 437.
- [7] American Lifeline Alliance. Seismic fragility formulations for water system [R]. ASCE: American Lifeline Alliance, 2001.
- [8] 包元峰. 生命线工程网络系统抗震可靠性分析与优化 [D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2004.
BAO Yuanfeng. Aseismatic reliability analysis and optimization of lifeline network [D]. Shanghai: Tongji University. College of Civil Engineering, 2004.
- [9] 陈伶俐. 城市供水管网系统抗震可靠性分析与优化 [D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2002.
CHEN Lingli. Aseismatic reliability analysis and optimization of water supply network [D]. Shanghai: Tongji University. College of Civil Engineering, 2002.