

# 稀疏性正则化的图像泊松恢复模型及分裂 Bregman 迭代算法

孙玉宝<sup>1</sup> 费选<sup>1</sup> 韦志辉<sup>1,2</sup> 肖亮<sup>1</sup>

**摘要** 生物医学、天文等成像系统通常会受到泊松噪声的干扰,基于图像在过完备字典下的稀疏表示,在 Bayesian-MAP 框架下,建立了针对泊松噪声的稀疏性正则化图像恢复凸变分模型,采用负 log 的泊松似然函数作为数据保真项,模型中非光滑的正则项约束图像表示系数的稀疏性,并附加非负性约束.进一步,基于分裂 Bregman 方法,提出了求解该模型的多步迭代快速算法,通过引入辅助变量与 Bregman 距离可将原问题转化为两个简单子问题的迭代求解,大幅度降低了计算复杂性.实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性.

**关键词** 图像恢复,稀疏表示,泊松噪声,分裂 Bregman 算法,邻近算子

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2008.xxxxx

## Image Restoration Model under Poisson Noise using Sparse Representations and Split Bregman Iteration Algorithm

SUN Yu-Bao<sup>1</sup> FEI Xuan<sup>1</sup> WEI Zhi-Hui<sup>1,2</sup> XIAO Liang<sup>1</sup>

**Abstract** Astronomical and biomedical imaging instruments are often corrupted by Poisson noise. Using the sparse representation of the underlying image in an over-complete dictionary, a sparsity regularized convex functional model is proposed to deconvolve Poisson noisy image in the Bayesian-MAP estimate framework. The negative-log Poisson likelihood functional is used as data fidelity term and non-smooth regularization term used for constraining the sparse image representation over the dictionary. An additional term is also added to ensure the positivity of the restored image. Inspired from the Split Bergman iteration method, a multi-step fast iterative algorithm is proposed to solve the above model numerically. By introducing an intermediate variable and Bergman distance, the original problem is transformed into solving two simple sub-problems iteratively, thus computational complexity is decreased rapidly. Experimental results demonstrate the effectiveness of our recovery model and numerical algorithm.

**Key words** image restoration, sparse representation, Poisson noise, split Bergman method, proximal operator

图像恢复是生物医学成像、天文、遥感等等诸多领域中的基本问题,然而当前的恢复模型与算法主要针对的是加性高斯噪声.在光量子计数成像系统中,如 CCD 固态光电检测器阵列、计算机断层扫描(CT)、天文成像、计算 X 射线成像(CR)、共焦显微成像等等,最终获取的图像往往受到量子噪声的污染,量子噪声服从泊松分布的统计法则,并非加性噪声,且噪声强度与方差是信号依赖的,统计上,亮度大的像素受到更多的干扰,因此去除泊松噪声是一个

困难的任务.

针对泊松噪声情形的反卷积问题,当前学者们提出了一些模型与算法,例如 Tikhonov-Miller 反滤波、Richardson-Lucy(RL)<sup>[1]</sup> 算法等等.基于极大似然(ML)估计的 RL 算法能够自适应于泊松噪声的统计特征,得到了广泛的应用,但多次迭代后该算法会放大噪声,在低信噪比情形下更为严重,可通过引入正则项来解决此问题,基于此文献<sup>[2]</sup> 提出了全变差(TV)正则化的 RL 算法.在天文图像反卷积应用中,多位作者采用小波正则化的 RL 算法.在生物医学图像中,小波变换也被广泛地应用于正则项的设计.基于贝叶斯与多尺度分析框架,文献<sup>[3]</sup> 给出了另外一种方法,它对泊松似然函数进行多尺度分解,同时通过先验概率分布来约束解的正则性,进一步应用 EM 算法求解最大化的后验概率,然而该算法只适用于 Haar 小波下的多尺度分析.

稀疏表示理论研究表明自然图像在合适的字典下总存在稀疏的表示,即大部分系数为零,只有很少的大系数,非零的大系数揭示了信号的内在结构与本质特征,从而为进一步的图像检测与识别奠定了良好

收稿日期 2009-09-02 录用日期 2010-01-13

Manuscript received September 2, 2009; accepted January 13, 2010

国家“863”高技术研究发展计划(2007AA12Z142),国家自然科学基金(60672074,60802039),江苏省研究生创新基金资助

Supported by National High Technology Research and Development Program of China 863(2007AA12Z142), National Natural Science Foundation of China (60672074,60802039), Graduate Innovation Foundation of Jiangsu Province

1. 南京理工大学计算机科学与技术学院模式识别与智能系统 南京 210094 2. 南京理工大学理学院应用数学系 南京 210094

1. Department of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. Department of Applied Mathematics, School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

的基础.因而基于图像的稀疏表示先验知识,稀疏性正则化为求解图像恢复问题提供了一个新思路,不过当前稀疏性正则化方法仍然主要集中于高斯噪声情形.文献<sup>[4]</sup>提出了一个反卷积算法能够处理泊松噪声下的图像去模糊问题,该算法利用VS (variance stabilization) 变换,将原先泊松噪声下退化模型转化为高斯噪声下的非线性退化模型,进而应用类似高斯噪声下的凸变分模型进行求解,模型的保真项具有Lipschitz连续的梯度,从而可采用前向后向的邻近算子分裂法进行求解.但VS变换只能保证变换后噪声为近似高斯分布,同时将会放大图像噪声方差,不利于图像恢复<sup>[5]</sup>.

本文提出了一种新的恢复模型,无需VS变换,能够直接处理泊松噪声.在Bayesian-MAP框架下,基于图像的稀疏表示先验知识,建立了泊松噪声下的图像恢复凸变分模型,模型中的保真项由给定理想图像时观测图像的似然概率分布导出,具体形式同数据退化模型和观测噪声相关,针对泊松噪声采用负log的泊松似然函数作为数据保真项,能够自适应于泊松噪声的统计特性.模型中非光滑的正则性约束图像在冗余字典下表示系数的稀疏性,字典应能够有效匹配图像中的局部几何结构,从而有利于恢复图像中的重要结构成份.综合考虑本文凸变分模型的特点,基于分裂Bregman迭代方法<sup>[6]</sup>,提出了求解该模型的多步迭代快速算法,通过引入中间变量与Bregman距离,将原问题转化为两个简单子问题的迭代求解,大幅度降低了计算复杂性.对一些仿真与实测图像进行了实验验证,并同上述多种方法进行了比较.实验结果表明:由于采用了自适应于泊松统计特性的保真项与匹配图像几何结构特征的稀疏性正则项,大大改善了图像恢复结果,验证本文模型与数值算法的有效性.

## 1 稀疏性正则化的泊松噪声图像恢复模型

### 1.1 稀疏表示图像模型

依据计算调和理论,图像 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ 可表示为一组原子 $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ 的线性组合,将原子作为列向量形成字典 $\Phi \in \mathbf{R}^{N \times I}$ ,从而图像 $\mathbf{u}$ 可表示为:

$$\mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{I} = \{1, \dots, I\}$  ( $I \in \mathbf{N}$ )为原子参数指标集(为有限集合).图像的稀疏表示理论认为在合适的字典 $\Phi$ 下图像 $\mathbf{u}$ 总存在稀疏的表示,即要求系数 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}}$ 中只有很少的为非零元素: $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \ll N$ .图像的过完备稀疏表示是一个新兴的图像模型,能够有效地刻画信号的内在结构与特征,在图像去噪、去模糊、修补等众多领域取得非常好的应用.

目前所涉及的图像稀疏表示字典主要有三类:正交系统,(紧)框架、过完备字典.传统地,通常采用傅立

叶变换、DCT变换以及小波变换等非冗余的字典(正交系统)对图像形成表示,现代计算调和与分析研究表明,适当冗余的(紧)框架系统有利于形成稀疏表示,如Curvelet Wave-Atom、Gabor、Contourlet等紧框架变换.稀疏表示理论表明进一步增加表示系统的冗余性,形成过完备字典可对图像形成更为稀疏的表示.通常情况下字典可通过组合现有的正交基或框架来构造,也可通过设计参数化的生成函数,变换其参数生成整个字典,如Gabor感知多成份字典<sup>[7]</sup>、AR-Gauss混合字典等等.针对具体的应用场合,还可通过学习或训练算法来获取字典.

### 1.2 稀疏性正则化的恢复模型

针对离散的数字图像,考虑如下的离散方程:

$$\mathbf{z} = \text{Poisson}(\mathbf{A}\mathbf{u}) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$ 为未知的理想图像,矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为线性算子的离散矩阵形式, $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^N$ 为理想图像 $\mathbf{u}$ 经模糊与泊松噪声污染后的退化图像,每一个像素 $z_j$ 为独立且均值为 $[\mathbf{A}\mathbf{u}]_j$ 的Poisson随机变量的实现.因此给定理想图像 $\mathbf{u}$ 时,观测图像 $\mathbf{z}_j$ 的似然概率分布为:

$$p_z(\mathbf{z}|\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^N \frac{[\mathbf{A}\mathbf{u}]_j^{z_j} \exp(-[\mathbf{A}\mathbf{u}]_j)}{z_j!} \quad (3)$$

依据泊松分布的定义,要求均值 $[\mathbf{A}\mathbf{u}]_{1 \leq j \leq N} > 0$ .借助于信号在冗余字典下的线性展开(1),似然概率分布可表示为:

$$p_z(\mathbf{z}|\mathbf{u} = \Phi \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{j=1}^N \frac{[\mathbf{A}\Phi \boldsymbol{\alpha}]_j^{z_j} \exp(-[\mathbf{A}\Phi \boldsymbol{\alpha}]_j)}{z_j!} \quad (4)$$

图像恢复的任务是从观测图像 $\mathbf{z}$ 恢复出理想图像 $\mathbf{u}$ ,由于用于问题求解的信息量不足,通常是一个不适定(ill-posed)的反问题.基于图像在冗余字典下的稀疏表示先验知识与(4)式的似然分布,由贝叶斯-最大后验概率(Bayesian-MAP)估计可建立关于稀疏表示系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 的图像恢复变分模型:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^* = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\alpha}} & \sum_{j=1}^N ([\mathbf{A}\Phi \boldsymbol{\alpha}]_j - z_j \ln[\mathbf{A}\Phi \boldsymbol{\alpha}]_j) \\ & + \iota_{\mathbf{C}} \circ \mathbf{A}\Phi \boldsymbol{\alpha} + \lambda \sum_{i=1}^I \Psi_i(\alpha_i) \end{aligned} \quad (5)$$

其中“ $\circ$ ”表示算子的复合操作, $\iota_{\mathbf{C}}$ 为凸集 $\mathbf{C}$ 示性函数定义为: $\iota_{\mathbf{C}} = \begin{cases} 0 & x \in \mathbf{C} \\ +\infty & x \notin \mathbf{C} \end{cases}$ ,为了符合泊松分布的特性,同时为了便于分析与计算,本文中取凸集 $\mathbf{C} = C_1 \times \dots \times C_I$ ,  $C_{1 \leq i \leq I} = \{x \in L^2(\mathbf{R}) | x \geq 0\}$ . $\Psi_i(\alpha_i)$ 为稀疏性惩罚函数.目标泛函中综合了原子系数的稀疏性约束与在数据退化模型下的保真信

息,  $\lambda \geq 0$  为正则化参数, 在正则项与保真项之间相互权衡, 最小化此能量目标泛函, 可恢复理想图像为

$$\mathbf{u}^* = \Phi \boldsymbol{\alpha}^* \quad (6)$$

为了重建模型的便于求解, 要求稀疏性惩罚函数  $\{\Psi_i(\alpha_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$  为下半连续凸函数. 对其并无光滑性要求, 从而可选择更为广泛的稀疏性惩罚函数. 其实, 当前广泛采用的稀疏性惩罚函数通常是非光滑的, 如  $l_1$  范数.

目标泛函 (5) 中每一项关于问题变量  $\boldsymbol{\alpha}$  均是凸的, 因而整个 (5) 式为凸变分模型, 同时也是强制的 (coercive), 因此变分问题 (5) 的解一定存在. 如果  $\Psi_{1 \leq i \leq I}$  为严格凸函数, 则目标泛函为严格凸的, 从而变分问题 (5) 存在唯一解.

## 2 分裂 Bregman 迭代快速算法

文献[6]最先提出分裂Bregman方法, 该方法能够快速求解全变差正则化的PDE图像恢复问题, 如图像去噪、恢复、MRI重建等等, 成功解决了一直困扰TV模型的计算复杂高问题, 进一步, 在基于框架的图像恢复问题中也得到了很好的应用. 分裂Bregman方法的目标是扩展Bregman迭代<sup>[8]</sup>与线性化Bregman迭代<sup>[9]</sup>的效用范围, 从而能够有效求解更为广泛的问题. 其基本思想是引入一个辅助变量, 替换原目标泛函中较难处理部分, 如不可分离项、非光滑项、非线性项等等, 从而简化问题的求解, 并添加辅助变量与替换部分之间的等式约束, 保证新问题与原问题等同, 继而应用Bregman迭代对新问题进行求解. 本文将采用分裂Bregman算法数值求解上一节建立的凸变分模型 (5). 由于目标泛函 (5) 中前两项关于问题变量是不可微且不可分离的, 同时泊松似然函数为非二次函数, 是模型中较难处理的部分. 令  $A\Phi\boldsymbol{\alpha}$ , 并添加等式约束, 记  $\Psi$  为函数  $\boldsymbol{\alpha} \mapsto \sum_i \Psi(\alpha_i)$ , 从而原问题等同于下面的新变分问题:

$$\begin{aligned} \min \sum_i (b_i - z_i \ln b_i) + \iota_{\mathbf{C}}(\mathbf{b}) + \lambda \Psi(\boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s.t. } \mathbf{b} = A\Phi\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

将  $A\Phi\boldsymbol{\alpha}$  从较难处理的非二次泊松似然函数中分离出来, 使其关于  $\mathbf{b}$  是可分离的, 可简化问题的求解. 下面继续应用Bregman迭代求解此变分问题, 通过对目标函数引入Bregman距离, 将原问题转化为无约束问题的迭代求解与Bregman参数  $\mathbf{p}$  的更新过程, 令初始

点  $\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b}^0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$ , 最终迭代公式如下:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\alpha}^{k+1}, \mathbf{b}^{k+1}) = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}} \sum_i (b_i - z_i \ln b_i) \\ \quad + \iota_{\mathbf{C}}(\mathbf{b}) + \lambda \Psi(\boldsymbol{\alpha}) \\ \quad + \frac{1}{2\gamma} \|A\Phi\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b} + \mathbf{p}^k\|_2^2 \\ \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + (A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} - \mathbf{b}^{k+1}) \end{cases} \quad (8)$$

$\gamma > 0$ , 具体的推导过程不再给出, 详细内容请参见文献<sup>[8]</sup>. 与传统的求解约束优化问题的惩罚函数与序贯策略 (continuation method) 相比, Bregman迭代主要有两个优点: (1) Bregman迭代收敛速度快, 特别是当目标泛函中包含  $l_1$  正则化项时, 只需少许几次迭代即可获得很好的结果; (2) 序贯策略需要在迭代过程中不断减小  $\gamma$  的取值, 而  $\gamma$  值在Bregman迭代过程中可保持不变, 因此可以预先选择一个合适的  $\gamma$  值最小化子问题的条件数, 从而可提高数值算法如牛顿迭代、Gauss-Seidel迭代的收敛速度, 同时可避免  $\lambda \rightarrow 0$  过程中序贯策略的数值不稳定性. (8) 式中第一个子问题为多变量优化问题, 通常的方法是采用交替迭代策略, 转化为两个简单的迭代求解. 文献<sup>[10]</sup>指出当内部仅迭代一次时算法仍是收敛的, 具体迭代公式如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} \lambda \Psi(\boldsymbol{\alpha}) \\ \quad + \frac{1}{2\gamma} \|A\Phi\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}^k + \mathbf{p}^k\|_2^2 \\ \mathbf{b}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{b}} \sum_{i=1}^N (b_i - z_i \ln b_i) + \iota_{\mathbf{C}}(\mathbf{b}) \\ \quad + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{b} - A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} - \mathbf{p}^k\|_2^2 \\ \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + (A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} - \mathbf{b}^{k+1}) \end{cases} \quad (9)$$

该迭代公式可将原问题解耦, 把原问题的正则项与保真项分裂在两个子问题中, 从而大幅度简化原问题的求解, 最后一个子步对Bregman参数进行更新, 无需迭代, 直接计算即可, 整个算法的复杂度主要由前两个子问题决定.

(9) 式中第一个子问题可理解为高斯噪声下的稀疏性正则化图像恢复问题, 目标泛函中  $\Psi(\boldsymbol{\alpha})$  关于  $\boldsymbol{\alpha}$  可分离的, 同时第二项关于  $\boldsymbol{\alpha}$  是可微的, 因而可采用线性化Bregman迭代进行快速求解<sup>[9]</sup>, 该方法在采纳Bregman迭代框架的同时, 对二次项在当前点处作泰勒展开, 作线性逼近, 从而使得简化后的目标泛函对关于问题变量  $\boldsymbol{\alpha}$  是可分离, 可单独处理每一分量, 大大简化问题的求解, 最终的迭代公式表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{\gamma} \Phi^T A^T (\mathbf{b}^k - A\Phi\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^n - \mathbf{p}^k) \\ \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{n+1} = \lambda \Psi(\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2\beta} \|\boldsymbol{\alpha} - \beta \mathbf{v}^{n+1}\|_2^2 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $n$  为该子问题的内部迭代次数,  $\beta > 0$ . 设置初始点  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$ , 选择当前迭代  $\boldsymbol{\alpha}^k$  作为初始迭代点  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^0$ . 作者

在文献<sup>[11]</sup>中指出如果 $\Psi$ 满足适当的条件时,式(10)中的第二个子问题存在唯一解,且对每一分量具有可分离形式.当稀疏性度量函数为 $l_1$ 范数时,对应的即是著名的软阈值收缩操作:

$$\tilde{\alpha}_i^{n+1} = \beta \text{sign}(v_i^{n+1}) \max(0, |v_i^{n+1}| - \lambda) \quad (i = 1, \dots, I) \quad (11)$$

可以发现,公式(10)非常容易实现,仅需矩阵向量的乘积与标量收缩操作( $l_1$ 范数),本文中矩阵向量的乘积可通过快速算法实现,如DCT与小波变换(时间复杂度为 $O(N)$ )、Ridgelet与Curvlet变换(时间复杂度为 $O(N \log N)$ )等等,同时线性化Bregman方法收敛速度快,只需少数几次迭代即可获得很好的恢复结果,从而整个子问题求解具有较低的时间复杂度.

(9)式中第二个子问题对应的则是泊松去噪问题.在分析该子问题之前,先介绍邻近算子的概念.Moreau将凸投影算子进行推广,于1962年首先提出了邻近算子的概念.令 $f$ 为实希尔伯特空间 $H$ 上的下半连续凸函数,给定 $\gamma > 0$ ,函数 $f$ 的邻近算子定义为:

$$\text{prox}_{\lambda f} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} : x \rightarrow \underset{y \in \mathbf{H}}{\text{argmin}} f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|_2^2 \quad (12)$$

当 $\lambda = 1$ 时,简记为 $\text{prox}_f$ . $\text{prox}_{\lambda f}$ 为上述变分的唯一解.如果取 $f(y) = \iota_C(y)$ ,此时 $\text{prox}_{\iota_C} x = P_C x$ ,即为

凸集 $\mathbf{C}$ 的投影算子.记 $\varphi(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^N b_i - z_i \ln b_i$ ,借助于邻近算子的概念,(9)式中的第二个子问题等价于:

$$\mathbf{b}^{k+1} = \text{prox}_{\lambda\varphi + \iota_C}(A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} + \mathbf{p}^k) \quad (13)$$

这里需要求解复合算子 $\lambda\varphi + \iota_C$ 的邻近算子,依据文献<sup>[12]</sup>中的定理12,

$$\mathbf{b}^{k+1} = P_C \circ \text{prox}_{\lambda\varphi}(A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} + \mathbf{p}^k) \quad (14)$$

(14)式仍需求解 $\varphi$ 的邻近算子 $\text{prox}_{\lambda\varphi}$ ,按照邻近算子的定义(12),目标函数关于 $\mathbf{b}$ 是可分离的,可转化为 $N$ 个一维优化问题进行求解,幸运的是问题解具有解析表达式,详细的推导不再给出,该式非常容易实现,将其代入后:

$$\mathbf{b}^{k+1} = P_{C_i} \circ \left( \frac{[A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1}]_i - \gamma}{2} + \frac{\sqrt{([A\Phi\boldsymbol{\alpha}^{k+1} + \mathbf{p}^k]_i - \lambda)^2 + 4\gamma z_i}}{2} \right) \quad 1 \leq i \leq N \quad (15)$$

式中, $P_{C_i}$ 为向凸集 $C_i$ 的投影算子, $P_{C_i}(\cdot) = \underset{y \in C_i}{\text{argmin}} \|\cdot - y\|_2^2 = \max(\cdot, 0)$ .综上所述,两个子问题都很容易计算,具有较低的计算复杂度,最后完整的算法描述如下:

#### 稀疏性正则化图像泊松恢复的分裂Bregman快速算法

算法任务:	泊松噪声下图像恢复
输入参数:	观测图像 $\mathbf{z}$ ,稀疏表示字典 $\Phi$ ,点态扩散函数 $h$ ,正则化参数 $\lambda$ ,最大迭代次数 $N_{SB}$ ,最大内迭代次数 $N_{LB}$ ,松弛参数 $\gamma, \beta$
初始化:	$\boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{b}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$
主迭代:	For $k = 0$ to $k = N_{SB} - 1$ $\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^0 = \boldsymbol{\alpha}^k$ 进入子问题1的内部迭代; For $n = 0$ to $n = N_{LB} - 1$ 执行迭代公式(10) End $\boldsymbol{\alpha}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{N_{LB}-1}$ ; 求解子问题2,执行公式(15),得到 $\mathbf{b}^{k+1}$ ; 执行公式(9)中的最后一个子步,更新Bregman参数 End
输出:	恢复图像 $\mathbf{u}^* = \Phi\boldsymbol{\alpha}^{N_{SB}}$

### 3 实验结果与分析

本节将对多幅测试图像进行仿真实验,检验本文模型与数值算法的有效性,并同多种现有算法进行比较,包括全变差正则化的RL算法(简记为RL-TV)<sup>[2]</sup>,高斯噪声下的小波域迭代收缩去卷积算法(简记为NavieGauss)<sup>[13]</sup>,前向后向算子分裂求解的稀疏性正则化泊松图像反卷积算法(简记为VST-PTI)<sup>[4]</sup>.直接应用NavieGauss算法处理泊松噪声,是为了验证泊松似然函数作为保真项的有效性:VST-PTI算法应用VS变换将Poisson噪声转换为高斯噪声下的图像反卷积问题,借助于最小二乘保真项的可微性,采用邻近的前向后向算子分裂进行求解,在引言中已经对这些算法作了简要的说明,这里不再重复.实验用的测试图像包括:神经元体模(Neuron phantom)的共焦显微图像、可见光Carmerman图像.为了进一步比较实验结果,本文将从视觉效果与定量指标两个方面对图像质量进行比较.采用的定量指标包括平均绝对误差MAE、峰值信噪比PSNR.MAE与PSNR的定义如下:

$$MAE = \sum_i \sum_j \frac{|p'_{i,j} - p_{i,j}|}{MN} \quad (16)$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{\max(P)^2}{\sum_i \sum_j \frac{(p'_{i,j} - p_{i,j})^2}{MN}} \quad (17)$$

其中 $P$ 为原始无噪图像, $P'$ 为噪声图像的估值, $N$ 和 $M$ 为图像尺寸大小, $i,j$ 为图像像素下标.MAE标准能够更加适应泊松噪声色统计特性.

实验中,本文算法选择 $l_1$ 范数作为稀疏性约束函数,取内部线性Bregman迭代次数 $N_{LB} = 20$ ,分裂Bregman主迭代次数 $N_{LB} = 10$ ,正则化参数 $\lambda = 16$ ,松弛参数 $\gamma = 0.2$ , $\beta = 1$ .对于NaiveGauss算法、VST-PTI算法以及本文算法,选取Curvelet紧框架作为图像的稀疏表示字典.

文献[4]的作者提供了可供自由下载的Matlab软件包PoissonDeconvolution,网址为:<http://www.greyc.ensicaen.fr/~fdupe>,本文实验中其他算法结果均由该软件包实现,模型参数按原文献设置,各算法也均迭代200次.图1(a),2(a),3(a)显示了原始的理想图像,其中图1(a),2(a)灰度值范围为 $[0,30]$ ,3(a)为 $[0,128]$ ,图1(b),2(b),3(b)为模糊后的泊松噪声图像,点态扩散函数 $h$ 取 $7 \times 7$ 的平均模糊核,图像质量退化严重,灰度值范围较小时更为严重.图1(c-f),2(c-f),3(c-f)给出了各算法的恢复结果.可以看出,当灰度值范围为 $[0,30]$ 时,RL-TV算法能够很好地去掉模糊效果,但是背景部分中出现大量伪迹,同时由于TV正则项固有的分片常数特性,恢复图像出现了阶梯效应.由于针对高斯噪声的最小

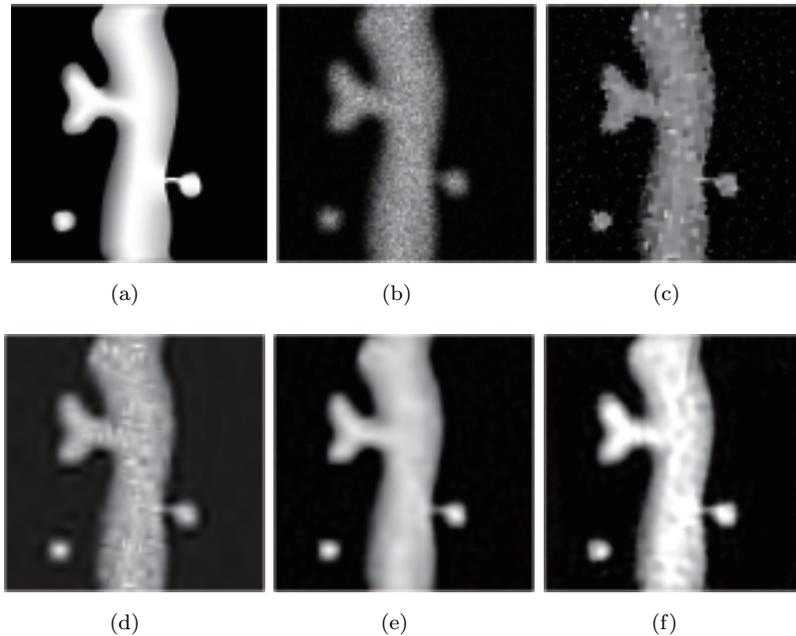


图 1. 泊松噪声下多种算法恢复图像结果比较(Neuron phantom图像, 灰度值范围 $[0,30]$ ). (a) 原图; (b) 模糊的噪声图像; (c) RL-TV算法; (d) NaiveGauss算法; (e) VST-PTI算法; (f) 本文算法.

Fig 1. the restoration result of several algorithms under poisson noise (Neuron phantom, gray level range  $[0, 30]$ ). (a) original image; (b) blurry and noise image; (c) RL-TV algorithm; (d) NaiveGauss algorithm; (e) VST-PTI algorithm; (f) our algorithm.

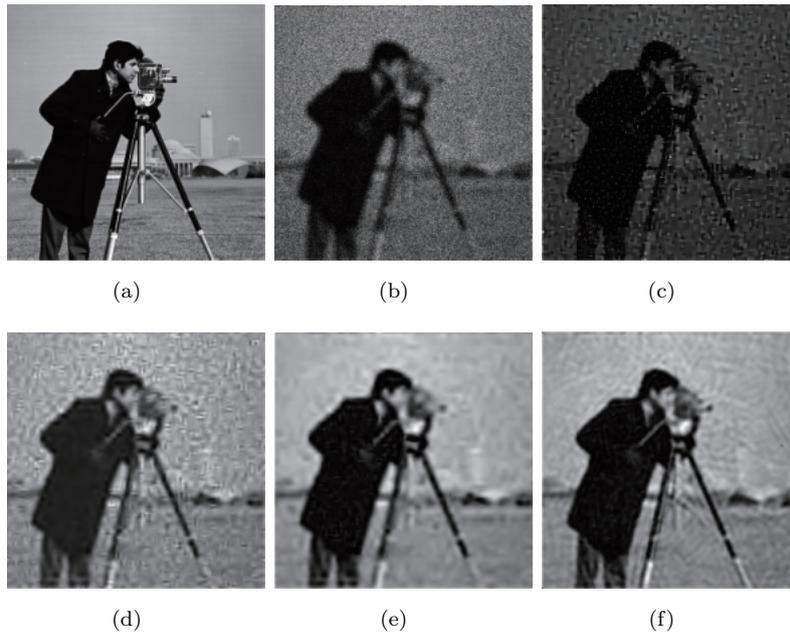


图 2. 泊松噪声下多种算法恢复图像结果比较(Cameraman图像, 灰度值范围[0,30]). (a) 原图像; (b) 模糊的噪声图像; (c) RL-TV算法; (d) NaiveGauss算法; (e) VST-PTI算法; (f) 本文算法.

Fig 2. the restoration result of several algorithms under poisson noise (Cameraman, gray level range [0, 30]). (a) original image; (b) blurry and noise image; (c) RL-TV algorithm; (d) NaiveGauss algorithm; (e) VST-PTI algorithm; (f) our algorithm.

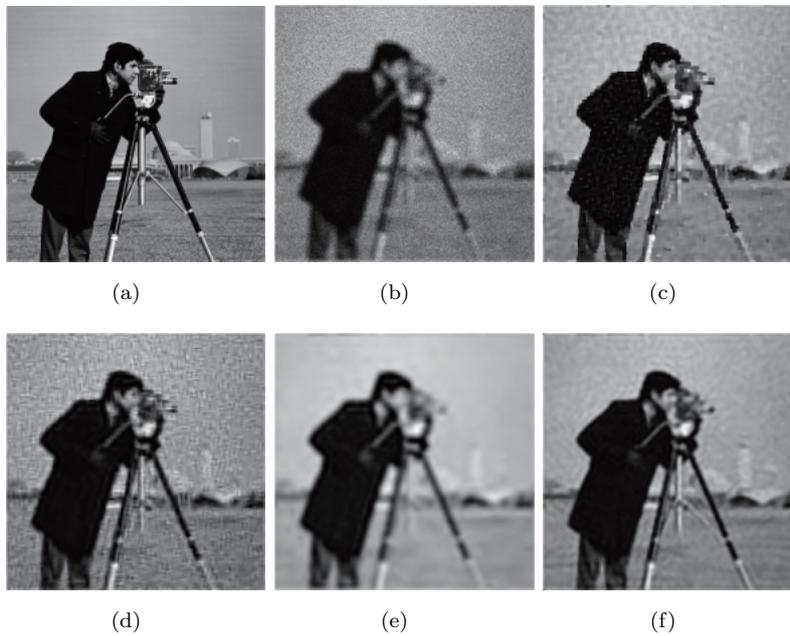


图 3. 泊松噪声下多种算法恢复图像结果比较(Cameraman图像, 灰度值范围[0,128]). (a) 原图像; (b) 模糊的噪声图像; (c) RL-TV算法; (d) NaiveGauss算法; (e) VST-PTI算法; (f) 本文算法.

Fig 3. the restoration result of several algorithms under poisson noise (Cameraman, gray level range [0, 128]). (a) original image; (b) blurry and noise image; (c) RL-TV algorithm; (d) NaiveGauss algorithm; (e) VST-PTI algorithm; (f) our algorithm.

表1 各算法的恢复图像定量指标比较

Table 1 The quantitative comparison of the restoration results of several algorithms

图像	性能指标	退化图像	RL-TV	NaiveGauss	VST-PTI	本文算法
图1(a)	MAE	2.1365	1.58	1.05	0.76	0.63
图1(a)	PSNR(dB)	18.24	19.88	23.55	25.85	26.49
图2(a)	MAE	3.479	3.0705	1.8806	1.4665	1.3161
图2(a)	PSNR(dB)	16.22	16.7039	20.8342	21.8355	22.5694
图3(a)	MAE	9.4920	5.4926	6.8663	11.1667	4.8349
图3(a)	PSNR(dB)	19.3616	23.2563	22.0678	19.4724	23.57

二乘保真项并不能自适应于泊松噪声的统计特性,NavieGauss算法的恢复结果较差,不能有效去除模糊效果,恢复图像的对比度低,且在光滑部分出现了较大幅度的失真.VST-PTI算法取得了较好的恢复结果,与本文算法相近.当灰度值范围为 $[0,128]$ 时,此时在灰度值较大,泊松分布趋近于高斯分布,NavieGauss算法性能得到有效提升,RL-TV算法恢复结果也得到改善,但仍存在一定的阶梯效应.而VST-PTI算法性能却大幅下降,恢复图像过于平滑.本文算法始终取得了较好的结果,恢复图像的视觉效果更好,在图像结构保持与噪声去除间取得了较好的平衡.表1列出了各算法恢复图像质量的定量指标MAE与PSNR.由于本文的保真项能够自适应于泊松噪声的统计特性,同时字典中原子能够有效匹配图像中的重要局部几何结构,从而改善了恢复图像的质量.

#### 4 结论与展望

本文在Bayesian-MAP框架下,采用了负log泊松似然函数作为保真项,应用图像在冗余字典下稀疏性约束作为正则项,建立了稀疏性正则化的泊松噪声图像恢复算法,无需进行VS变换,能够直接处理泊松噪声,并采用Split-Bregman迭代算法进行高效求解.对一系列图像进行了仿真测试,并同多种算法进行了比较,实验结果表明:由于本文的保真项能够自适应于泊松噪声的统计特性,同时字典中原子能够有效匹配图像中的重要局部几何结构,从而改善了恢复图像的质量.随着CCD制造工艺的进步和成本的降低,CCD器件目前已经成为最通用的一种成像传感器.然而CCD阵列图像的噪声来源较为复杂,包含泊松、高斯等多种类型的噪声,如何有效去除这样的复合噪声是一个难点问题.依据D. L. Snyder提出的CCD图像信号组成模型,本文的策略与算法也可应用于该模型的求解,相关的内容将在后续论文中继续讨论.

#### References

- 1 Starck J L, Murtagh F. *Astronomical image and data analysis*. Berlin: Springer-Verlag, 2006
- 2 Dey N, Blanc-Féraud L, Zimmer C, Kam Z, Olivo-Marin J C, Zerubia J. A deconvolution method for confocal microscopy with total variation regularization. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, Arlington, USA: IEEE, 2004, **2**:1223-1226
- 3 Nowak R, Kolaczyk E. A statistical multiscale framework for poisson inverse problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, **46**(5): 1811-1825
- 4 Dupe F X, Fadili J M, Starck J L. A Proximal Iteration for Deconvolving Poisson Noisy Images Using Sparse Representations. *IEEE Transactions on Image Processing Publication*, 2009, **18**(2): 310-321
- 5 Chan R H, Chen K. Multilevel algorithm for a Poisson noise removal model with total-variation regularization. *International Journal of Computer Mathematics*, 2007, **84**(8): 1183-1198
- 6 Goldstein T, Osher S. The Split Bregman Algorithm for L1 Regularized Problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, **2**(2): 323-343
- 7 Sun Yu-Bao, Xiao Liang, Wei Zhi-Hui. Sparse Representations of Images by a Multi-component Gabor Perception Dictionary. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(11): 1379-1387  
(孙玉宝, 肖亮, 韦志辉. 基于Gabor感知多成分字典的图像稀疏表示算法研究. *自动化学报*, 2008, **34**(11): 1379-1387)
- 8 Osher S, Burger M, Goldfarb D, Xu J, Yin W. Multiscale Modeling and Simulation. *Communications in Mathematical Sciences*, 2006, **4**(2): 460-489
- 9 Osher S, Mao Y, Dong B, Yin W. Fast linearized Bregman iteration for compressive sensing and sparse denoising. *Communications in Mathematical Sciences*, 2010, **8**(1): 93-111
- 10 Setzer S. Split Bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage. *Scale Lecture Notes In Computer Science*, 2009, **5567**: 464-476
- 11 Fadili M J, Starck J L, Murtagh F. Inpainting and zooming using sparse representations. *The Computer Journal*, 2009, **52**(1): 64-79
- 12 Combettes P L, Pesquet J C. A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery. *IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 564-574
- 13 Vonesch C, Unser M. A fast iterative thresholding algorithm for wavelet-regularized deconvolution. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, Arlington, Washington, USA: IEEE, 2007. 608-611



**孙玉宝** 南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为图像建模与稀疏表示, 图像压缩与通信.

E-mail: syb8692833@126.com

(**SUN Yu-Bao** Ph.D. candidate at the School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers image modeling and sparse representation, image compression and communication.)

His research interest covers image modeling and sparse representation, image compression and communication.)



**费选** 南京理工大学博士研究生. 主要研究领域为图像压缩与质量评价, 分布式信源编码.

E-mail: feixuan@hotmail.com

(**FEI Xuan** Ph.D. candidate at the School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers image compression and quality assessment, distributed source coding.)

His research interest covers image compression and quality assessment, distributed source coding.)



**韦志辉** 博士, 教授. 主要研究方向为图像处理, 图像建模, 小波分析, 多尺度变换理论, 数字水印, 编码与压缩.

E-mail: gswei@mail.njust.edu.cn

(**WEI Zhi-Hui** Professor, Ph.D. His research interest covers image processing, image modeling, wavelet analysis, multi-scale analysis, digital watermark, and image coding and compressing.)

His research interest covers image processing, image modeling, wavelet analysis, multi-scale analysis, digital watermark, and image coding and compressing.)



**肖亮** 博士, 副教授. 主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用, 模式识别, 运动估计与跟踪, 虚拟现实与系统仿真.

E-mail: txiaoliang@163.com

(**XIAO Liang** Associate professor, Ph.D. His research interest covers variational PDE application in image processing, image modeling, pattern recognition, motion estimation and tracking, virtual reality, and system simulation.)

His research interest covers variational PDE application in image processing, image modeling, pattern recognition, motion estimation and tracking, virtual reality, and system simulation.)