

# 基于三变量模型的剪切波去噪方法

郭强<sup>1</sup> 郁松年<sup>1</sup>

**摘要** 针对图像去噪问题,提出了两种基于三变量模型的剪切波去噪方法.首先利用互信息对剪切波系数间的依赖关系进行量化分析;然后根据依赖关系选取含噪系数  $s$ ,  $s$  的父系数  $p$  以及与  $s$  方向相反的兄弟系数  $c$ ,建立了三变量最大后验估计模型.在假定  $s, p, c$  具有相同标准差的情况下,由估计模型推出一种具有闭式解的去噪方法(方法 1);对  $s, p, c$  具有不同标准差的情况,给出了一种迭代去噪方法(方法 2),并证明了该方法的收敛性.实验结果表明,方法 1 和方法 2 不仅具有良好的视觉效果,而且具有较高的峰值信噪比和结构相似度均值.

**关键词** 图像去噪,统计模型,剪切波变换,互信息,最大后验估计

**DOI** 10.3724/SP.J.1004.2010.01062

## Shearlet-based Image Denoising Using Trivariate Prior Model

GUO Qiang<sup>1</sup> YU Song-Nian<sup>1</sup>

**Abstract** Two shearlet-based denoising methods using trivariate prior model are proposed for image denoising. The dependency among shearlet coefficients is analyzed via mutual information. According to the dependency characterization, a noisy coefficient  $s$ , its parent coefficient  $p$  and its cousin coefficient  $c$  with opposite orientation are exploited to establish the trivariate maximum a posteriori estimate model. In the case of  $s, p, c$  having the same standard deviation, a simple closed-form solution is derived from the trivariate model. For  $s, p, c$  with different standard deviations, an iterative denoising method is given, and the convergence of the iterative algorithm is proved. Experimental results show that the denoised images by the proposed methods achieve not only better visual quality but also higher peak signal-to-noise ratio (PSNR) and mean structural similarity (MSSIM) values.

**Key words** Image denoising, statistical modeling, shearlet transform, mutual information, maximum a posteriori estimate

图像在获取和传输过程中,不可避免地会受到噪声影响,噪声的存在降低了图像的分辨率,严重影响了图像的后续处理(如目标的识别和分类).为了改善图像质量,尽可能减少噪声对后续图像处理的影响,必须先对图像进行去噪.

小波因具有良好的时频局域性、多分辨率特性,以及对点奇异分段光滑函数的最优逼近性,而被广泛应用于图像去噪<sup>[1-2]</sup>. Donoho 于 1995 年开创性地提出了基于小波的软阈值去噪方法<sup>[3]</sup>,采用该方法去噪后的图像具有较好的视觉效果,但其峰值信噪比(Peak signal-to-noise ratio, PSNR)较低,这主要是由于软阈值方法具有过平滑性.此后,Sendur 等<sup>[4]</sup>利用尺度间小波系数的依赖关系提出了基于双变量收缩函数的去噪方法,实验表明该方法具有较

好的去噪性能.

遗憾的是,由一维小波张成的二维可分离小波只具有有限的方向,不能很好地表示图像中的方向信息.多尺度几何分析的出现很好地解决了小波的这一问题,典型的代表为曲线波变换(Curvelet transform)<sup>[5-6]</sup>和轮廓波变换(Contourlet transform)<sup>[7]</sup>.由于曲线波和轮廓波都具有各向异性和多方向性等特性,因此它们能对图像中高度各向异性的边缘和纹理等信息给出接近最优的表示<sup>[8]</sup>.这些良好特性能够提高图像去噪的性能.有鉴于此,Starck 等<sup>[9]</sup>提出了基于曲线波的 K-Sigma 阈值去噪方法(Curvelet-KS),该方法的核心是利用阈值函数式(1)逐个对曲线波系数进行处理

$$T(y) = \begin{cases} y, & \frac{|y|}{\sigma_n} \geq K\tilde{\sigma} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $y$  为含噪曲线波系数,  $\sigma_n$  为噪声标准差,  $\tilde{\sigma}$  为噪声在曲线波系数中的分布水平,  $K$  为常数.与小波系数类似,多尺度几何变换系数间也存在一定的依赖关系.在此基础上,Guo 等<sup>[10]</sup>提出了基于曲线波的多变量阈值函数;Po 等<sup>[11]</sup>利用隐马尔科夫

收稿日期 2009-06-08 录用日期 2010-01-13  
Manuscript received June 8, 2009; accepted January 13, 2010  
国家自然科学基金(60873129),上海市重点学科项目(J50103),上海市教育委员会科研创新项目(08YZ13),上海大学研究生创新基金(SHUCX091042)资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China(60873129), Shanghai Leading Academic Discipline Project(J50103), Innovation Program of Shanghai Municipal Education Commission(08YZ13), and Postgraduate Innovation Fund of Shanghai University(SHUCX091042)  
1. 上海大学计算机工程与科学学院 上海 200072  
1. School of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200072

树模型 (Hidden Markov tree, HMT) 对系数间的依赖关系进行建模, 提出了基于轮廓波的去噪方法 (Contourlet-HMT), 该方法对富纹理图像取得了较好的去噪效果.

然而, 在频率空间中曲线波和轮廓波是隔层细分的, 这在一定程度上影响了它们对图像稀疏表示的性能. 2007 年, Guo 等<sup>[12]</sup> 通过特殊形式的具有合成膨胀的仿射系统构造了一种接近最优的多维函数稀疏表示方法: 剪切波变换 (Shearlet transform). 剪切波变换不仅具有与曲线波和轮廓波相同的非线性误差逼近阶, 而且在频率空间中剪切波是逐层细分的, 这使其具有更好的表示性能. 同时, 剪切波具有简单的数学结构, 它可以通过对一个函数进行伸缩、平移、旋转而生成一组基函数, 这一点同小波类似, 而这正是曲线波和轮廓波所缺少的. 剪切波的良好特性使其非常适合于图像去噪. 2008 年, Easley 等<sup>[13]</sup> 通过采用类似于式 (1) 的阈值函数对剪切波系数进行处理, 提出了基于剪切波的去噪方法 (Shearlet-ST), 但是该方法未考虑剪切波系数间的依赖关系. 为进一步提高算法的去噪性能, 本文利用剪切波系数间的依赖关系, 提出了基于剪切波变换的三变量图像去噪方法. 首先利用互信息 (Mutual information) 对剪切波系数间的依赖关系进行量化分析, 然后根据系数间依赖关系的量化结果选取含噪系数  $s$ ,  $s$  的父系数  $p$  以及与  $s$  方向相反的兄弟系数  $c$ , 采用广义球等高精度模型对剪切波系数建模, 在此基础上利用最大后验 (Maximum a posteriori, MAP) 估计推出了两种三变量的剪切波去噪方法, 实验结果验证了本文方法的有效性.

## 1 剪切波变换

设  $A_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ ,  $S_s = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 令  $\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$  满足

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1)\hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \quad (2)$$

其中,  $\hat{\psi}$  为  $\psi$  的傅里叶变换;  $\psi_1$  为连续小波,  $\hat{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\text{supp } \hat{\psi}_1 \subset [-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$ ;  $\hat{\psi}_2 \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\text{supp } \hat{\psi}_2 \subset [-1, 1]$ , 在区间  $(-1, 1)$  上,  $\psi_2 > 0$  且  $\|\psi_2\| = 1$ . 对每一个  $a \in \mathbf{R}^+$ ,  $s \in \mathbf{R}$ ,  $t \in \mathbf{R}^2$ , 剪切波的定义为<sup>[12]</sup>

$$\psi_{ast}(x) = a^{-\frac{3}{4}}\psi(A_a^{-1}S_s^{-1}(x-t)) \quad (3)$$

函数  $f(x)$  的剪切波变换为

$$\text{SH}_f(a, s, t) = \langle f, \psi_{ast} \rangle \quad (4)$$

剪切波满足抛物线尺度化准则, 具有良好的局部化特性、多方向性以及接近最优的稀疏表示能力<sup>[13]</sup>, 这些特性使其非常适合于图像去噪.

## 2 剪切波系数间的统计依赖

定义 1<sup>[14]</sup>. 考虑两个随机变量  $X$  和  $Y$ , 它们的联合概率密度函数为  $p(x, y)$ , 其边缘概率密度函数分别是  $p(x)$  和  $p(y)$ . 互信息  $I(X; Y)$  为联合分布  $p(x, y)$  和乘积分布  $p(x)p(y)$  之间的相对熵, 即

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} = \\ D(p(x, y) \parallel p(x)p(y)) &= \\ E_{p(x, y)} \log \frac{p(X, Y)}{p(X)p(Y)} & \quad (5) \end{aligned}$$

其中,  $D(\cdot \parallel \cdot)$  为两个分布之间的相对熵或 Kullback-Leibler 距离.

$I(X; Y)$  越大, 变量  $X$  和  $Y$  之间关系越紧密, 即  $Y$  能够提供越多的信息用于估计  $X$ , 反之亦然. 当  $X, Y$  相互独立时,  $I(X; Y)$  等于 0; 当  $X, Y$  相互依赖时,  $I(X; Y)$  大于 0.

剪切波系数间的依赖关系能为构造去噪模型提供重要信息, 因此我们借助互信息来量化剪切波系数间的依赖. 令  $s$  表示尺度和方向分别为  $i, j$  的剪切波系数,  $p$  表示  $s$  在尺度  $i-1$  上的父系数,  $c$  表示与  $s$  位于相同尺度但方向相反的兄弟系数.

对取自 DenoiseLab<sup>[15]</sup> 标准测试图像库的三幅 512 像素  $\times$  512 像素灰度图像 Lena, Barbara 以及 Boat (如图 1 所示), 我们利用 Moddemeijer 所提出的非参数直方图估计法<sup>[16]</sup> 分别计算互信息  $I(s; p)$ ,  $I(s; c)$  以及  $I(s; p, c)$ , 结果如表 1 所示.

表 1 剪切波系数间的互信息估计  
Table 1 Mutual information estimates for shearlet coefficients

	$I(s; p)$	$I(s; c)$	$I(s; p, c)$
Lena	0.0610	0.1248	0.1501
Barbara	0.0156	0.1401	0.1736
Boat	0.0379	0.0747	0.1020

由表 1 可知,  $s$  与  $(p, c)$  的依赖程度要高于  $s$  单独与  $p$  或  $c$  的依赖程度, 即相对于单独的剪切波系数  $p$  或  $c$  而言, 系数向量  $(p, c)$  能提供更多的关于  $s$  的信息. 有鉴于此, 本文提出了一种利用  $(p, c)$  来对  $s$  进行估计的三变量去噪方法.

## 3 基于三变量模型的剪切波去噪方法

假定  $u$  为原始图像,  $v$  是服从  $N(0, \sigma_n^2)$  分布的高斯白噪声,  $g$  为含噪图像, 则含噪图像模型可表示

为

$$g = u + v \tag{6}$$

在给定含噪图像  $g$  的前提下, 图像去噪的目的是根据某种准则尽可能地恢复原始图像  $u$ . 在剪切波域中, 含噪模型可表示为

$$y = s + n \tag{7}$$

其中,  $y$  为含噪剪切波系数,  $s$  为原始剪切波系数,  $n$  为噪声剪切波系数. 我们的目标是根据含噪系数  $y$  估计原始系数  $s$ . 由于 MAP 具有实现简单以及时间代价低等优点, 故本文采用 MAP 方法由  $y$  得到  $s$  的估计值  $\hat{s}$ .

### 3.1 单变量模型

由 MAP 所得到的估计值  $\hat{s}$  可表示为

$$\hat{s}(y) = \arg \max_s p_{s|y}(s|y) \tag{8}$$

由贝叶斯准则, 可得

$$\begin{aligned} \hat{s}(y) &= \arg \max_s [p_{y|s}(y|s) \times p_s(s)] = \\ &= \arg \max_s [p_n(y - s) \times p_s(s)] \end{aligned} \tag{9}$$

式 (9) 等价于

$$\hat{s}(y) = \arg \max_s [\log(p_n(y - s)) + \log(p_s(s))] \tag{10}$$

由上式可知, 在估计过程中, 需要用到噪声以及原始剪切波系数的概率密度函数  $p_n(n)$  和  $p_s(s)$ . 在实际应用中, 常假定  $p_n(n)$  为高斯密度函数, 即

$$p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right) \tag{11}$$

一般情况下, 对某一幅具体的图像无法精确地确定其  $p_s(s)$ . 因此, 常采用经验直方图方法来寻找一个能够近似描述  $p_s(s)$  的密度函数. 图 2 给出了对图 1 所示的三幅图像进行 6 层剪切波变换后所得最外层系数的直方图. 从图中可以看出剪切波系数的分布具有与小波系数类似的重尾性, 实验发现拉普拉斯分布能够较好地匹配剪切波系数的分布直方图.

拉普拉斯密度函数的定义为

$$p_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \times \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|s|}{\sigma}\right) \tag{12}$$



(a) 图像 Lena  
(a) Image Lena



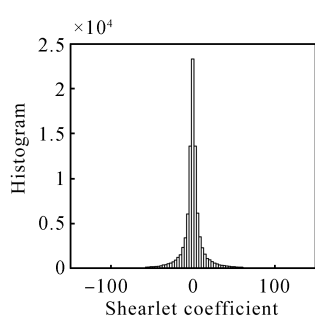
(b) 图像 Barbara  
(b) Image Barbara



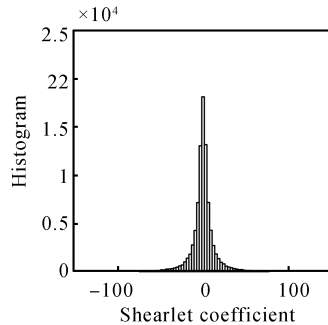
(c) 图像 Boat  
(c) Image Boat

图 1 实验采用的原始图像

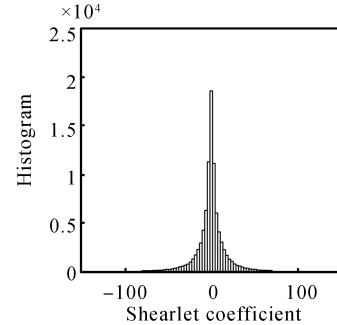
Fig. 1 Benchmark images for the experiments



(a) Lena 的直方图  
(a) Histogram of the image Lena



(b) Barbara 的直方图  
(b) Histogram of the image Barbara



(c) Boat 的直方图  
(c) Histogram of the image Boat

图 2 图像最外层剪切波系数的直方图

Fig. 2 Histograms of the finest shearlet subbands of benchmark images

其中,  $\sigma$  为  $s$  的标准差.

将式 (11) 和式 (12) 代入式 (10), 可得

$$\hat{s}(y) = \arg \max_s [\log(p_n(y-s)) + \log(p_s(s))] = \arg \max_s \left[ -\log(\sigma_n \sqrt{2\pi}) - \frac{(y-s)^2}{2\sigma_n^2} + f(s) \right] \quad (13)$$

其中

$$f(s) = \log(p_s(s)) = -\log(\sigma\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}|s|}{\sigma}$$

易知  $f(s)$  是严格凸且可微的. 式 (13) 等价于解如下关于  $\hat{s}$  的方程

$$\frac{y-\hat{s}}{\sigma_n^2} + f'(\hat{s}) = 0 \quad (14)$$

得

$$\hat{s} = \text{sgn}(y) \left( |y| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \right)_+ \quad (15)$$

其中

$$(\tau)_+ = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ \tau, & \text{其他} \end{cases} \quad (16)$$

### 3.2 三变量模型

表 1 说明在剪切波系数与其父系数以及兄弟系数之间存在着依赖关系. 然而, 上节讨论的单变量模型没有反映剪切波系数间的统计依赖关系. 为了利用这种依赖来更好地估计含噪系数, 我们提出了三变量模型.

为便于讨论, 令  $s_2$  为原始剪切波系数  $s_1$  的父系数,  $s_3$  为  $s_1$  的兄弟系数且其方向与  $s_1$  相反,  $y_1, y_2, y_3$  分别表示与  $s_1, s_2, s_3$  所对应的含噪剪切波系数,  $n_1, n_2, n_3$  为噪声系数. 它们之间有如下关系

$$y_1 = s_1 + n_1 \quad (17)$$

$$y_2 = s_2 + n_2 \quad (18)$$

$$y_3 = s_3 + n_3 \quad (19)$$

上式可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$ ,  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3]$ ,  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$ . 则由 MAP 方法所得到的估计值  $\hat{\mathbf{s}}$  可表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{y}) &= \arg \max_{\mathbf{s}} p_{\mathbf{s}|\mathbf{y}}(\mathbf{s}|\mathbf{y}) = \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}} [p_{\mathbf{y}|\mathbf{s}}(\mathbf{y}|\mathbf{s}) \times p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})] = \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}} [p_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{s}) \times p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})] \end{aligned} \quad (21)$$

由于噪声系数服从高斯分布, 故上式中噪声系数的概率密度函数  $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n})$  为三变量高斯密度, 即

$$p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{3}{2}}} \times \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (22)$$

为了得到原始剪切波系数的三变量概率密度函数, 我们将单变量模型中的拉普拉斯概率密度函数 (12) 推广为广义球等高指数 (Generalized spherically contoured exponential, GSCE) 密度函数.

**定义 2.** 设  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_d]^T$  为随机向量,  $x_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) 为 0 均值同分布且方差满足:  $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_d^2 = \sigma_{\mathbf{x}}^2$ , 则 GSCE 密度函数可表示为

$$\text{GSCE}(\mathbf{x}, \sigma_{\mathbf{x}}, d) = \alpha \times \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma_{\mathbf{x}}} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \quad (23)$$

其中,  $\alpha$  和  $\beta$  分别为大于 0 的常数. 显然, 当  $d = 1, \alpha = 1/\sqrt{2}\sigma_{\mathbf{x}}, \beta = \sqrt{2}$  时, GSCE 密度函数就是拉普拉斯密度函数 (12).

### 3.3 方法 1

我们选取  $d = 3$  时的 GSCE 密度函数作为原始剪切波系数的三变量密度函数  $p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})$ , 即

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}) &= \text{GSCE}(\mathbf{s}, \sigma, 3) = \\ &= \alpha \times \exp\left(-\frac{\beta}{\sigma} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

令

$$f(\mathbf{s}) = \log(p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})) \quad (25)$$

式 (21) 等价于

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{y}) &= \arg \max_{\mathbf{s}} [\log(p_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{s})) + \log(p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}))] = \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}} \left[ -\frac{3}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{s})^2}{2\sigma_n^2} + f(\mathbf{s}) \right] = \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}} \left[ -\frac{3}{2} \log(2\pi\sigma_n^2) - \frac{(y_1-s_1)^2}{2\sigma_n^2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{(y_2-s_2)^2}{2\sigma_n^2} - \frac{(y_3-s_3)^2}{2\sigma_n^2} + f(\mathbf{s}) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

由于  $f(\mathbf{s})$  是严格凸且可微的, 故式 (26) 等价于解下列方程

$$\frac{y_1 - \hat{s}_1}{\sigma_n^2} + f_1(\hat{\mathbf{s}}) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{y_2 - \hat{s}_2}{\sigma_n^2} + f_2(\hat{\mathbf{s}}) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{y_3 - \hat{s}_3}{\sigma_n^2} + f_3(\hat{\mathbf{s}}) = 0 \quad (29)$$

其中,  $f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), f_3(\mathbf{s})$  分别为  $f(\mathbf{s})$  关于  $s_1, s_2, s_3$  的一阶导数.

将式 (24) 代入式 (25), 得

$$f(\mathbf{s}) = \log \alpha - \frac{\beta}{\sigma} \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (30)$$

由上式可得

$$f_1(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_1}{\sigma \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \quad (31)$$

$$f_2(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_2}{\sigma \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \quad (32)$$

$$f_3(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_3}{\sigma \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \quad (33)$$

将式 (31) ~ (33) 分别代入式 (27) ~ (29), 得

$$\hat{s}_1 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma \sqrt{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2}} \right) = y_1 \quad (34)$$

$$\hat{s}_2 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma \sqrt{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2}} \right) = y_2 \quad (35)$$

$$\hat{s}_3 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma \sqrt{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2}} \right) = y_3 \quad (36)$$

由式 (34) ~ (36) 得

$$\left( \sqrt{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2} + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma} \right)^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \Rightarrow \sqrt{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \hat{s}_3^2} = \left( \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} - \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma} \right)_+ \quad (37)$$

将式 (37) 代入式 (34), 得

$$\hat{s}_1 = \frac{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} - \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma})_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \times y_1 \quad (38)$$

上式所得到的  $\hat{s}_1$  为  $s_1$  的闭式解, 即  $\hat{s}_1$  为  $s_1$  的 MAP 估计值.

### 3.4 方法 2

在方法 1 中, 假定原始剪切波系数  $s_1$ , 父系数  $s_2$  及其兄弟系数  $s_3$  具有相同的标准差  $\sigma$ . 然而, 在实际应用中, 不同尺度的剪切波系数往往具有不同的标准差. 设  $s_1, s_2, s_3$  的标准差分别为  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , 将三变量密度函数 (24) 推广为如下形式

$$p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}) = \alpha \times \exp(-\beta \times r) \quad (39)$$

其中

$$r = \sqrt{\left(\frac{s_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{s_3}{\sigma_3}\right)^2} \quad (40)$$

于是, 有

$$f(\mathbf{s}) = \log(p_{\mathbf{s}}(\mathbf{s})) = \log \alpha - \beta \times r \quad (41)$$

利用上式可求得  $f(\mathbf{s})$  关于  $s_1, s_2, s_3$  的一阶导数  $f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), f_3(\mathbf{s})$  分别为

$$f_1(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_1}{\sigma_1^2 \times r} \quad (42)$$

$$f_2(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_2}{\sigma_2^2 \times r} \quad (43)$$

$$f_3(\mathbf{s}) = -\frac{\beta s_3}{\sigma_3^2 \times r} \quad (44)$$

将式 (42) ~ (44) 分别代入式 (27) ~ (29) 得

$$\hat{s}_1 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma_1^2 \times r} \right) = y_1 \quad (45)$$

$$\hat{s}_2 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma_2^2 \times r} \right) = y_2 \quad (46)$$

$$\hat{s}_3 \left( 1 + \frac{\beta \sigma_n^2}{\sigma_3^2 \times r} \right) = y_3 \quad (47)$$

上述方程不存在如式 (38) 那样的闭式解, 但是方程的解可以通过数值迭代方法来求得.

#### 3.4.1 数值求解算法

本文采用牛顿-拉斐逊迭代法<sup>[17]</sup> 求解式 (45) 中的  $r$ . 为了简化讨论, 令  $c_1 = \beta \sigma_n^2 / \sigma_1^2$ ,  $c_2 = \beta \sigma_n^2 / \sigma_2^2$ ,  $c_3 = \beta \sigma_n^2 / \sigma_3^2$  以及

$$g(r) = \frac{y_1^2}{\sigma_1^2(r+c_1)^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2(r+c_2)^2} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2(r+c_3)^2} - 1 \quad (48)$$

则由式 (40) ~ (47) 可得  $g(r) = 0$ . 由式 (48) 可知

$$g'(r) = -2 \left[ \frac{y_1^2}{\sigma_1^2(r+c_1)^3} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2(r+c_2)^3} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2(r+c_3)^3} \right] \quad (49)$$

则求解  $r$  的牛顿-拉斐逊迭代可表示为

$$r_{k+1} = r_k - \frac{g(r_k)}{g'(r_k)} \quad (50)$$

整个求解过程描述如下:

**步骤 1.** 给定误差控制量  $\epsilon$ , 设定  $r$  的初始值  $r_0$  为  $y_1^2/\sigma_1^2 + y_2^2/\sigma_2^2 + y_3^2/\sigma_3^2$ , 并设  $k = 0$ ;

**步骤 2.** 使用式 (48) 计算  $g(r_k)$ ;

**步骤 3.** 使用式 (49) 计算  $g'(r_k)$ ;

**步骤 4.** 使用式 (50) 计算  $r_{k+1}$ ;

**步骤 5.** 当  $|r_{k+1} - r_k| < \epsilon$  时, 输出  $r_{k+1}$ ; 否则令  $k = k + 1$ , 转到步骤 2.

### 3.4.2 迭代算法的收敛性

**定理 1**<sup>[18]</sup>. 设  $h: I \rightarrow \mathbf{R}$  在区间  $I \subseteq \mathbf{R}$  上是一个可微凸函数, 对于给定的起始点  $x_0 \in I$  有  $h'(x_0) \neq 0$ , 那么由牛顿-拉斐逊方法所生成的序列  $\{x_k\}$ ,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)} \quad (51)$$

将收敛于  $h$  的一个根.

下面证明由式 (50) 所生成的序列  $\{r_k\}$  将收敛于  $g(r)$  的一个根. 由式 (49), 可得

$$g''(r) = 6 \left[ \frac{y_1^2}{\sigma_1^2(r+c_1)^4} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2(r+c_2)^4} + \frac{y_3^2}{\sigma_3^2(r+c_3)^4} \right] \quad (52)$$

对由式 (40) 所定义的任意  $r$ , 恒有  $g''(r) \geq 0$ , 故  $g(r)$  为凸函数. 由于  $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ , 对所给的起始点  $r_0 = y_1^2/\sigma_1^2 + y_2^2/\sigma_2^2 + y_3^2/\sigma_3^2$ , 易知  $g'(r_0) \neq 0$ . 由定理 1 可知, 序列  $\{r_k\}$  将收敛于  $g(r)$  的一个根.

### 3.5 参数估计

在利用方法 1 中的式 (38) 来估计  $s_1$  时, 需要用到噪声方差  $\sigma_n^2$ , 原始剪切波系数标准差  $\sigma$  以及参数  $\beta$ . 一般情况下, 无法准确地知道  $\sigma_n^2$  和  $\sigma$ . 对于  $\sigma_n^2$ , 本文采用文献 [11] 所提出的蒙特卡洛方法得到其估计值  $\hat{\sigma}_n^2$ . 对于标准差  $\sigma$ , Sendur 等<sup>[4]</sup> 给出了一种经验估计为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}_n^2, 0)} \quad (53)$$

其中

$$\hat{\sigma}_y = \frac{\sqrt{2}}{M} \sum_{y_{i,j} \in S} |y_{i,j}| \quad (54)$$

这里,  $S$  为  $y_1$  所在的子带,  $M$  为该子带所含剪切波系数的个数. 对于参数  $\beta$ , 可采用最小二乘拟合法<sup>[19]</sup> 来确定. 对自然图像去噪问题, 实验发现参数  $\beta$  在 [1.5, 2.5] 的范围内取值时, 去噪算法具有较好的性能.

在利用方法 2 中的式 (45) 来估计  $s_1$  时, 除参数  $\beta$  和噪声方差  $\sigma_n^2$  外, 还需要知道到剪切波系数的标准差  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). 对于  $\beta$  和  $\sigma_n^2$ , 仍旧采用上述最小二乘拟合法和蒙特卡洛方法来估计. 对于  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), 利用式 (53) 的一个局部形式来估计, 即

$$\hat{\sigma}_k = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_{y,k}^2 - \hat{\sigma}_n^2, 0)}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (55)$$

其中,

$$\hat{\sigma}_{y,k} = \frac{\sqrt{2}}{M_k} \sum_{y_{i,j} \in S_k} |y_{i,j}| \quad (56)$$

这里,  $S_k$  为  $y_k$  所在的子带,  $M_k$  为  $S_k$  子带所含剪切波系数的个数.

### 3.6 去噪算法描述

基于方法 2 的剪切波三变量去噪算法的整个去噪过程可描述如下:

**步骤 1.** 给定含噪图像;

**步骤 2.** 对含噪图像进行剪切波变换, 得到含噪剪切波系数  $y$ ;

**步骤 3.** 使用蒙特卡洛方法计算  $\hat{\sigma}_n^2$ ;

**步骤 4.** 使用式 (55) 计算  $\hat{\sigma}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ );

**步骤 5.** 使用第 3.4.1 节的牛顿-拉斐逊迭代算法求解  $r$ ;

**步骤 6.** 对所有含噪剪切波系数  $y$  使用式 (45) 求其去噪后的估计值  $\hat{s}$ ;

**步骤 7.** 对去噪后的系数  $\hat{s}$  进行逆剪切波变换得去噪图像.

基于方法 1 的图像去噪与上述过程类似, 不同之处在于方法 1 不需要求解  $r$ , 而是直接使用式 (38) 求含噪系数的估计值.

## 4 去噪效果评价

对图像去噪效果的评价可以从定性和定量两方面进行. 定性主要依靠图像的视觉效果进行评价, 具有主观性. 如何用定量的方法评价去噪效果的好坏目前并没有完全统一的评价标准. 本文选用 PSNR 和结构相似度均值 (Mean structural similarity, MSSIM)<sup>[15, 20]</sup> 作为定量评价标准.

设  $u$  为原始图像,  $\hat{g}$  为去噪后的图像,  $(M, N)$  为图像大小, 则 PSNR 的定义为

$$\text{PSNR} = 20 \lg \left( \frac{255}{\text{RMSE}} \right) \quad (57)$$

其中, RMSE 为均方根误差, 其定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M [u(i,j) - \hat{g}(i,j)]^2} \quad (58)$$

PSNR 值越大, 原始图像与去噪后的图像差异越小. 结构相似度 (Structural similarity, SSIM) 的定义为

$$\text{SSIM}(u, \hat{g}) = [l(u, \hat{g})]^\gamma \cdot [c(u, \hat{g})]^\eta \cdot [s(u, \hat{g})]^\mu \quad (59)$$



图 3 实验结果

Fig. 3 Experimental results

其中,  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  分别是用来调整亮度、对比度以及结构信息的权重,  $l(u, \hat{g})$  为亮度比较函数,  $c(u, \hat{g})$  为对比度比较函数,  $s(u, \hat{g})$  为结构比较函数, 它们的定义分别为

$$l(u, \hat{g}) = \left( \frac{2\mu_u\mu_{\hat{g}} + c_1}{\mu_u^2 + \mu_{\hat{g}}^2 + c_1} \right) \quad (60)$$

$$c(u, \hat{g}) = \left( \frac{2\sigma_u\sigma_{\hat{g}} + c_2}{\sigma_u^2 + \sigma_{\hat{g}}^2 + c_2} \right) \quad (61)$$

$$s(u, \hat{g}) = \left( \frac{\sigma_{u\hat{g}} + c_3}{\sigma_u\sigma_{\hat{g}} + c_3} \right) \quad (62)$$

其中,  $\mu_u$ ,  $\mu_{\hat{g}}$  分别为  $u$ ,  $\hat{g}$  的亮度均值;  $\sigma_u$ ,  $\sigma_{\hat{g}}$  分别为  $u$ ,  $\hat{g}$  的标准差;  $\sigma_{u,\hat{g}}$  为协方差,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  是为了防止当分母接近零时, 产生不稳定现象所添加的常数. 在评价两幅图像时, 用一个  $8 \text{ 像素} \times 8 \text{ 像素}$  的窗口沿图像 (原始图像、去噪图像) 逐像素地从左上角到右下角移动, 每次计算窗口对应子图像的 SSIM 值. 对所有子图像的 SSIM 值求平均, 可得整幅图像的质量值 MSSIM, 其定义为

$$\text{MSSIM}(u, \hat{g}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \text{SSIM}(u_i, \hat{g}_i) \quad (63)$$



图 4 局部实验结果

Fig. 4 Partial experimental results

其中,  $L$  为子图像块的数量. MSSIM 从图像组成的角度来对图像进行比较, 其最大值为 1. MSSIM 越接近 1, 原始图像与去噪后的图像间的结构越相似.

## 5 实验结果与分析

为说明本文去噪方法的有效性, 我们进行了有关的仿真实验. 采用 Matlab 7.0 对算法进行编程实现, 实验中采用 DenoiseLab<sup>[15]</sup> 中的 512 像素  $\times$  512 像素灰度图像 Lena、Barbara 以及 Boat 作为测试图像 (如图 1 所示), 并对不同测试图像分别加入不同强度的高斯白噪声. 分别对测试图像进行 6 层曲

线波变换、6 层轮廓波变换, 以及 6 层剪切波变换, 然后将本文所提出的两种去噪方法与基于曲线波的 K-Sigma 阈值方法 (Curvelet-KS)<sup>[9]</sup>、基于隐马尔科夫树的轮廓波去噪方法 (Contourlet-HMT)<sup>[11]</sup> 以及基于剪切波的阈值方法 (Shearlet-ST)<sup>[13]</sup> 进行比较.

需要指出的是, 文献 [13] 的实验采用了非下采样剪切波变换 (Non-subsampled shearlet transform, NSST). 与标准剪切波变换 (也称为下采样剪切波变换) 相比, 采用 NSST 能大幅提高算法的去噪性能, 这与小波、轮廓波的情形类似. 然而, NSST 去噪性能的提高是以牺牲算法的时间效率为代价的,



而且 NSST 过大的计算量限制了它在实际应用中的使用. 但为了公平地比较各去噪算法的性能, 本文除了采用标准剪切波变换实现了 Shearlet-ST、本文方法 1 和方法 2 外, 也采用 NSST 实现了这三种去噪算法, 这样保证了与文献 [13] 具有相同的实现, 从而能够对算法进行公平的比较. 为便于区分, 算法名称后加后缀“-NSST”表示算法实现是基于非下采样剪切波变换的, 而无后缀则表示算法采用标准剪切波变换来实现. 此外为了简化实验, 本文固定三变量去噪模型的参数  $\beta$  为 1.7; 同时方法 2 采用固定迭代次数的方式, 其迭代次数为 5.

图 3 (见第 1068 页) 给出了各种去噪算法对含噪图像 Lena 的去噪结果 (噪声水平为  $\sigma_n = 30$ ); 图 4 (见上页) 给出了对含噪图像 Barbara 的局部去噪结果 (噪声水平为  $\sigma_n = 30$ ). 不难看出, 本文所提的两种方法不仅具有良好的视觉效果, 而

且较好地保持了图像中的纹理; 而利用 Curvelet-KS、Contourlet-HMT 和 Shearlet-ST 方法去噪后的图像中, 伪吉布斯现象较为明显, 视觉效果相对较差 (见图 4(b)~4(f)). 从图 4(g)~4(i) 所示的去噪结果可看出, 采用 NSST 能够进一步提高去噪图像的视觉效果. 表 2 和表 3 分别给出了不同噪声水平下, 各去噪算法对图像 Lena、Barbara 以及 Boat 去噪后 PSNR 与 MSSIM 两种定量指标的比较. 从表 2 中可以看出, 在采用标准剪切波变换的情况下, 本文的两种方法较 Curvelet-KS、Contourlet-HMT 和 Shearlet-ST 的去噪性能有明显提高. 而在采用 NSST 的情况下, 本文的两种方法则会大幅提高去噪图像的 PSNR 和 MSSIM, 其去噪性能远好于 Curvelet-KS 和 Contourlet-HMT, 同时也好于 Shearlet-ST-NSST.

总体来说, 本文方法 2 的整体去噪性能略优于

表 2 各方法去噪后图像 PSNR 的比较 (dB)

Table 2 Performance comparison for denoising methods in terms of PSNR (dB)

	Lena			Barbara			Boat		
	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$
含噪图像	28.17	22.13	18.62	28.17	22.14	18.62	28.17	22.14	18.62
Curvelet-KS	33.82	31.13	29.38	29.17	25.45	24.44	31.18	28.81	27.41
Contourlet-HMT	33.53	30.45	28.21	30.88	26.53	25.22	31.40	28.53	27.16
Shearlet-ST	33.56	30.89	28.48	31.14	26.91	24.38	31.74	28.44	26.73
本文方法 1	34.64	31.64	29.77	31.87	27.71	25.58	32.49	29.50	27.92
本文方法 2	34.66	31.70	29.81	31.88	27.72	25.62	32.51	29.56	27.89
Shearlet-ST-NSST	35.39	32.47	30.53	32.78	29.65	27.75	32.93	29.98	28.52
本文方法 1-NSST	35.53	32.71	30.84	33.11	30.04	28.07	33.37	30.27	28.90
本文方法 2-NSST	35.56	32.78	30.92	33.13	30.07	28.15	33.42	30.31	28.96

表 3 各方法去噪后图像 MSSIM 的比较

Table 3 Performance comparison for denoising methods in terms of MSSIM

	Lena			Barbara			Boat		
	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$	$\sigma = 10$	$\sigma = 20$	$\sigma = 30$
含噪图像	0.5635	0.3395	0.2330	0.7030	0.4943	0.3675	0.6078	0.3990	0.2888
Curvelet-KS	0.8614	0.7919	0.7185	0.8392	0.7263	0.6586	0.8223	0.7540	0.6723
Contourlet-HMT	0.8476	0.7453	0.6556	0.8576	0.7486	0.6782	0.8136	0.7127	0.6446
Shearlet-ST	0.8503	0.7686	0.6866	0.8490	0.7343	0.6378	0.8264	0.7072	0.6165
本文方法 1	0.8753	0.7931	0.7117	0.8742	0.7714	0.6834	0.8468	0.7551	0.6771
本文方法 2	0.8786	0.7992	0.7133	0.8742	0.7717	0.6841	0.8470	0.7558	0.6773
Shearlet-ST-NSST	0.8931	0.8203	0.7428	0.8879	0.8277	0.7726	0.8561	0.7705	0.7039
本文方法 1-NSST	0.8958	0.8272	0.7596	0.8946	0.8372	0.7830	0.8653	0.7813	0.7261
本文方法 2-NSST	0.8967	0.8291	0.7613	0.8952	0.8380	0.7842	0.8660	0.7850	0.7286

方法 1, 但这是以牺牲一定运行时间为代价的. 在对去噪算法的实时性要求较高的情况下, 方法 1 是较为合适的选择; 相反, 若对实时性要求不高, 则选择方法 2 能获得较好的去噪性能, 特别是采用 NSST 能进一步提高其去噪效果.

噪声水平的估计精度决定着算法的去噪效果, 估计值  $\hat{\sigma}_n$  越接近真实值  $\sigma_n$ , 算法的去噪性能越好. 为验证用蒙特卡洛方法所得估计值  $\hat{\sigma}_n$  的精度, 本文对含不同强度噪声的测试图像, 用蒙特卡洛方法分别得到其噪声水平的估计值  $\hat{\sigma}_n$ , 然后比较  $\hat{\sigma}_n$  与真实值  $\sigma_n$  的差别. 图 5 给出了对不同测试图像所得  $\hat{\sigma}_n$  的平均值与  $\sigma_n$  的关系曲线, 从图 5 中可以看出, 由蒙特卡洛方法所得的  $\hat{\sigma}_n$  能够较为准确地反映真实噪声水平. 为了研究参数  $\beta$  对算法去噪性能的影响, 在参数  $\beta$  取不同值时, 利用本文方法 1 对含噪测试图像 ( $\sigma_n = 20$ ) 进行去噪处理, 然后分析去噪后 PSNR 以及 MSSIM 的变化情况. 图 6(a) 和 6(b) 分别给出了参数  $\beta$  与 PSNR 以及  $\beta$  与 MSSIM 的关系曲线. 综合 PSNR 和 MSSIM 的变化情况可以看出, 参数  $\beta$  在  $[1.5, 2.5]$  的范围内取值时, 算法具有较好的去噪性能.

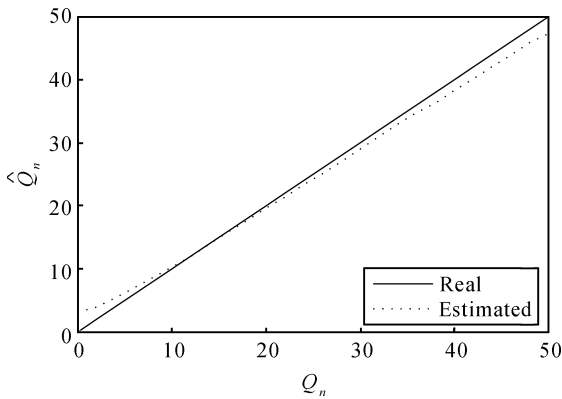
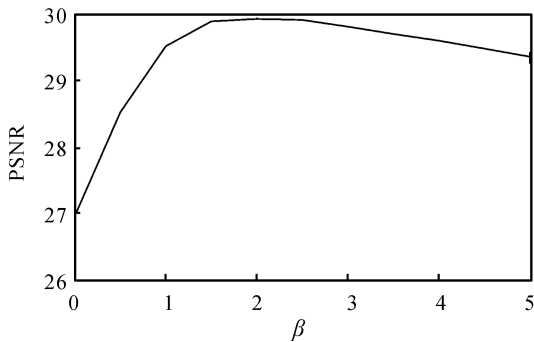


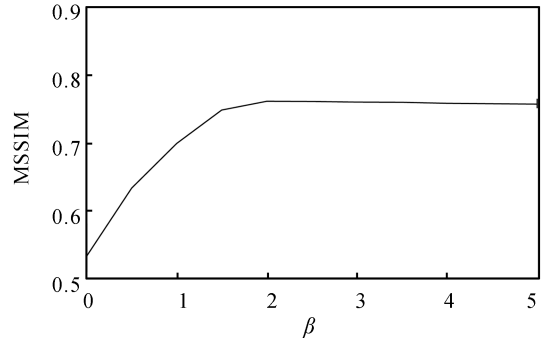
图 5 噪声水平的估计精度

Fig. 5 The accuracy of the noise level estimation



(a) 参数  $\beta$  对 PSNR 的影响

(a) The influences of the parameter  $\beta$  on PSNR



(b) 参数  $\beta$  对 MSSIM 的影响

(b) The influences of the parameter  $\beta$  on MSSIM

图 6 参数  $\beta$  对算法性能的影响

Fig. 6 The influences of the parameter  $\beta$  on denoising performance

### 6 结论

本文首先分析了剪切波系数间的依赖关系, 利用系数间的依赖, 建立了三变量去噪模型, 在此基础上推出了两种去噪方法. 方法 1 具有闭式表达式, 运行时间较短, 去噪性能较好; 方法 2 是一种迭代算法, 与其他方法相比, 该方法运行时间较长, 但去噪效果最好. 仿真实验从视觉质量、PSNR 以及 MSSIM 三个方面验证了本文两种方法的有效性. 此外, 邻域内的剪切波系数也能为含噪系数的估计提供有用信息, 如何利用邻域系数将本文三变量模型推广到更高维的多元模型是需要进一步研究的问题.

### 致谢

本文关于剪切波系数间互信息的计算使用了荷兰格罗宁根大学 R. Moddemeijer 提供的软件包, 实验对比部分使用了美国加州理工学院 E. J. Candès 提供的 CurveLab 软件包以及伊利诺伊大学厄巴纳—香槟分校 D. D. Y. Po 提供的 ContourletHMT 软件包, 在此表示感谢.

### References

- 1 Chang S, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, **9**(9): 1522–1531
- 2 Shi F, Selesnick I W. An elliptically contoured exponential mixture model for wavelet based image denoising. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2007, **23**(1): 131–151
- 3 Donoho D L. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, **41**(3): 613–627
- 4 Sendur L, Selesnick I W. Bivariate shrinkage function for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(11): 2744–2756

- 5 Candès E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of object with piecewise  $C^2$  singularities. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, **57**(2): 219–266
- 6 Candès E J, Demanet L, Donoho D L, Ying L. Fast discrete curvelet transforms. *Multiscale Modeling and Simulation*, 2006, **5**(3): 861–899
- 7 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, **14**(12): 2091–2106
- 8 Jiao Li-Cheng, Hou Biao, Wang Shuang, Liu Fang. *Image Multiscale Geometric Analysis: Theory and Applications — Beyond Wavelets*. Xi'an: Xidian University Press, 2008. 9–17  
(焦李成, 侯彪, 王爽, 刘芳. 图像多尺度几何分析理论与应用 — 后小波分析理论与应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008. 9–17)
- 9 Starck J L, Candès E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2002, **11**(6): 670–684
- 10 Guo Q, Yu S. Image denoising using a multivariate shrinkage function in the curvelet domain. *IEICE Electronics Express*, 2010, **7**(3): 126–131
- 11 Po D D Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(6): 1610–1620
- 12 Guo K, Labate D. Optimally sparse multidimensional representation using shearlets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2007, **39**(1): 298–318
- 13 Easley G, Labate D, Lim W Q. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, **25**(1): 25–46
- 14 Cover T M, Thomas J A [Author], Ruan Ji-Shou, Zhang Hua [Translator]. *Elements of Information Theory*. Beijing: China Machine Press, 2008. 10–11  
(Cover T M, Thomas J A [著], 阮吉寿, 张华 [译]. 信息论基础. 北京: 机械工业出版社, 2008. 10–11)
- 15 Lansel S. DenoiseLab philosophy: a standard test set and evaluation method to compare denoising algorithm [Online], available: <http://www.stanford.edu/~slansel/DenoiseLab/>, October 15, 2009
- 16 Moddemeyer R. On estimation of entropy and mutual information of continuous distributions. *Signal Processing*, 1989, **16**(3): 233–248
- 17 Ypma T J. Historical development of the Newton-Raphson method. *SIAM Review*, 1995, **37**(4): 531–551
- 18 Cheng S. Newton's method works for convex real functions [Online], available: <http://planetmath.org/encyclopedia/NewtonsMethodWorksForConvexRealFunctions.html>, May 11, 2009
- 19 Cho D, Bui T D. Multivariate statistical modeling for image denoising using wavelet transforms. *Signal Processing: Image Communication*, 2005, **20**(1): 77–89
- 20 Wang Z, Bovik A C. Mean squared error: love it or leave it? a new look at signal fidelity measures. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2009, **26**(1): 98–117



郭强 上海大学计算机工程与科学学院博士研究生。2002 年获得山东理工大学信息与计算科学专业学士学位。2005 年获得上海大学计算机专业硕士学位。主要研究方向为图像处理, 小波分析及其应用。本文通信作者。

E-mail: guoqiang@shu.edu.cn

(GUO Qiang Ph.D. candidate at

the School of Computer Engineering and Science, Shanghai University. He received his bachelor degree in information and computational science from Shandong University of Technology in 2002, and his master degree in computer science from Shanghai University in 2005. His research interest covers image processing and wavelet analysis and its applications. Corresponding author of this paper.)



郁松年 上海大学计算机工程与科学学院教授。1990 年获得匈牙利罗兰大学计算机专业博士学位。主要研究方向为图论, 组合优化, 小波分析和机器学习。

E-mail: snyu@staff.shu.edu.cn

(YU Song-Nian Professor at the School of Computer Engineering and Science, Shanghai University. He received his Ph.D. degree in computer science from Eötvös

Loránd University, Hungary in 1990. His research interest covers graph theory, combinatorial optimization, wavelet analysis, and machine learning.)