

# 吸收媒质中非线性 Gauss 聚焦超声场的仿真研究

杜宏伟, 彭 虎, 韩雪梅, 杨晓宇, 冯焕清

(中国科学技术大学电子科学与技术系, 安徽合肥 230027)

**摘要:**通过频域有限差分法求解 KZK 方程, 对吸收媒质中 Gauss 聚焦超声换能器的基波和高次谐波声场进行计算和仿真, 研究了各次谐波沿传播方向的分布规律, 发现高次谐波声场同样具有 Gauss 聚焦特性, 并且谐波阶次越高, 聚焦特性越好. 此后讨论了不同的吸收系数对 Gauss 声场聚焦特性的影响, 结果显示吸收系数的改变不会影响 Gauss 声场的径向分布形状, 但吸收系数的增加导致聚焦区域声场强度的减弱, 甚至聚焦无法实现.

**关键词:**Gauss 聚焦波; KZK 方程; 有限差分法

**中图分类号:**R318.04 **文献标识码:**A

## Simulation study of a nonlinear focused Gaussian ultrasonic field in absorbing medium

DU Hong-wei, PENG Hu, HAN Xue-mei, YANG Xiao-yu, FENG Huan-qing

(Dept. of Electronic Science and Technology, USTC, Hefei 230027, China)

**Abstract:** The fundamental and higher-order harmonic acoustic fields of a focused Gaussian ultrasonic transducer in absorbing medium were computed and simulated by solving the KZK equation using a frequency domain finite difference method. The distribution of every harmonic component along the propagation direction was investigated. The result indicates that these harmonic fields are also focused Gaussian beams and that the focused property of the harmonic field improves with the increase of harmonic order. Variant absorption coefficient's influence on the focused property of the field was analyzed, and result shows that the variation of absorption coefficient does not influence the radial shape of the beam, but the increase of the absorption coefficient results in the attenuation of field intensity, rendering focusing an impossibility.

**Key words:** focused Gaussian beam; KZK equation; finite difference method

## 0 引言

Gauss 聚焦超声换能器被广泛应用于医学成像、强功率超声热疗、无损检测、声显微成像等领域. 目前主要采用线性模型对 Gauss 聚焦声场进行研

究<sup>[1~3]</sup>. 非线性声学的理论和实验表明, 有限振幅声波在传播过程中会产生非线性效应, 因此可以利用人体组织产生的高次谐波进行超声成像, 提高成像质量, 谐波成像<sup>[4,5]</sup>也因此成为一个研究热点. 对非线性超声场特性的研究是非线性超声成像的基础,

收稿日期: 2006-09-06; 修回日期: 2006-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(60471057), 中国科学技术大学青年科学基金(KA2100230001)资助.

作者简介: 杜宏伟, 男, 1976年生, 博士/讲师. 研究方向: 生物医学工程. E-mail: duhw@ustc.edu.cn

通讯作者: 冯焕清, 教授. E-mail: hqfeng@ustc.edu.cn

KZK 方程是目前描述非线性超声场最精确的方程<sup>[6,7]</sup>. 理论研究表明, 对于非线性 Gauss 型声场, 其基波声压在不同轴向位置上的径向分布均服从 Gauss 函数规律<sup>[8]</sup>, 而对 Gauss 聚焦声场非线性特性的研究尚不太充分. 本文采用频域有限差分方法求解 Gauss 边界条件下的 KZK 方程, 得到了 Gauss 聚焦超声换能器的基波和高次谐波声场, 并在此基础上给出了声场仿真图, 研究了各次谐波沿传播方向的分布, 分析总结了高次谐波产生、增强和衰减的规律. 在此过程中, 我们发现高次谐波声场同样具有 Gauss 聚焦特性, 并且谐波阶次越高, 波束宽度越窄, 聚焦特性越好. 这表明采用高次谐波进行成像在理论上可以获得更高的图像分辨率.

由于实际媒质都具有粘滞性, 因此在超声传播过程中会产生吸收效应, 这将影响 Gauss 聚焦声场的聚焦特性. 本文通过计算不同吸收系数下的 Gauss 聚焦声场来研究吸收系数对声场聚焦特性的影响, 结果显示, 吸收系数的改变不影响 Gauss 聚焦声场各次谐波的声束形状, 即各次谐波分量在径向上仍然保持 Gauss 分布, 但吸收系数的增加导致聚焦区域声场强度的减弱, 以至聚焦无法实现.

## 1 模型方程

非线性超声研究中采用最多的模型方程是 KZK 方程. 对于轴对称声源, 在柱坐标下的方程形式为<sup>[5~7]</sup>

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \sigma \partial \tau} = \alpha r_0 \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial \tau^3} + \frac{r_0}{2l_d} \frac{\partial^2 \bar{p}^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{4} \nabla_{\perp}^2 \bar{p} \quad (1)$$

式中,  $\bar{p} = p/P_0$  为归一化声压,  $P_0$  为声源表面峰值声压,  $p$  为绝对声压;  $\sigma = z/r_0$  是归一化的轴向坐标,  $z$  代表声束传播方向,  $r_0 = ka^2/2$  是瑞利(Rayleigh)距离,  $k$  为波数,  $a$  为声源半径;  $\tau = \omega(t - z/c)$  是归一化延迟时间,  $\omega$  为基波角频率,  $c$  为声速;  $\alpha = D\omega^2/2c^3$  是吸收系数,  $D$  为声耗散率;  $l_d = \rho_0 c^3/\beta\omega P_0$  是平面波在无损媒质中的冲击波形成距离,  $\rho_0$  是媒质静态密度,  $\beta = 1 + (B/2A)$  是媒质的非线性系数,  $B/A$  是媒质的非线性参量.  $\nabla_{\perp}^2$  是径向 Laplace 算子, 其在极坐标下的轴对称形式为  $\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$ , 其中  $\xi = r/a$  是归一化的径向坐标.

式(1)方程右端三项分别描述了超声传播过程中的吸收、非线性和衍射效应.

## 2 算法

采用频域 Fourier 分解方法进行计算<sup>[6,7]</sup>, 对轴对称的圆形超声换能器, 设

$$\begin{aligned} \bar{p}(\xi, \sigma, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_n(\xi, \sigma, \tau) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(\xi, \sigma) \sin n\tau + h_n(\xi, \sigma) \cos n\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)表明, 在任意  $(\xi, \sigma, \tau)$  处的声压都是基波声压和高次谐波声压的叠加.

把式(2)代入式(1)方程可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} &= -n^2 \alpha r_0 g_n + \frac{1}{4n} \nabla_{\perp}^2 h_n + \\ &= \frac{nr_0}{2l_d} \left[ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} (g_p g_{n-p} - h_p h_{n-p}) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=n+1}^{\infty} (g_{p-n} g_p + h_{p-n} h_p) \right] \\ \frac{\partial h_n}{\partial \sigma} &= -n^2 \alpha r_0 h_n + \frac{1}{4n} \nabla_{\perp}^2 g_n + \\ &= \frac{nr_0}{2l_d} \left[ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} (h_p g_{n-p} + g_p h_{n-p}) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=n+1}^{\infty} (h_{p-n} g_p - g_{p-n} h_p) \right] \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从式(3)可以看出, 任意第  $n$  次谐波的系数  $g_n$ ,  $h_n$  都和所有阶次的谐波有关. 在实际应用中, 求和号中的  $\infty$  应当用  $N$  取代, 表示最高次谐波为  $N$  阶, 所有阶次大于  $N$  的谐波分量均假设为零.

系数  $g_n, h_n$  的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} g_n(\xi, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau) \sin n\tau d\tau \\ h_n(\xi, 0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \tau) \cos n\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中,  $f(\xi, \tau)$  为换能器表面声压分布函数. 通过求解式(3)对偶方程组可以得到归一化基波声压  $\bar{p}_1(\xi, \sigma, \tau)$  和高次谐波声压  $\bar{p}_n(\xi, \sigma, \tau)$ , 进而得到基波、高次谐波声场  $p_1(r, z, t)$  和  $p_n(r, z, t)$ .

## 3 结果

### 3.1 KZK 方程的数值计算

采用有限差分方法求解式(3)方程组, 计算采用文献[7]中的参数: 基波频率  $f = 1$  MHz, 声源半径  $a = 25$  mm,  $c = 1\,500$  m/s,  $\beta = 3.5$ ,  $P_0 = 0.657$

MPa,  $l_d = 0.2412 \text{ m}$ .  $\alpha$  取  $0.025 \text{ Np/cm}$ , 此值介于人体血液、脂肪的吸收系数之间. 径向和轴向计算步长分别记为  $\Delta\xi$  和  $\Delta\sigma$ , 取  $\Delta\xi = 10^{-2}$ ,  $\Delta\sigma = 10^{-4}$ . 径向最大计算值取  $r_{\max} = 10\alpha = 250 \text{ mm}$ , 即认为在此径向范围之外声场能量为零. 文献[3]的实验结果已证明这一假设是合理的; 轴向最大值取  $z_{\max} = 210 \text{ mm}$ . 取  $t = 1 \text{ s}$ , 即认为声场已处于稳态. 最高次谐波阶次  $N = 10$ .

换能器表面声压分布采用文献[3]中的形式

$$f(\xi, \tau) = e^{-r^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+r^2})} \cdot e^{-j\omega t} = e^{-(a\xi)^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+(a\xi)^2})} \cdot e^{-j\tau} \quad (5)$$

式中,  $k$  为波数,  $\eta$  是声源表面声压的 Gauss 系数,  $F$  为焦点位置. 本文取  $\eta = 15 \text{ mm}$ ,  $F = 120 \text{ mm}$ . 相应地, 边界条件为

$$g_1(\xi, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(a\xi)^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+(a\xi)^2})} \cdot e^{-j\tau} \sin \tau d\tau = -j e^{-(a\xi)^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+(a\xi)^2})}, & \xi \leq 1 \\ 0, & \xi > 1 \end{cases}$$

$$h_1(\xi, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(a\xi)^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+(a\xi)^2})} \cdot e^{-j\tau} \cos \tau d\tau = e^{-(a\xi)^2/\eta^2} \cdot e^{jk(F-\sqrt{F^2+(a\xi)^2})}, & \xi \leq 1 \\ 0, & \xi > 1 \end{cases}$$

$$g_2(\xi, 0) = h_2(\xi, 0) = g_3(\xi, 0) = h_3(\xi, 0) = \dots = 0$$

图 1 是前 4 次谐波声场的仿真图. 图 2 是前 4 次谐波在轴心上的声压沿传播方向的分布曲线. 图 3 是前 4 次谐波在轴向不同位置处的声压径向分布曲线.

图 1 表明, 高次谐波声场具有类似基波声场的聚焦特性, 而且谐波阶次越高, 波束宽度越窄. 图 2 表明, 基波声压在聚焦区域达到最大值, 此后逐渐衰减; 在接近换能器表面的近场区域, 高次谐波分量很小, 此后由于非线性效应, 其幅度逐渐增强, 并在聚焦区域达到最大值, 此后由于吸收效应的存在, 谐波分量开始衰减. 图 3 表明在换能器表面只有基波分量, 高次谐波分量为 0, 此后在轴向不同位置上的高次谐波具有和基波分量相似的径向分布曲线, 但谐波阶次越高, 幅度越小.

### 3.2 吸收系数对声场聚焦特性的影响

改变吸收系数  $\alpha$  的大小, 计算前 10 次谐波的合成声场, 同时研究前 4 次谐波在聚焦位置  $z = 120 \text{ mm}$  处的声压径向分布. 分别取  $\alpha = 0.05, 0.075, 0.1$  (单位:  $\text{Np/cm}$ ) 进行计算.

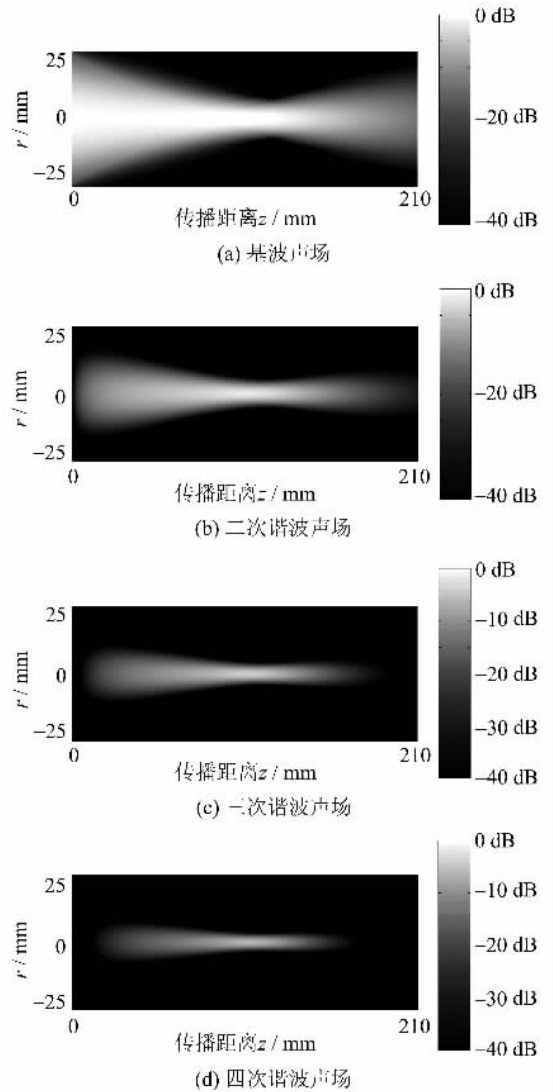


图 1 前 4 次谐波声场的仿真图

Fig. 1 Simulations of the first four harmonic fields

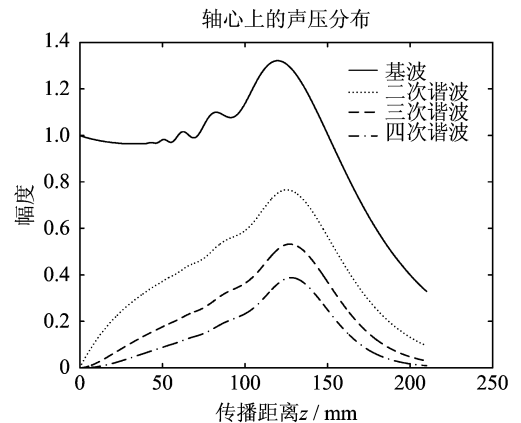


图 2 前 4 次谐波的轴心声压沿传播方向的分布曲线  
Fig. 2 Axial distributions of the first four harmonic sound pressures on center axis

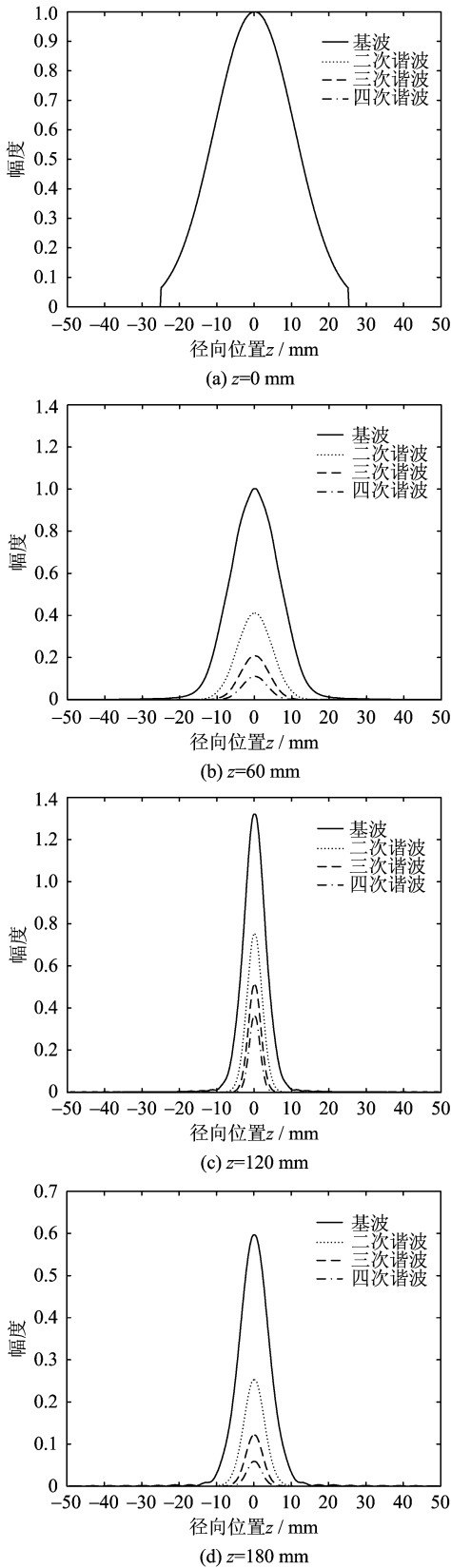


图 3 前 4 次谐波在轴向不同位置处的声压径向分布曲线  
 Fig. 3 Radial distributions of the first four harmonics on variant axial positions

图 4~6 分别是  $\alpha=0.05, 0.075, 0.1$  时的合成声场仿真图以及前 4 次谐波在聚焦位置的声压径向分布曲线. 由图可以看出, 随着吸收系数  $\alpha$  的增大, Gauss 聚焦声场的聚焦特性变差, 这表现在聚焦区域声场强度的减弱. 当  $\alpha=0.1$  时, 基波幅度衰减到换能器表面峰值声压的 1/10 以下, 高次谐波几乎完

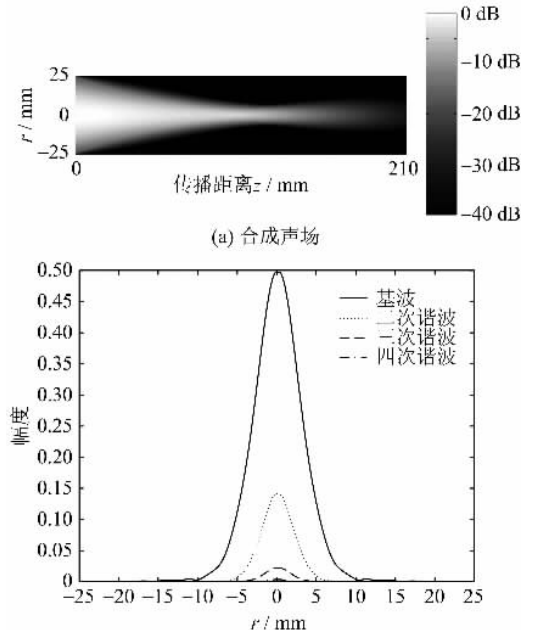


图 4  $\alpha=0.05$  时的计算结果  
 Fig. 4 Computation result while  $\alpha=0.05$

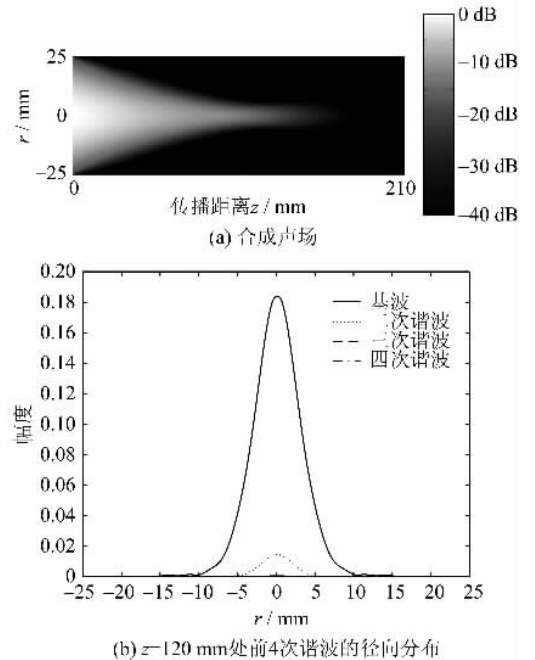
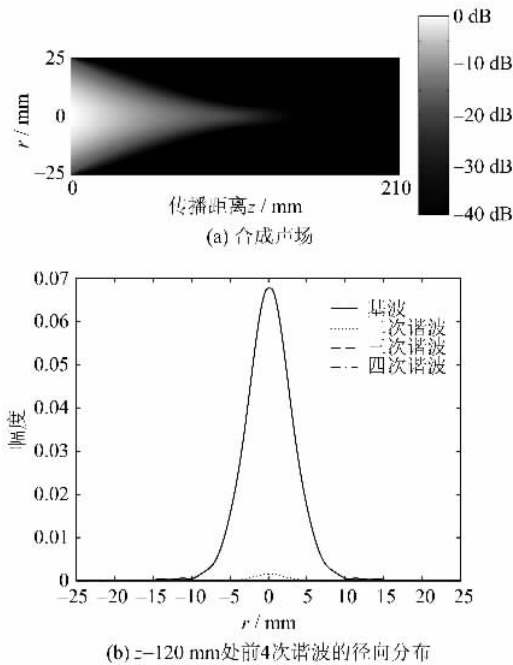


图 5  $\alpha=0.075$  时的计算结果  
 Fig. 5 Computation result while  $\alpha=0.075$

图 6  $\alpha=0.1$  时的计算结果Fig. 6 Computation result while  $\alpha=0.1$ 

全衰减,声场无法实现聚焦.从图中还可以看出,吸收系数  $\alpha$  的改变不影响基波和高次谐波在聚焦区域的声束形状,各次谐波分量在径向仍然保持 Gauss 型分布.

图 7 是  $\alpha=0.025, 0.05, 0.075, 0.1$  时合成声场轴心声压沿传播方向的分布曲线.从图中可以看出,当  $\alpha$  较小时,轴心声压在近场持续上升,在聚焦位置达到最大值,此后逐渐衰减;当  $\alpha$  较大时,声压衰减增强,轴心声压沿传播方向单调衰减,以至无法实现聚焦.

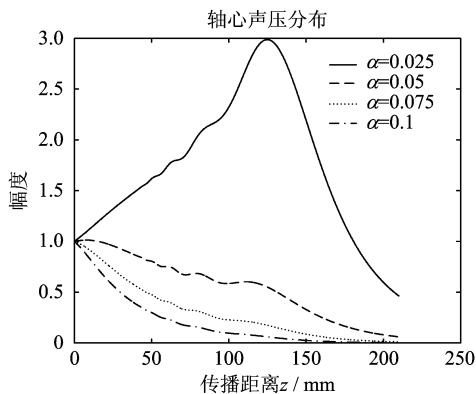


图 7 轴心声压沿传播方向的分布

Fig. 7 Distribution of the axial sound pressure along the propagation direction

## 4 结论

本文通过分析计算得到的 Gauss 聚焦声场各

次谐波的声场仿真图以及在不同轴向位置处的声压径向分布可以得出:高次谐波同样具有 Gauss 聚焦特性,并且谐波阶次越高,波束宽度越窄,聚焦特性越好;在轴向不同位置上的高次谐波具有和基波分量相似的径向分布曲线.由于基波声压在不同轴向位置上的径向分布均服从 Gauss 函数规律<sup>[8]</sup>,因此高次谐波也具有类似的径向分布规律.以上这些结论意味着采用高次谐波进行成像可以获得更高的分辨率,从而改善成像质量.

吸收系数  $\alpha$  的改变虽然不会影响基波和高次谐波的声束形状,即各次谐波分量在径向仍然保持 Gauss 型分布,但  $\alpha$  的增大会导致声场的聚焦特性变差,甚至无法实现聚焦.这表明在实际应用中要获得比较好的聚焦声场,必须充分考虑媒质吸收特性的影响,才会设计出最优的换能器.

## 参考文献 (References)

- [1] Lu J Y, Greenleaf J F. Ultrasonic nondiffracting transducer for medical imaging[J]. IEEE Transactions Ultrasonic, Ferroelectrics, Frequency Control, 1990, 37(5): 438-447.
- [2] Fox P, Holm S. Modeling of CW annular arrays using limited diffraction Bessel beams[J]. IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectrics, Frequency Control, 2002, 49(1): 85-93.
- [3] Fox D, Cheng J Q, Lu J Y. Fourier-Bessel field calculation and turning of a CW annular array[J]. IEEE Transactions Ultrasonics, Ferroelectrics, Frequency Control, 2002, 49(9): 1 179-1 190.
- [4] Burns P N, Simpson D H. Nonlinear imaging[J]. Ultrasound in Medicine & Biology, 2000, 26 (1): 19-22.
- [5] Li Y D, Zagzebski J A. Computer model for harmonic ultrasound imaging[J]. IEEE Transactions Ultrasonic, Ferroelectrics, Frequency Control, 2000, 47 (5): 1 259-1 272.
- [6] Aanonsen S, Barkve T, Tjøtta J N, et al. Distortion and harmonic generation in the near field of a finite amplitude sound beam[J]. J. Acoust. Soc. Amer., 1984, 75(3): 749-768.
- [7] Nouri-Baranger T, Closset E, Cathignol D. Numerical solution for nonlinear acoustic beam radiated from non axisymmetric plane transducers using the operator splitting method[C]//IEEE Ultrasonics Symposium. Atlanta: INSPEC, 2001, 1: 479-482.
- [8] 杜功焕,朱哲民,龚秀芬. 声学基础[M]. 南京:南京大学出版社,2001.