

## 基于 2-可加模糊测度的多准则决策方法

武建章<sup>1,2</sup>, 张 强<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 管理与经济学院, 北京 100086; 2. 石家庄经济学院 管理科学与工程学院, 石家庄 050031)

**摘 要** 针对基于模糊积分的多准则决策方法在实际应用中的两个主要问题, 从决策方案的等价值曲线角度分析了决策准则间交互性的直观表述和决策意义, 提出了一种基于菱形成对比较法确定 2-可加模糊测度的新方法, 并在理论上证明了该方法的正确性. 进而, 基于所得 2-可加模糊测度, 利用 Choquet 模糊积分对各候选方案的评价信息进行集成, 给出了一种多准则决策方法. 最后, 实例分析结果验证了该方法的操作简易性和合理性.

**关键词** 多准则决策方法; 2-可加模糊测度; Choquet 积分; 菱形成对比较法 (DPC); 交互性系数; 默比乌斯变换

## Multicriteria decision making method based on 2-order additive fuzzy measures

WU Jian-zhang<sup>1,2</sup>, ZHANG Qiang<sup>1</sup>

(1. School of Management and Economics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100086, China; 2. School of Management Science and Engineering, Shijiazhuang University of Economics, Shijiazhuang 050031, China)

**Abstract** In order to face with the two main problems of applying the fuzzy integrals based multicriteria decision making (MCDM) in real applications, this paper explains the visual representation and decision meaning of the interaction between decision criteria in terms of the equivalent curve of the decision alternatives, proposes a new algorithm to identify 2-order additive fuzzy measures based on the diamond pairwise comparisons (DPC). The correctness of the algorithm is proved. Then, with the identified 2-order additive fuzzy measures, this paper presents a method in which Choquet integral is take as an aggregation function to integrate the evaluation of the alternatives. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the practical feasibility and validity of the proposed method.

**Keywords** MCDM; 2-order additive fuzzy measures; Choquet integral; diamond pairwise comparisons (DPC); interaction index; Möbius transform

### 1 引言

1995 年, Grabisch<sup>[1]</sup> 提出把模糊积分作为一个集成算子应用于多准则决策问题中以来, 大量的文献对模糊测度与模糊积分结合解决多准则决策问题进行了深入的理论和实践的研究<sup>[2-8]</sup>. 多种模糊积分形式, 尤其是 Sugeno<sup>[9]</sup> 积分和 Choquet<sup>[10]</sup> 积分, 在实践中得到了广泛的发展和应用, 模糊测度也因其丰富的内涵和表现能力受了广大学者的青睐, 但基于模糊测度和模糊积分的多准则决策方法在实际应用时却一直面临着两个主要的问题<sup>[11]</sup>. 一是在确定模糊测度时, 当决策准则为  $n$  个时, 需要确定  $2^n$  个参数, 这种复杂性极大的限制了其实际应用能力. 二是交互作用很难解释和理解, 即决策者很难通过直观的工具或方法来确定准则间的交互任用, 难以说明决策方案优劣或等价关系与交互作用的大小之间存在着何种直接关联.

收稿日期: 2009-03-20

资助项目: 国家自然科学基金 (70471063, 70771010)

作者简介: 武建章 (1977-), 男, 讲师, 博士研究生, 主要研究方向为模糊决策与对策, 决策支持系统, E-mail: sjzwjz@gmail.com; 张强 (1955-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为不确定系统理论及应用.

为减少运算量,很多学者提出了各种模糊测度的形式和确定方法.文献[9]提出了 $\lambda$ 模糊测度,只需要确定 $n$ 个参数,但确定出的模糊测度只能表示各准则间的一类交互作用,即要么全部存在正的交互作用,要么全部存在负的交互作用,减弱了模糊测度的表示能力.文献[12]提出了 $k$ -可加模糊测度,随着 $k$ 的增加,模糊测度的参数也越多,其表现能力就越强,2-可加测度则只涉及到准则的相对重要性和2个准则间交互性,很好的解决了复杂性和表现能力之间的矛盾,在实际中得到了认可.文献[11, 13]对模糊测度及其与交互作用系数、默比乌斯变换系数三者之间转换体系进行公理化论证,并对相对重要性和交互性的表现形式进行了说明.文献[14-16]给出了在拥有决策历史数据时确定 $k$ -可加测度的一些方法.日本学者Takahagi<sup>[17]</sup>则利用 $\phi(s)$ 转换及基于交互作用的聚类分析方法来求得一般模糊测度,但运算过程较为复杂繁琐,求解过程的正确性还需进一步论证.

在交互作用的表现意义与解释方面,文献[13, 18]说明了交互作用在分类中的表现形式及Choquet积分在只有两个决策准则下的与准则相对重要性和交互作用之间的关系.文献[17]则在此基础上提出了菱形成对比较方法(Diamond pairwise comparisons, DPC),把两两决策准则间的重要性和交互作用表示在一个菱形内,对如何应用菱形成对比较方法进行一些说明和解释,具有很强的实践意义.

本文在上述文献的基础上,对菱形成对比较方法进行了深入分析,给出了准则间交互性与等价值决策方案之间的联系,提出了一种确定2-可加模糊测度的新方法,进而与Choquet积分结合构成了一种多准则决策方法.

## 2 基础知识

多准则决策问题的一般数学形式表述为:设 $X$ 为由决策准则构成的有限集合, $|X| = n$ , $Y$ 为由候选方案构成的有限集合, $|Y| = m$ .候选方案 $y_j(j = 1, 2, \dots, m)$ 在决策准则 $x_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 下评价分值用函数 $g_j: X \rightarrow [0, 1]$ 来表示,由此可得 $m$ 个候选方案在 $n$ 个决策准则下决策矩阵 $D = [g_j(x_i)]_{m \times n}$ .多准则决策问题所要解决的是如何依据决策矩阵 $D$ 对候选进行排序,进而得到最优方案.

传统的多准则决策方法常常采用算术平均、权重平均、有序加权平均等基于经典可加测度的线性算子,这些集成算子建立在准则间相互独立、互不影响、互不交叉的假设前提之上.但在现实问题中的多个决策准则间往往是相互依赖、相互关联的.为有效描述普遍存在于决策准则间交互作用,Sugeno<sup>[9]</sup>于1974年提出了模糊测度的概念.

**定义 1**<sup>[9]</sup> 设 $X$ 是一有限集合, $P(X)$ 表示 $X$ 的幂集,若集函数 $\mu: P(X) \rightarrow [0, 1]$ 满足下列条件:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$ ;
- ii)  $A \in P(X), B \in P(X), A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ ,

则称 $\mu$ 为定义在 $(X, P(X))$ 上的模糊测度.

为简化符号,本文用 $\mu_i, \mu_{ij}, \mu_K, \mu_{KL}$ 分别表示 $\mu(\{x_i\}), \mu(\{x_i, x_j\}), \mu(K), \mu(K \cup L)$ .

模糊测度以较弱的单调性约束取代的经典测度中的可加性约束,非可加性是模糊测度的主要特征.当 $|X| = n$ 时,经典测度拥有 $n$ 个参数,而模糊测度则利用 $2^n$ 个参数来描述集合 $X$ 中元素间的相互关系.这使得模糊测度在具有了极强的柔性描述能力的同时,也极大的增加了其在实际应用中确定测度值的复杂性.为解决这一问题,Grabisch<sup>[12]</sup>从伪布尔函数及默比乌斯变换出发,提出了 $k$ -可加模糊测度,在模糊测度的复杂性和表示能力方面作了折中.

**定义 2** 称实值函数 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow R$ 为伪布尔函数,其中 $\{0, 1\}^n$ 表示所有 $n$ 维布尔向量的全体.

文献[11]指出模糊测度是一种特殊的伪布尔函数,即模糊测度可以通过如下默比乌斯变换表示成伪布尔函数的形式:若设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,对 $\forall A \in P(X)$ ,

$$\mu_A = \sum_{T \in P(X)} [a_T \prod_{x_i \in T} \beta_i] \quad (1)$$

其中, $a_T = \sum_{K \subset T} (-1)^{|T \setminus K|} \mu_K$ ,称为默比乌斯变换系数. $\beta_i$ 为布尔变量, $\beta_i = 1 \Leftrightarrow x_i \in A$ .当 $T = \{x_i\}$ 时, $a_T$ 简记为 $a_i$ .当 $T = \{x_i, x_j\}$ 时, $a_T$ 简记为 $a_{ij}$ .

**定义 3** 称定义在 $(X, P(X))$ 上的模糊测度 $\mu$ 为 $k$ -可加模糊测度,如果其对应的伪布尔函数是一个 $k$ 次线性多项式,即,对 $\forall T \in P(X)$ ,若 $|T| > k$ ,有 $a_T = 0$ ;并且 $\exists T_0 \in P(X), |T_0| = k$ ,使得 $a_{T_0} \neq 0$ .

显然, 对于 2-可加测度,  $\forall A \in P(X)$ , 有

$$\mu_A = \sum_{i=1}^n a_i \beta_i + \sum_{\{x_i, x_j\} \subset X} a_{ij} \beta_i \beta_j, \quad \text{其中 } \beta_i = 1 \Leftrightarrow x_i \in A \quad (2)$$

由定义 1 可知: 在  $(X, P(X))$  上, 如果  $|X| = n$ , 则确定一般模糊测度需要  $2^n$  个参数, 即  $X$  的任何一个子集的模糊测度值都需要给出. 但, 对于  $k$ -可加测度, 当  $k < n$  时, 需要确定的参数个数为  $\sum_{j=1}^k \binom{n}{j} < 2^n$ . 比如, 当  $k = 1$  时, 就是经典的可加测度, 只需要确定  $n$  个参数. 当  $k = 2$  时, 2-可加测度需要确定  $[n(n+1)]/2$  个参数. 2-可加测度在解决了算法的复杂性同时很好的保证了测度的精确性, 因此在实际中有广泛的应用.

在多准则决策领域中, 模糊测度可以细致描述决策准则间的相对重要性和交互作用.

**定义 4**<sup>[11]</sup> 设  $\mu$  为定义在  $(X, P(X))$  上的模糊测度, 称

$$I_T = \sum_{k=0}^{n-|T|} \xi_k^{|T|} \sum_{K \subset X \setminus T, |K|=k} \sum_{L \subset T} (-1)^{|T|-|L|} \mu_{KL}, \quad \text{其中 } \xi_k^p = \frac{(n-k-p)!k!}{(n-p+1)!} \quad (3)$$

为  $X$  的任一子集  $T$  的交互指标.

特别地, 当  $T = \{x_i\}$  时,  $I_T$  称为元素  $x_i$  的 Shapley 值, 即元素的相对重要性, 记为  $I_i$ . 且由式 (3) 易得  $\sum_{i=1}^n I_i = \mu(X) = 1$ . 当  $T = \{x_i, x_j\}$  时,  $I_T$  称为元素  $x_i$  和元素  $x_j$  的交互指标值, 记为  $I_{ij}$ .

**定理 1** 设  $\mu$  为定义在  $(X, P(X))$  上的模糊测度. 则当  $|X| = 2$  时, 有  $u_1 = I_1 - \frac{1}{2}I_{12}$ ,  $u_2 = I_2 - \frac{1}{2}I_{12}$ .

**证明** 由定义 4 得  $I_1 = \frac{1}{2}(1 + \mu_1 - \mu_2)$ ,  $I_2 = \frac{1}{2}(1 + \mu_2 - \mu_1)$ ,  $I_{12} = 1 - \mu_1 - \mu_2$ . 故  $u_1 = I_1 - \frac{1}{2}I_{12}$ ,  $u_2 = I_2 - \frac{1}{2}I_{12}$ .

由模糊测度的定义可知,  $0 \leq u_1 \leq 1$ ,  $0 \leq u_2 \leq 1$ , 故由定理 1 可得交互指标值  $I_1, I_2, I_{12}$  间存在如下关系.

**推论 1** 当  $|X| = 2$  时, 有  $-\min(I_1, I_2) \leq \frac{1}{2}I_{12} \leq \min(I_1, I_2)$ .

**定理 2**<sup>[11]</sup> 设  $X$  为有限集,  $\mu$  为定义在  $(X, P(X))$  上的模糊测度. 则  $\mu$  对应的默比乌斯变换系数  $a$  与交互指标  $I$  之间的具有如下关系:

$$I_T = \sum_{k=0}^{n-|T|} \frac{1}{k+1} \sum_{K \subset X \setminus T, |K|=k} a_{(T \cup K)}, \quad \forall T \subset X \quad (4)$$

显然, 对于 2-可加测度, 默比乌斯变换系数  $a$  与交互指标  $I$  之间有如下关系成立.

**推论 2** 对于 2-可加测度有:  $a_i = I_i - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in X \setminus x_i} I_{ij}$ ,  $a_{ij} = I_{ij}$ , 且当  $|T| > 2$  时,  $a_T = I_T = 0$ .

**定理 3** 设  $a$  为有限集合  $X$  上的默比乌斯变换,  $a_T$  唯一确定一个 2 可加模糊测度, 当且仅当:

i)  $a_\emptyset = 0$ ,  $\sum_{A \in P(X)} a_A = 1$ ;

ii) 对于  $\forall A \in P(X)$ , 有  $\sum_{x_i \in T, T \subset A} a_T \geq 0$ ;

iii) 若  $|T| > 2$ , 有  $a_T = 0$ , 并且  $\exists T_0 \in P(X)$ ,  $|T_0| = 2$ , 使得  $a_{T_0} \neq 0$ .

可以证明, 定理 3 中条件 i)、ii) 与定义 1 中条件 i)、ii) 等价, 即分别保证了模糊测度的边界性条件和单调性条件, 具体证明过程可参见文献 [19]. 定理 3 中条件 iii) 为使模糊测度满足 2-可加性.

基于模糊测度的 Choquet 积分作为一种非线性集成算子, 广泛用于决策准则间存在交互作用或关联性的多准则决策问题中<sup>[2]</sup>.

**定义 5** 设  $\mu$  为定义在  $(X, P(X))$  上的模糊测度,  $g$  是定义在  $X$  上的实值可测函数, 则  $g$  关于  $\mu$  的 Choquet 积分定义为

$$(c) \int g d\mu = \int_{-\infty}^0 [\mu(G_\alpha) - \mu_X] d\alpha + \int_0^\infty \mu(G_\alpha) d\alpha,$$

其中,  $G_\alpha = \{x | g(x) \geq \alpha\}$ ,  $\alpha \in (-\infty, \infty)$ .

Choquet 积分是 Lebesgue 积分的严格推广, 当模糊测度可加时, Choquet 积分能够还原成 Lebesgue 积分.

当  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为有限集合时, Choquet 积分值为

$$(c) \int g d\mu = \sum_{i=1}^n (g(x_{(i)}) - g(x_{(i-1)})) \mu(A_{(i)}) \quad (5)$$

其中,  $x_{(i)}$  表示对集合  $X$  中元素按其对应的函数  $g$  取值进行重新排序后的第  $i$  个元素, 即有  $0 \leq g(x_{(1)}) \leq g(x_{(2)}) \leq \dots \leq g(x_{(n)})$ ,  $g(x_{(0)}) = 0$ ,  $A_{(i)} = \{x_{(i)}, \dots, x_{(n)}\}$ .

### 3 菱形成对比较法与交互作用直观描述

如果决策准则集合只有两个元素, 则 2-可加模糊测度就等同于一般模糊测度, 元素间的 Shapley 值 ( $I_1, I_2$ ) 和交互作用  $I_{12}$  很容易的直观表示出来. Grabisch 在文献 [18] 中用菱形图 (如图 1 所示) 来描述 Choquet 积分与  $I_1, I_2, I_{12}, g(x_1), g(x_2)$  之间的联系. 由交互系数之间的内在关系及 Choquet 积分的定义, 可以推出在图 1(a) 所示的坐标系下, Choquet 积分值可表示为图 1(a) 所示的菱形及边界 [18].

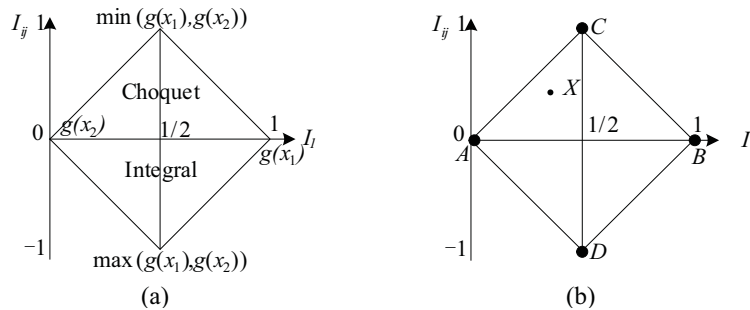


图 1 Choquet 积分菱形图与菱形成对比较方法 (DPC)

Takahagi 则在文献 [17] 中基于菱形图进一步提出了菱形成对比较方法, 帮助决策直观地确定两个决策准则  $x_i, x_j (1 \leq i, j \leq n)$  之间相互重要性  $I_i, I_j$  及交互系数  $I_{ij}$  的取值, 如图 1(b) 所示. 在图 1(b) 中, 横轴表示  $I_i$  取值,  $I_j$  可以由等式  $I_j = 1 - I_i$  得到, 纵轴表示准则  $x_i$  和  $x_j$  之间的交互系数  $I_{ij}$ . 决策者在图 1(b) 中的菱形  $ABCD$  内确定一点就可以唯一描述两个准则之间的相对重要程度及交互系数.

例如, 点  $X(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  表示  $I_i = \frac{1}{3}, I_j = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, I_{ij} = \frac{1}{2}$ .

利用菱形成对比较方法确定决策准则间的相互重要性与传统的 AHP 方法一样, 是决策者比较熟悉的. 但决策准则间的交互系数的确定直观意义从图 1(b) 很难向决策者进行说明. 下面结合图 2 来说明交互系数的取值所体现出的决策方案的等价值曲线之间的关系.

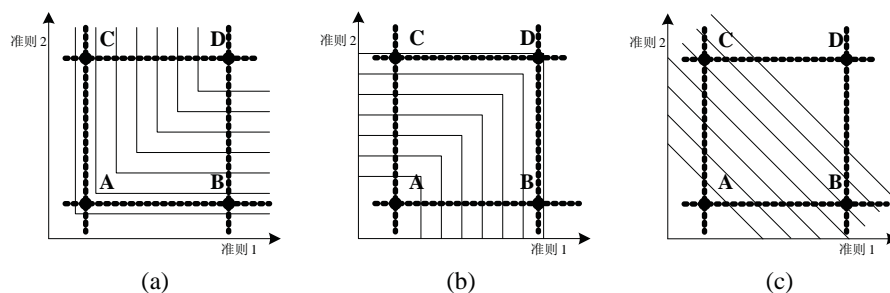


图 2 三种不同类型交互作用的直观体现

现考虑两个决策准则 1、2, 四个候选方案 A、B、C、D 的情况. 假设两个决策准则之间的重要性是一样的, 即  $I_1 = I_2 = 0.5$ , 四个方案在决策准则下取值大小关系如图 2 所示. 图 2(a)、(b)、(c) 分别表示三种典型的评价结果: 在图 2(a) 情形下, 决策者认为 A、B、C 是等价的劣方案, D 是最优方案; 在图 2(b) 情形下, 决策者认为 A 是最劣方案, B、C、D 是等价的最优方案; 在图 2(c) 情形下, 决策者认为 A 是最劣方案、B、C 是等价的次劣方案, D 是最优方案. 由此可得, 三种情形下的等价值曲线, 由图 2(a)、(b)、(c) 中实线所示. 在情形 (a) 下, 两个决策准则之间存在正交互作用 ( $I_{12} = 1$ ), 即单个决策准则的重要性相对于两个决策准则的总体重要性来说很小, 单个指标所确定的方案间的优劣顺序不起任何作用, 只有两个指标联合才能做出正确的评价, 称决策准则之间是互补的关系. 在情形 (b) 下, 两个决策准则之间存在负交互作用 ( $I_{12} = -1$ ), 即单个决策准则的重要性相对于两个决策准则联合后的总体重要性几乎是一样的, 两个决策准则的联合几乎不带

来方案间优劣排序的任何变动, 称决策准则之间是冗余的, 或替代的关系. 在情形 (c) 下, 两个决策准则之间不存在交互作用 ( $I_{12} = 0$ ), 即单个决策准则的重要性之和等于两个决策准则的总体重要, 称决策准则之间是独立的关系. 需要说明的是, 以上论述等价值曲线都是以 Choquet 积分作为决策集成算子的情况下等价候选方案构成的.

当两准则相对权重一样时, 两个决策准则的交互作用取值分别为  $-1$  到  $1$  之间几个离散值时, 决策方案间的等价值曲线由图 3 所示.

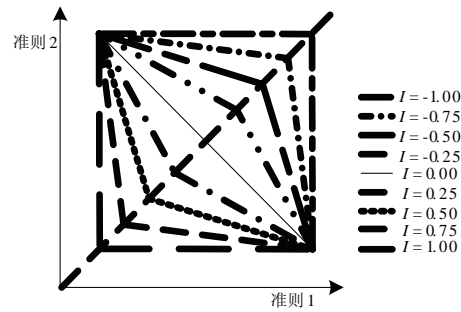


图 3 交互系数与决策方案的等价值曲线之间的对应关系

#### 4 基于菱形成对比较方法的 2-可加模糊测度确定方法

基于菱形成对比较方法的 2-可加模糊测度确定方法 (以下简称为算法 \*) 的具体步骤如下:

**步骤 1** 利用菱形成对比较方法对决策准则集  $X$  中  $n$  个决策准则进行成对比较, 得各决策准则两两之间的重要性系数矩阵

$$P = [I_i^{ij}]_{n \times n}, \quad 0 \leq I_i^{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

其中,  $I_i^{ij}$  表示对决策准则  $x_i, x_j$  进行两两比较时决策准则  $x_i$  的相互重要性. 显然,  $I_i^{ij} = I_i^{ji}, I_i^{ii} = 1$ .

同时, 可以得到交互作用系数矩阵

$$Q = [I_{ij}]_{n \times n}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \neq j \quad (7)$$

**步骤 2** 由重要系数矩阵  $P$  求得相对重要性矩阵

$$C = [c_{ij}]_{n \times n}, \quad \text{其中 } c_{ij} = I_i^{ij} / I_j^{ij} \quad (8)$$

**步骤 3** 利用最大特征向量法求得各决策准则  $x_i$  的相对重要性系数向量  $I^* = (I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*)$ . 根据  $I^*$  对矩阵  $Q$  进行变换, 得决策准则  $x_i, x_j$  间新的交互系数矩阵  $Q^* = [I_{ij}^*]_{n \times n}$ , 其中

$$I_{ij}^* = \text{sgn}(I_{ij}) \min \left( \left| \frac{I_i^* I_{ij}}{(n-1)I_i^{ij}} \right|, \left| \frac{I_j^* I_{ij}}{(n-1)I_j^{ij}} \right| \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \neq j \quad (9)$$

显然,  $I_{ij}^* = I_{ji}^*$ .

**步骤 4** 当  $|T| > 2$  或  $T = \emptyset$  时, 令  $I_T^* = 0$ . 利用推论 2 可由交互指标值得所有默比乌斯变换系数  $a_T$ ,  $T$  为决策准则集  $X$  的任一子集.

**步骤 5** 利用模糊测度与默比乌斯变换系数的对应关系, 即式 (2), 得决策准则集  $X$  的任一子集的模糊测度.

下面证明算法 \* 所求得的模糊测度为 2-可加模糊测度. 首先给出以下引理.

**引理 1** 对任意的  $T \in P(X)$ , 由算法 \* 确定的交互指标满足如下不等式:

$$I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in T^c} I_{ij}^* + \frac{1}{2} \sum_{x_j \in T \setminus x_i} I_{ij}^* \geq 0, \quad \text{其中 } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } i \neq j \quad (10)$$

**证明** 由推论 1 可得  $-\min(I_i^{ij}, I_j^{ij}) \leq \frac{1}{2} I_{ij} \leq \min(I_i^{ij}, I_j^{ij})$ , 则有

$$-\frac{I_i^* \min(I_i^{ij}, I_j^{ij})}{(n-1)I_i^{ij}} \leq \frac{I_i^* I_{ij}}{2(n-1)I_i^{ij}} \leq \frac{I_i^* \min(I_i^{ij}, I_j^{ij})}{(n-1)I_i^{ij}},$$

即

$$-\frac{I_i^* I_i^{ij}}{(n-1)I_i^{ij}} \leq \frac{I_i^* I_{ij}}{2(n-1)I_i^{ij}} \leq \frac{I_i^* I_i^{ij}}{(n-1)I_i^{ij}},$$

故  $-\frac{I_i^*}{(n-1)} \leq \frac{I_i^* I_{ij}}{2(n-1)I_i^{ij}} \leq \frac{I_i^*}{(n-1)}$ . 代入式 (9) 可得

$$-\frac{I_i^*}{(n-1)} \leq \frac{1}{2} I_{ij}^* \leq \frac{I_i^*}{(n-1)} \quad (11)$$

故, 对任意的  $T \in P(X)$ , 有

$$-\frac{(n-1)I_i^*}{n-1} \leq -\frac{1}{2} \sum_{x_j \in T^C} I_{ij}^* + \frac{1}{2} \sum_{x_j \in T \setminus x_i} I_{ij}^* \leq \frac{(n-1)I_i^*}{n-1},$$

即

$$I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in T^C} I_{ij}^* + \frac{1}{2} \sum_{x_j \in T \setminus x_i} I_{ij}^* \geq 0.$$

要证明算法 \* 所求得的模糊测度为 2-可加模糊测度, 只需证明所确定的默比乌斯变换系数  $a_T$  满足定理 3 的要求即可.

**定理 4** 由算法 \* 确定的模糊测度为 2-可加模糊测度.

**证明** 由推论 2 可得,  $a_i = I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in X \setminus x_i} I_{ij}^*$ ,  $a_{ij} = I_{ij}^*$ , 且当  $|T| > 2$  时,  $a_T = I_T^* = 0$ . 下面证明算法 \* 所确定的默比乌斯变换系数  $a_T$  满足定理 3 所要求的三个条件.

i) 显然  $a_\emptyset = 0$ . 另,

$$\begin{aligned} \sum_{A \in P(X)} a_A &= \sum_{x_i \in X} a_i + \sum_{\{x_i, x_j\} \in X} a_{ij} = \sum_{x_i \in X} \left( I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in X \setminus x_i} I_{ij}^* \right) + \sum_{\{x_i, x_j\} \in X} I_{ij}^* \\ &= \sum_{x_i \in X} I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X \setminus x_i} I_{ij}^* + \sum_{\{x_i, x_j\} \in X} I_{ij}^* = \sum_{x_i \in X} I_i^* = 1. \end{aligned}$$

ii) 对于  $\forall A \in P(X)$ , 有

$$\sum_{x_i \in T, T \subset A} a_T = a_i + \sum_{x_j \in A \setminus x_i} a_{ij} = I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in X \setminus x_i} I_{ij}^* + \sum_{x_j \in A \setminus x_i} I_{ij}^* = I_i^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in A^C} I_{ij}^* + \frac{1}{2} \sum_{x_j \in A \setminus x_i} I_{ij}^*.$$

由引理 1 式 (10) 可得,  $\sum_{x_i \in T, T \subset A} a_T \geq 0$ .

iii) 显然, 若  $|T| > 2$ , 有  $a_T = 0$ . 并且, 因为决策准则间存在交互性, 一定存在  $x_{i_0}, x_{j_0} \in X$ , 使得  $I_{i_0 j_0}^* \neq 0$ , 进而  $a_{i_0 j_0} \neq 0$ .

故由定理 3 可得, 算法 \* 可以唯一确定一个 2-可加模糊测度.

## 5 算例分析

考虑从 4 家供应商  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  中评价出最佳供应商, 决策准则集为  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , 其中,  $x_1$  为产品质量,  $x_2$  产品价格及物流费用,  $x_3$  生产的柔性,  $x_4$  响应时间,  $x_5$  行业地位及信誉.

假设该多准则决策问题的决策矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.54 & 0.56 & 0.72 & 0.84 \\ 0.94 & 0.83 & 0.78 & 0.51 & 0.87 \\ 0.70 & 0.84 & 0.45 & 0.62 & 0.78 \\ 0.47 & 0.62 & 0.50 & 0.55 & 0.53 \end{bmatrix} \quad (12)$$

**步骤 1** 利用菱形成对比较方法对决策准则进行两两比较, 得重要性系数矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.6527 & 0.5150 & 0.7164 & 0.5811 \\ 0.3473 & 1 & 0.3945 & 0.4527 & 0.3612 \\ 0.4850 & 0.6055 & 1 & 0.5940 & 0.5213 \\ 0.2836 & 0.5473 & 0.4060 & 1 & 0.5725 \\ 0.4189 & 0.6388 & 0.4787 & 0.4275 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

及交互性系数矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} - & +0.4012 & +0.2300 & +0.1402 & +0.1231 \\ +0.4012 & - & +0.3215 & +0.1534 & +0.3241 \\ +0.2300 & +0.3215 & - & +0.2458 & -0.0745 \\ +0.1402 & +0.1534 & +0.2458 & - & -0.1752 \\ +0.1231 & +0.3241 & -0.0745 & -0.1752 & - \end{bmatrix} \quad (14)$$

**步骤 2** 根据式 (8) 及矩阵  $P$  可得决策准则的相对重要性矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1.8794 & 1.0619 & 2.5261 & 1.3872 \\ 0.5321 & 1 & 0.6515 & 0.8272 & 0.5654 \\ 0.9417 & 1.5349 & 1 & 1.4631 & 1.0890 \\ 0.3959 & 1.2090 & 0.683 & 1 & 1.3392 \\ 0.7209 & 1.7685 & 0.9183 & 0.7467 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

**步骤 3** 矩阵  $C$  的最大特征向量为  $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5)^T = (0.2863, 0.1329, 0.2255, 0.1664, 0.1889)^T$ , 即各决策准则  $x_i$  的相对重要性系数分别为:  $I_1^* = 0.2863, I_2^* = 0.1329, I_3^* = 0.2255, I_4^* = 0.1664, I_5^* = 0.1889$ .

利用式 (9) 对矩阵  $Q$  进行变换, 比如,

$$I_{12}^* = \text{sgn}(I_{12}) \min \left( \left| \frac{I_1^* I_{12}}{(n-1)I_1^{12}} \right|, \left| \frac{I_2^* I_{12}}{(n-1)I_2^{12}} \right| \right) \\ = \min \left( \left| \frac{0.2863 \times 0.4012}{(5-1) \times 0.6527} \right|, \left| \frac{0.1329 \times 0.4012}{(5-1) \times 0.3473} \right| \right) = 0.0384.$$

求得新的交互系数矩阵

$$Q^* = \begin{bmatrix} - & 0.0384 & 0.0267 & 0.0140 & 0.0139 \\ 0.0384 & - & 0.0271 & 0.0113 & 0.0240 \\ 0.0267 & 0.0271 & - & 0.0233 & -0.0073 \\ 0.0140 & 0.0113 & 0.0233 & - & -0.0127 \\ 0.0139 & 0.0240 & -0.0073 & -0.0127 & - \end{bmatrix} \quad (16)$$

**步骤 4** 当  $|T| > 2$  或  $T = \emptyset$  时, 令  $I_T^* = 0$ . 由推论 2 可由矩阵  $Q^*$  求得所有默比乌斯变换系数  $a_T$ .

例如,  $a_1 = I_1^* - \frac{1}{2} \sum_{x_j \in X \setminus x_1} I_{1j}^* = 0.2863 - \frac{1}{2}(0.0384 + 0.0267 + 0.0140 + 0.0139) = 0.2398$ .

表 1 列出了最终确定出的默比乌斯变换系数  $a_T$ .

表 1 默比乌斯变换系数取值表

系数	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$a_{25}$	$a_{34}$	$a_{35}$	$a_{45}$
取值	0.2398	0.0825	0.1906	0.1485	0.1800	0.0384	0.0267	0.0140	0.0139	0.0271	0.0113	0.0240	0.0233	-0.0073	-0.0127

**步骤 5** 由模糊测度与默比乌斯变换系数的对应关系, 即式 (2), 可得决策准则集  $X$  的任一子集的模糊测度值, 见表 2.

表 2 模糊测度的取值结果

$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$
$\emptyset$	0	{1,4}	0.4023	{1,2,3}	0.6051	{2,4,5}	0.4335
{1}	0.2398	{1,5}	0.4337	{1,2,4}	0.5345	{3,4,5}	0.5223
{2}	0.0825	{2,3}	0.3002	{1,2,5}	0.5786	{1,2,3,4}	0.8022
{3}	0.1906	{2,4}	0.2423	{1,3,4}	0.6429	{1,2,3,5}	0.8157
{4}	0.1485	{2,5}	0.2865	{1,3,5}	0.6437	{1, 2,4,5}	0.7396
{5}	0.1800	{3,4}	0.3624	{1,4,5}	0.5834	{1, 3,4,5}	0.8280
{1,2}	0.3607	{3,5}	0.3633	{2,3,4}	0.4833	{2, 3,4,5}	0.6672
{1,3}	0.4571	{4,5}	0.3157	{2,3,5}	0.4969	{1,2, 3,4,5}	1

**步骤 6** 依据表 2 中的数据, 利用 Choquet 积分融合决策矩阵, 得 4 家供应商最终评价结果

$$E_1 = (c) \int g_1 d\mu = [0.54 \times \mu_X] + [(0.56 - 0.54) \times \mu_{1345}] + [(0.72 - 0.56) \times \mu_{145}] \\ + [(0.84 - 0.72) \times \mu_{15}] + [(0.91 - 0.84) \times \mu_1] = 0.7187, \\ E_2 = (c) \int g_2 d\mu = 0.7851, \quad E_3 = (c) \int g_3 d\mu = 0.6383, \quad E_4 = (c) \int g_4 d\mu = 0.51.$$

故,  $y_2 \succ y_1 \succ y_3 \succ y_4$ , 第 2 家供应商为最优选择.

如果基于本例给出的重要性矩阵 (式 (13)) 及交互性矩阵 (式 (14)) 的数据, 利用 Takahagi 在 2008 年提出的方法求得的模糊测度如表 3 所示, 具体计算过程可参见文献 [17].

表 3 文献 [17] 中提出的算法确定的模糊测度值

$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$	$A$	$\mu_A$
$\emptyset$	0	{1,4}	0.3615	{1,2,3}	0.6162	{2,4,5}	0.4057
{1}	0.1942	{1,5}	0.3828	{1,2,4}	0.4959	{3,4,5}	0.4703
{2}	0.0977	{2,3}	0.2562	{1,2,5}	0.5192	{1,2,3,4}	0.8361
{3}	0.1493	{2,4}	0.2519	{1,3,4}	0.6366	{1,2,3,5}	0.8645
{4}	0.1412	{2,5}	0.2716	{1,3,5}	0.6621	{1, 2,4,5}	0.6784
{5}	0.1592	{3,4}	0.3097	{1,4,5}	0.5281	{1, 3,4,5}	0.8357
{1,2}	0.3127	{3,5}	0.3303	{2,3,4}	0.4318	{2, 3,4,5}	0.6067
{1,3}	0.4368	{4,5}	0.3217	{2,3,5}	0.4542	{1,2, 3,4,5}	1.0005

依据表 3 中的给出的模糊测度值, 利用 Choquet 积分融合决策矩阵 (式 (12)), 可得评价结果为:  $E'_1 = 0.69$ ,  $E'_2 = 0.80$ ,  $E'_3 = 0.60$ ,  $E'_4 = 0.51$ , 故有  $y_2 \succ y_1 \succ y_3 \succ y_4$ , 第 2 家供应商为最优选择.

可见两种方法评价结果一致.

下面对由两种方法得到模糊测度值进行直观对比, 如图 4 所示.

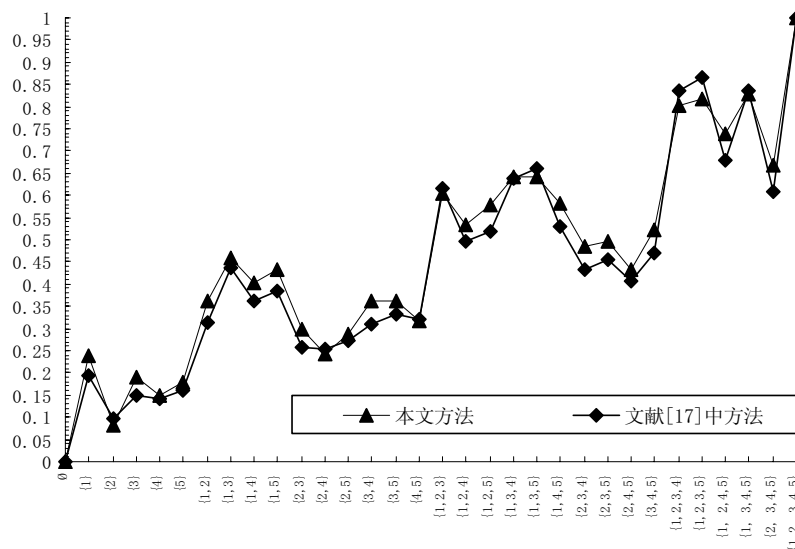


图 4 表 2 与表 3 确定的模糊测度值对比图

可以看出, 两种方法确定的模糊测度有一定的差异. 除计算方法的不同外, 2-可加模糊测度与一般模糊测度定义的不同也是导致差异存在的原因. 但本文提出的算法与文献 [17] 提出的方法相比, 计算量要小得多, 体现了 2-可加模糊测度在保证融合结果准确度的同时, 提高了决策过程的简易性和可操作性.

## 6 结论

在解决多准则决策问题时, 模糊测度能很好的体现普遍存在于决策准则之间的交互作用, 但由于模糊测度确定算法的复杂性及交互作用难以直观解释和理解, 使得其应用能力受到极大的限制. 针对这两个问题, 本文基于菱形成对比较方法, 利用决策方案等价值曲线对交互作用进行解释, 提出了一种确定 2-可加模糊测度的新方法, 将之与 Choquet 模糊积分相结合, 构建了一种新的多准则决策方法, 并对方法的正确性进行了理论上论证. 此方法可以有效地帮助决策者对决策准则间的交互性进行较为准确、直观的描述和确定. 通过实例对比可以看出, 两种方法确定的最终方案排序结果完全相同, 但本文提出的方法在简单性、准确性上有一定的优势. 需要指出的是, 在由菱形成对比较方法得出的交互系数转换成最终的交互系数时, 本文只是选择一种较为保守的转换策略, 是否能找到更多有效、简单的转换方法, 将是后续研究的方向.

## 参考文献

- [1] Grabisch M. Fuzzy integral in multicriteria decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 69(3): 279-298.



- [2] Grabisch M. The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 89(3): 445–456.
- [3] Yu R C, Tzeng G H. A soft computing method for multi-criteria decision making with dependence and feedback[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 180(1): 63–75.
- [4] Yeong M K, Chee K K, Sung G H. Fuzzy based state assessment for reinforced concrete building structures[J]. *Engineering Structures*, 2006, 28(9): 1286–1297.
- [5] Kojadinovic I. An axiomatic approach to the measurement of the amount of interaction among criteria or players[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 152(3): 417–435.
- [6] Kojadinovic I. A weight-based approach to the measurement of the interaction among criteria in the framework of aggregation by the bipolar Choquet integral[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 179(2): 498–517.
- [7] Yang J L, Chiu H N, Tzeng G H, et al. Vendor selection by integrated fuzzy MCDM techniques with independent and interdependent relationships[J]. *Information Sciences*, 2008, 78(21): 4166–4183.
- [8] Shieh J I, Wu H H, Liu H C. Applying a complexity-based Choquet integral to evaluate students' performance[J]. *Expert Systems with Applications*, 2009, 36(3): 5100–5106.
- [9] Sugeno M. *Theory of fuzzy integral and its applications*[D]. Tokyo: Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [10] Choquet G. *Theory of capacities*[J]. *Annales de L'institut Fourier*, 1953, 5: 131–295.
- [11] Grabisch M. *k*-order additive discrete fuzzy measures and their representation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, 92(2): 167–189.
- [12] Grabisch M. *k*-order additive fuzzy measure[C]// *Proceedings of Sixth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based System*, New York: IEEE, 1996: 1345–1350.
- [13] Grabisch M. The representation of importance and interaction of features by fuzzy measures[J]. *Pattern Recognition Letters*, 1996, 17(6): 567–575.
- [14] Grabisch M. A new algorithm for identifying fuzzy measures and its application to pattern recognition [C]// *The International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the Second International Fuzzy Engineering Symposium*, New York: IEEE, 1995: 145–150.
- [15] 王熙照. 模糊测度和模糊积分在分类技术中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.  
Wang X Z. *Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals and Their Applications to Classification*[M]. Beijing: China Science Press, 2008.
- [16] Yeung D, Wang X Z. Handling interaction in fuzzy production rule reasoning[J]. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 2004, 34(5): 1979–1987.
- [17] Takahagi E. A fuzzy measure identification method by diamond pairwise comparisons and  $\phi(s)$  transformation[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2008, 7(3): 219–232.
- [18] Grabisch M. A graphical interpretation of the Choquet integral[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 627–631.
- [19] Chateauneuf A, Jaffray J Y. Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Möbius inversion[J]. *Mathematical Social Sciences*, 1989, 17(3): 263–283.