

基于小波分解和残差 GM(1, 1)-AR 的非平稳时间序列预测

张 华, 任若恩

(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100191)

摘 要 提出基于二进正交小波变换和残差 GM(1,1)-AR 方法的非平稳时间序列预测方案. 首先利用 Mallat 算法对非平稳时间序列进行分解和重构, 分离出非平稳时间序列中的低频信息和高频信息; 然后对高频信息构建自回归模型, 对低频信息则用灰色残差模型进行拟合; 最后将各模型的预测结果进行叠加, 从而得到原始序列的预测值. 该方法不仅能充分拟合低频信息, 而且可避免对高频信息的过拟合. 实验结果表明, 这种方法比传统的非平稳时间序列预测方法具有更高的预测精度.

关键词 小波分解; 非平稳时间序列; 残差 GM(1,1) 模型; 自回归; 预测

Non-stationary time series prediction based on wavelet decomposition and remanet GM (1, 1)-AR

ZHANG Hua, REN Ruo-en

(School of Economics & Management, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract A non-stationary time series prediction method based on wavelet transform and remanet GM(1,1)-AR was proposed. By wavelet decomposition and reconstruction, the non-stationary time series were decomposed into a low frequency signal and several high frequency signals. The high frequency signals were predicted with auto-regression models, and the low frequency was predicted with remanet GM(1,1). The prediction result of the original time series was the superimposition of the respective prediction. This new method avoids the over-fitted for high frequency signals, and adequately fits the low signal of the non-stationary time series, so better predicting performance can be obtained. Experiments show the novel method is of higher accuracy in comparison with the traditional ones.

Keywords wavelet decomposition; non-stationary time series; remanet GM(1, 1) model; auto-regression; prediction

1 引言

时间序列是动力系统演化过程的外在表现, 也是动力系统分析和控制的基础. 在实际问题中, 时间序列几乎都是非平稳和非线性的, 尽管无法知道那些系统变量如何相互作用来支配系统的演化, 但可以肯定的是系统变量具有不同的时频特性. 对于动力学系统而言, 建立良好的系统模型非常重要, 它不仅具有重要的理论意义, 而且具有广阔的应用前景.

目前, 国内外学者从不同途径对动力学系统的辨识与预测进行研究, 统计分析是比较常用的辨识与预测方法. 在传统的统计学中, 各种方法和结论只有样本趋向无穷大时, 其性能才有理论上的保证, 而在众多工程实际中, 样本数目常是有限的, 甚至样本数很少, 这导致很多传统的统计分析方法难以取得理想的效果. 而灰色系统是建立系统运行趋势模型的有效方法, 适用于动态预测, 且只需少量已知信息就可建立预测模型^[1-3].

收稿日期: 2009-01-12

资助项目: 国家自然科学基金创新研究群体科学基金 (70821061)

作者简介: 张华 (1978-), 女, 山东聊城人, 博士研究生, 主要研究领域: 智能金融, 时间序列预测; 任若恩 (1948-), 男, 北京人, 教授, 博士生导师, 主要研究领域: 宏观经济分析, 国际竞争力研究, 国际收入与产出比较, 国际生产率比较, 经济计量学, 商业银行的信用风险管理计量方法.

对于均值具有趋向性的非平稳时间序列预测, 除了模型的选择外, 关键取决于如何提取时间序列中的低频和高频成分并进行建模, 以及如何避免对高频信息的过拟合. 为了解决这类非平稳时间序列的预测问题, 考虑到二进正交小波分解对非平稳性时间序列的适应性^[4], 对低频的分离作用及 GM(1,1) 较好的应用能力, 本文提出一种基于小波分解和残差 GM(1,1)-AR 的非平稳时间序列预测方法, 采用二进小波变换提取原始序列中的高频信息和低频信息, 对高频信息和低频信息分别建模, 在充分拟合低频信息的同时, 避免对高频信息的过拟合, 从而提高了非平稳时间序列的预测精度.

2 预测原理及方法

2.1 二进正交小波变换的 Mallat 算法

Mallat 从空间概念方面形象地说明了多分辨分析特性, 并给出了信号分解不同频率通道的算法及重构算法^[5].

2.1.1 分解算法

若将 c_0 理解为待分解的离散信号, 则根据分解算法有:

$$c_{j+1} = Hc_j, d_{j+1} = Gd_j, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (1)$$

其中 H 和 G 分别为低通滤波器和高通滤波器; c_{j+1} 和 d_{j+1} 分别为原始信号在分辨率 $2^{-(j+1)}$ 下的低频信号和高频信号, 是原始信号在相邻不同频率段上的成分; J 表示最大的分解层数. 最终将待分解信号 c_0 分解为 d_1, d_2, \dots, d_J 和 c_J .

该分解算法利用二抽取, 使每层分解比分解前的信号数据长度减半, 而总输出数据长度与输入数据 c_0 长度保持一致. 信号个数的减少对预测是不利的, 但经 Mallat 算法分解后的信号可采用重构算法进行二插值重构.

2.1.2 重构算法

$$C_j = H^*C_{j+1} + G^*D_{j+1}, \quad j = J-1, J-2, \dots, 0 \quad (2)$$

其中, H^* 和 G^* 分别是 H 和 G 的对偶算子, 采用式 (2) 对小波分解后的信号进行重构可以增加信号个数. 对 d_1, d_2, \dots, d_J 和 c_J 分别进行重构, 得到 D_1, D_2, \dots, D_J 和 C_J , 有

$$X = D_1 + D_2 + \dots + D_J + C_J \quad (3)$$

其中, $D_1: \{d_{11}, d_{12}, \dots\}, \dots, D_J: \{d_{J1}, d_{J2}, \dots\}$ 为第 1 层至第 J 层的高频信号重构; $C_J: \{c_{J1}, c_{J2}, \dots\}$ 为第 J 层低频信号重构. 在 Mallat 重构算法中利用二插值, 即在输入数据序列每相邻数据之间补一个零, 以使数据长度增加一倍, 从而恢复二抽取前的数据长度.

2.2 灰色动态预测 GM(1,1) 残差模型

灰色系统的建模思想是直接时间序列转化为微分方程, 从而建立抽象的状态发展变化动态模型 (Grey dynamic model, GM)^[6].

时间序列常用一阶灰色模型 GM(1,1) 为

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt} + aX^{(1)}(t) = b \quad (4)$$

其中, 待识别参数 a 和 b 由下式决定:

$$\hat{a} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (5)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)) & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $x^{(1)}(k)$ 为原始数据 $x^{(0)}(i)$ 的累加值, 即 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$. 解微分方程 (4) 得时间响应函数为:

$$x^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a} \quad (6)$$

将式 (6) 离散化可得相应的预测模型为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (7)$$

由此, 可得原始数据的预测模型为:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (8)$$

用 GM(1,1) 方法建立的模型 (7) 其预测精度往往达不到要求, 为提高模型的精度, 可对残差序列 $q^{(0)}(k) = \{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)\}$ 再建立 GM(1, 1) 模型, 但模型 (7) 只适用于残差序列为非负数据列, 而大多数残差序列都是有正有负, 应当先对数据进行处理^[7-8]. 残差按正负划分, 得到新的残差序列 $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}$, 对新的残差序列分别建立 GM(1, 1) 模型, 则改进后的预测模型为^[9]:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-ak} + \frac{b}{a} - \delta(k-i_1) \left(q_1^{(0)}(1) - \frac{b_1}{a_1}\right) e^{-a_1k} + \frac{b_1}{a_1} + \delta(k-i_2) \left(q_2^{(0)}(1) - \frac{b_2}{a_2}\right) e^{-a_2k} + \frac{b_2}{a_2} \quad (9)$$

其中: 当 $k > i$ 时, $\delta(k-i) = 1$; 当 $k < i$ 时, $\delta(k-i) = 0$, 对由 (9) 式预测得到的数据按 (8) 式作累减还原可得到原始数据 $X^{(0)}$ 的预测值 $\hat{X}^{(0)}$.

2.3 基于 Mallat 算法的残差 GM(1,1)-AR 预测方法

该方法首先利用 Mallat 算法, 对非平稳时间序列进行分解与重构; 然后对低频和低频信息分别建模, 而原始序列的预测结果为低频和低频预测结果的叠加. 预测框架如图 1 所示

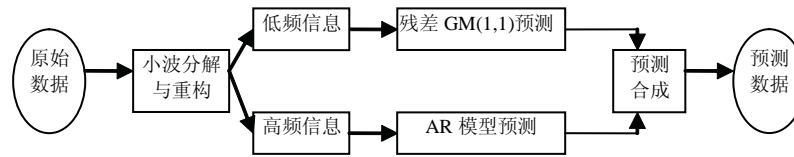


图 1 基于 Mallat 算法的残差 GM(1,1)-AR 预测框架

令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 为具有趋向性的非平稳时间序列, 对其进行二进小波分解, 并对分解后的各层时间序列分别进行重构, 得到:

$$X = D_1 + D_2 + \dots + D_J + C_J \quad (10)$$

其中, $D_1 \{d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1,N}\}$, $D_2 \{d_{2,1}, d_{2,2}, \dots, d_{2,N}\}$, \dots , $D_J \{d_{J,1}, d_{J,2}, \dots, d_{J,N}\}$ 为第 1, 2, \dots , J 层高频信号的重构; $C_J \{c_{J,1}, c_{J,2}, \dots, c_{J,N}\}$ 为第 J 层低频信号的重构. 有:

$$x_k = d_{1,k} + d_{2,k} + \dots + d_{J,k} + c_{J,k}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (11)$$

若已知 $\{t_i | i \leq M\}$ 时刻的 x_i 值, 要预测 k 步以后的状态值, 则需要求解 \hat{x}_{M+k} , 即

$$\hat{x}_{M+k} = \hat{d}_{1,M+k} + \hat{d}_{2,M+k} + \dots + \hat{d}_{J,M+k} + \hat{c}_{J,M+k} \quad (12)$$

由于 D_1, D_2, \dots, D_J 可近似看作平稳时间序列, 可分别建立 $AR(p)$ 模型, 并对 $\hat{d}_{1,M+k}, \hat{d}_{2,M+k}, \dots, \hat{d}_{J,M+k}$ 进行预测. 其步骤如下:

- 1) 对 D_j 建立 $AR(p)$ 模型, 并利用已知的 $d_{j,i}$ 对模型进行参数估计, 其中 $1 \leq j \leq J, i \leq M$;
- 2) 对上述所建模型进行适用性检验;
- 3) 依据检验后合适的 $AR(p)$ 对 $d_{j,M+k}$ 进行预测, 得到 $d_{j,M+k}$ 的预测值 $\hat{d}_{j,M+k}$.

由于低频信号 C_J 表示长期趋势, 且具有非线性, 可采用残差 GM(1,1) 方法对其进行建模和预测. 根据上述残差 GM(1,1) 原理, 其预测模型的基本步骤如下:

- 1) 对低频序列 $C_J^{(0)}(i), (i = 1, 2, \dots, N)$ 作一阶累加生成序列 $C_J^{(1)}(i)$;
- 2) 由 $C_J^{(1)}(i)$ 作紧邻均值生成 B 和 Y , 求解参数 \hat{a} ;
- 3) 建立灰色 GM(1,1) 模型;
- 4) 按照 (7) 式求解灰色预测动态微分方程得到 $C_J^{(1)}(i)$ 的预测值 $\hat{C}_J^{(1)}(i)$;
- 5) 按照 (8) 式还原序列 $C_J^{(0)}(i), (i = 1, 2, \dots, N)$ 的预测值 $\hat{C}_J^{(0)}(i)$; 如果预测精度达不到要求, 可对残差序列按照上述介绍的方法再建立 GM(1,1) 模型;

最后将各个预测结果进行叠加, 便得到原始时间序列的预测结果.

3 预测实例

人均 GDP 是具有趋向性的非平稳时间序列, 也是用于比较和判别预测方法的典型数据, 如图 2 所示. 采用人均 GDP 来验证该预测算法, 并将其与单纯的 GM(1,1) 模型、ARIMA 模型预测结果进行比较. 预测验证前, 首先采用 db4 小波对原始序列进行 1 层分解与重构, 然后使用残差 GM(1,1)-AR 进行预测. 为了评价模型的预测性能, 采用预测相对误差 (Relative error) 和平均相对误差 (Mean relative error) 为性能指标.

3.1 人均 GDP 预测

人均 GDP 原始序列及 1 层分解的结果如图 2 所示. 其中建模样本 15 点, 1986-2000 年的中国人均 GDP; 测试样本 7 点, 2001-2007 年的人均 GDP. 分别采用基于小波变换的残差 GM(1,1)-AR 模型、GM(1,1) 模型和 ARIMA 模型进行预测, ARIMA 模型的阶数通过反复实验, 从中选取预测性能最好的模型来确定^[10-11]. 三种方法的预测效果如图 3, 可以看出本文提出的方法要明显优于单独使用 GM(1,1) 预测和单独使用 ARIMA (3,2,1) 进行预测的效果.

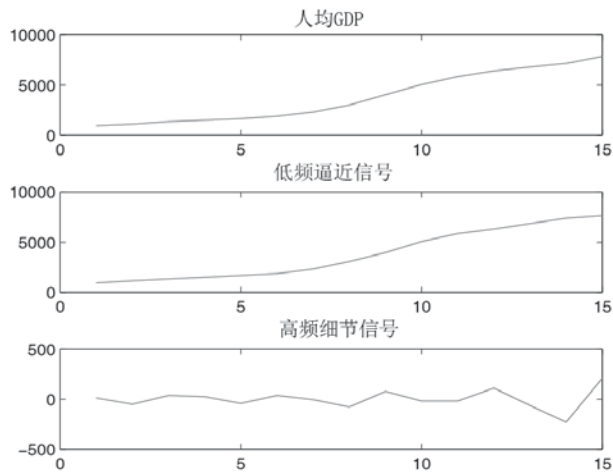


图 2 人均 GDP 原始序列及 1 层小波分解

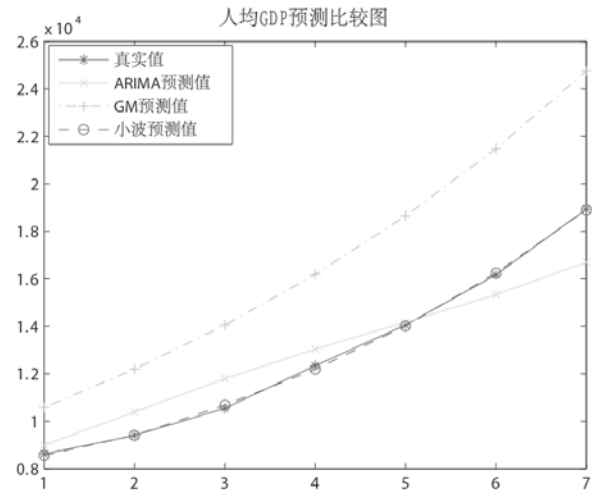


图 3 三种方法预测效果比较图

表 1 不同方法的预测值及相对误差比较

年份	实际值/元	小波变换 GM-AR		GM(1,1)		ARIMA (3,2,1)	
		预测值/元	相对误差	预测值/元	相对误差	预测值/元	相对误差
2001	8622	8557	0.0076	10583	-0.2275	8987	-0.0423
2002	9398	9403	-0.0005	12193	-0.2974	10384	-0.1049
2003	10542	10677	-0.0128	14047	-0.3325	11785	-0.1179
2004	12336	12190	0.0119	16184	-0.3119	13036	-0.0567
2005	14053	14015	0.0027	18645	-0.3268	14165	-0.0080
2006	16165	16244	-0.0049	21481	-0.3288	15333	0.0515
2007	18934	18901	0.0076	24748	-0.3071	16692	0.1184
RME		0.60%		30.46%		7.14%	

从表 1 可看出: 基于小波变换的残差 GM(1,1)-AR 的预测精度优于 ARIMA (3,2,1) 和 GM(1,1) 的预测精度, 残差 GM(1,1)-AR 预测的平均相对误差只有 0.60%, 远远小于其它两种方法预测的平均相对误差.

3.2 比较分析

利用小波分析对非平稳时间序列进行分析预测, 小波的选取是小波分解的关键. 目前常用的小波有 Haar 小波、Daubechines(dbN) 小波系, Meyer 小波和 Symlets 小波等. 不同的小波在正交性、紧支撑、平滑性甚至对称性上表现出不同的特性, 对于同一信号, 采用不同的小波函数的分析效果是不同的. 根据 Daubechines 小波的正交、时频支撑、高正规性和具有 Mallat 快速算法等特点, 对非平稳时间序列的分解具有很好的特性, 因此本文采用 Daubechines 小波. 但是不同 N 值的 Daubechines 小波, 可得到不同的处理效果, 具体采

用何种 N 值, 采用预测均方根误差 (RMSE) 为性能指标. 表 2 给出了选择 Daubechines 小波系中 db1–db10 预测时得到的各均方根误差.

表 2 选取不同的 Daubechines 小波预测的均方根误差比较

小波函数	db1	db2	db3	db4	db5	db6	db7	db8	db9	db10
RMSE	2158.9	3116.9	2949.7	86.6	3263	3360.5	3344.1	2960.4	3121.5	3063.4

由表 2 可看出, $N = 4$ 时得到的均方根误差最小, 因此本文对人均 GDP 序列分解时采用的是 db4 小波.

在小波预测方法中, 还存在着分解层数如何确定的问题. 小波分解的特性是越往下分解, 信号的频率段划分得越细, 细节信号和逼近信号的光滑性和平稳性也越好, 但是由于分解过程中必然会存在计算上的误差, 分解层数越多, 误差越大, 计算上的误差会带来预测的误差, 使预测精度下降. 表 3 给出了采用 db4 小波分解预测时, 分解层数为 1–7 时所得到的均方根误差.

表 3 采用 db4 小波预测时不同分解层数预测的均方根误差比较

小波分解层数	1	2	3	4	5	6	7
RMSE	86.6	2212	311.3	2941.7	4294.2	6147.1	5304.7

由表 3 可看出, 用 db4 小波分解人均 GDP 时间序列时, 做 1 层小波分解的均方根误差最小. 通过上面的比较分析, 可以看出对时间序列进行小波分解时, 选取不同的小波函数和分解层数, 最后得到的预测精度是不一样的. 应根据序列信号的特征选择合适的小波函数和分解层数.

4 结束语

将基于灰色理论的残差 GM(1,1) 模型和小波变换应用于非平稳时间序列的预测. 首先根据趋向性非平稳时间序列固有的确定性、非线性和波动性, 采用小波变换分离出非平稳时间序列中的非线性低频趋势成分和低频波动成分; 然后利用对平稳时间序列具有较好预测能力的统计推断建模, 并结合灰色残差模型, 实现对均值具有非平稳特性的时间序列的精确预测. 结果表明, 该方法是这类非平稳时间序列的有效预测方法, 对进一步解决实际工程问题具有良好的应用前景.

参考文献

- [1] Yang J T, Zhou J. Multivariable trend analysis using grey model for machinery condition monitoring[J]. Eleventh World Congress in Mechanism and Machine Science, 2004: 2188–2191.
- [2] Wang M H. Grey-extension method for incipient fault forecasting of oil-immersed power transformer[J]. Electric Power Components and Systems, 2004, 32(10): 959–975.
- [3] Deng J L. Grey Forecasting and Decision[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press Co., Ltd, 1987.
- [4] Zhang B I, Coggins R. Multiresolution forecasting for future trading using wavelet decomposition[J]. Neural Networks, 2001, 12(4): 765–775.
- [5] 胡昌华, 李国华, 刘涛, 等. 基于 MATLAB 6.x 的系统分析与设计——小波分析 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2004.
Hu C H, Li G H, Liu T, et al. Design and Analysis of Series Based on MATLAB 6.x: Wavelet Analysis[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2004.
- [6] 邓聚龙. 灰理论基础 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002.
Deng J L. The Basis of Grey Theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002.
- [7] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 1999.
Liu S F, Guo T B, Dang Y G. Grey System Theory and Its Application[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1999.
- [8] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey System Theory and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 2004.
- [9] 李攀峰. 灰色模型及其组合模型在证券分析的应用 [D]. 成都: 电子科技大学, 2000.
Li P F. Application of grey model and combination model in security analysis[D]. Chengdu: University of Electronic and Technology, 2000.
- [10] Hamilton J. Time Series Analysis[M]. Princeton University Press, 1994.
- [11] 易丹辉. 数据分析与 Eviews 应用 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2008.
Yi D H. Data Analysis and Eviews Application[M]. Beijing: China Renmin University Press, 2008.