

# 复合材料机翼鲁棒气动弹性优化设计

肖志鹏<sup>\*1</sup>, 万志强<sup>1</sup>, 杨超<sup>1</sup>, 吕斌<sup>2</sup>

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191; 2. 西安现代控制技术研究所, 西安 710065)

**摘要:** 针对气动弹性结构, 利用遗传-敏度混合算法开展鲁棒优化设计。以大展弦比复合材料机翼的鲁棒气动弹性结构优化设计为例验证了鲁棒设计方法的适用性和有效性, 比较了鲁棒结构优化设计与传统优化设计的区别。研究表明: 在设计变量存在不确定性的情况下, 考虑鲁棒性约束优化得到的结构较传统优化结构具有更好的抗干扰性; 但鲁棒性的满足是以增加结构质量为代价的, 鲁棒性要求越高, 结构增重越明显。

**关键词:** 气动弹性; 鲁棒结构设计; 混合算法; 复合材料; 配平; 颤振

**中图分类号:** V211.47; TB330.1 **文献标志码:** A

## Robust aeroelastic optimization design of a composite wing

XIAO Zhipeng<sup>\*1</sup>, WAN Zhiqiang<sup>1</sup>, YANG Chao<sup>1</sup>, LÜ Bin<sup>2</sup>

(1. School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China; 2. Xi'an Institute of Modern Control Technology, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** Robust optimization design of aeroelastic structures was investigated by using the genetic - gradient hybrid algorithm. The method was applied to an optimization design process of a robust aeroelastic structure with the high-aspect-ratio composite wing, which demonstrates the applicability and the efficiency of the method. The difference was revealed by comparing a robust structural optimal design with a traditional optimal design. The research indicates that a structure resulting from an optimization, in which the robustness constrains are taken into account, is more anti-jamming than a structure resulting from a traditional way, when the design variables are uncertain. However, the mass increment is paid for satisfying the robustness requirement. The higher robustness the structure needs, the greater the mass increment is.

**Keywords:** aeroelasticity; robust structural design; hybrid algorithm; composites; trim; flutter

复合材料结构在设计使用时往往会受到环境变化、工艺误差等一些不确定因素的影响, 导致其性能发生一定的变化, 甚至无法满足使用要求。20 世纪 80 年代初, 日本学者 Taguchi 首先提出了鲁棒设计方法, 其本质是一种寻求合理的设计变量值, 而非消除变量的可能波动变化, 以使设计对象的性能指标对各种变量的可能波动变化不敏感的设计方法<sup>[1-2]</sup>。

目前, 鲁棒设计方法在复合材料结构设计中已经逐步得到应用, Venkataraman 等对复合材料层合板的失效问题进行了鲁棒结构设计和预测<sup>[3]</sup>, 陈建桥等研究了复合材料层合板的强度鲁棒性特征<sup>[4]</sup>, 王向阳等还对该类结构进行了可靠性优

化<sup>[5]</sup>, 张志峰等对含初始缺陷的复合材料格栅加筋圆柱壳进行了鲁棒优化设计<sup>[6]</sup>。但以上工作都是针对简单结构, 而且基本都未涉及气动弹性问题。对于真实飞机结构, 由于结构柔性很大, 气动弹性问题比较突出, 加之气动弹性问题涉及学科较多, 开展鲁棒设计具有一定的难度, 目前该方面的研究还比较少。对于复合材料在真实飞机结构中的鲁棒气动弹性优化设计, Zink 等针对主动气动弹性机翼(AAW)的机动载荷不确定性, 在一架复合材料战斗机的初步设计中, 发展了一种以应变能为依据进行鲁棒结构设计的方法<sup>[7]</sup>。不过, 目前国内还没有在该方面开展系统的研究。

遗传-敏度混合算法是一种适用于气动弹性多

学科优化分析的方法,具有全局和局部搜索能力强及优化效率高等特点。目前该算法已经在包含机翼、尾翼、全机在内的各种金属材料/复合材料飞机的气动弹性结构优化设计中得到应用<sup>[8-10]</sup>。

本文作者基于遗传-敏度混合优化算法,对气动弹性结构开展了鲁棒优化设计。以一个复合材料机翼为例,分析了当设计变量出现摄动时,结构的各种气动弹性响应,并与传统结构优化设计方法的结果进行比较,从而论证了鲁棒设计方法的适用性和有效性,以期该类复合材料结构的鲁棒气动弹性优化设计和工程运用提供指导。

## 1 理论基础

### 1.1 静气动弹性响应分析方程

$$(\mathbf{K}_{aa} - \bar{q}\mathbf{Q}_{aa})\mathbf{u}_a + \mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{u}}_a = \bar{q}\mathbf{Q}_{ax}\mathbf{u}_x + \mathbf{P}_a \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{K}_{aa}$  为结构刚度矩阵;  $\bar{q}$  为来流动压;  $\mathbf{Q}_{aa}$  为气动影响系数矩阵;  $\mathbf{u}_a$  为结构变形矢量;  $\mathbf{M}_{aa}$  为结构质量矩阵;  $\mathbf{Q}_{ax}$  为单位气动力载荷矩阵;  $\mathbf{u}_x$  为额外给定自由度向量,用以定义气动力控制面的偏转和全机的刚体运动;  $\mathbf{P}_a$  为外加载荷矢量; 下标  $a$  表示  $a$ -set 位移向量集,即分析集,下标  $x$  表示  $x$ -set 位移向量集,即“额外空气动力点”集。

按照分析时的支持自由度对方程(1)进行矩阵分解,并结合约束状态进行相应的推导和计算,可以求解出飞机在弹性状态下的稳定性导数、操纵性导数以及相应的变形和配平情况<sup>[11]</sup>。

### 1.2 颤振、发散分析方程

一般有 2 种颤振分析方法,即  $V-g$  法和  $p-k$  法。其中  $p-k$  法更适用于优化分析,并且能够提供比较接近试验的计算结果。 $p-k$  法颤振分析方程如下<sup>[12-13]</sup>:

$$\left[ \left( \frac{V}{b} \right)^2 p^2 M_{hh} + \frac{V}{b} p B_{hh} + K_{hh} - \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \mathbf{Q}_{hh}^R + \frac{p}{k} \mathbf{Q}_{hh}^I \right) \right] \mathbf{u}_h = 0 \quad (2)$$

其中:  $V$  为来流速度;  $b$  为参考半弦长;  $p$  为特征值;  $B$  为阻尼矩阵;  $k$  为简缩频率; 上标 R 表示实部; 上标 I 表示虚部; 下标  $h$  表示模态分析集,本文中选用前 10 阶弹性模态进行颤振和发散分析。

当简缩频率接近于 0 时,上述方程即可用于发散速度的计算<sup>[12]</sup>。

## 1.3 鲁棒结构优化

### 1.3.1 传统优化问题

传统优化问题可表示为<sup>[12]</sup>

$$\min F(v) \quad (3)$$

$$\text{s. t. } g_j(v) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n_c) \quad (4)$$

$$(v_i)_{\text{lower}} \leq v_i \leq (v_i)_{\text{upper}} \quad (i = 1, \dots, n_d) \quad (5)$$

其中:  $v_i$  为设计变量向量;  $n_c$  为约束个数;  $n_d$  为设计变量个数; 式(3)为目标函数; 式(4)用于定义不等式约束; 式(5)用于指定每个设计变量的上下边界。

### 1.3.2 鲁棒优化问题

鲁棒优化问题除了要按照传统优化一样,在一定设计变量变化范围之内寻求合适的设计变量值,并在满足约束条件的前提下获得目标函数的最优解;还需要保证所获得的优化结果,在设计变量及结构参数等由于不确定性而出现一定的摄动情况下,仍能满足约束条件。

对于目标函数最小化问题,鲁棒目标函数要求在满足目标函数尽可能小的情况下,同时使设计变量的摄动对于目标函数的影响尽可能小;鲁棒约束条件不仅要求优化得到的结构满足各项约束,还要求在设计变量发生摄动后,结构性能仍能满足各项约束。

本文中的鲁棒优化问题可表示为以下形式<sup>[14]</sup>:

$$\min F(v) \quad (6)$$

$$\min F_1(v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_d} \left[ \left( \frac{\partial F(v)}{\partial v_i} \right)^2 (\Delta v_i)^2 \right]} \quad (7)$$

s. t.

$$g_j(v) + \sum_{i=1}^{n_d} \left| \frac{\partial g_j(v)}{\partial v_i} \right| |\Delta v_i| \leq 0 \quad (j = 1, \dots, n_c) \quad (8)$$

$$(v_i)_{\text{lower}} + \Delta v_i \leq v_i \leq (v_i)_{\text{upper}} - \Delta v_i \quad (i = 1, \dots, n_d) \quad (9)$$

鲁棒优化问题具有双目标函数,其中式(7)为鲁棒目标函数,表征目标函数受设计变量摄动影响的程度,它是由目标函数在设计点处的一阶泰勒级数展开式来近似得到的。式中  $\partial F(v)/\partial v_i$  为目标函数对第  $i$  个设计变量的敏度;  $\Delta v_i$  为第  $i$  个设计变量的摄动量。

式(8)为鲁棒约束条件。式中左边第 2 项表征约束条件受设计变量摄动影响的程度,  $\partial g_j(v)/\partial v_i$  为第  $j$  个约束对第  $i$  个设计变量的敏度,遗传-敏度混合优化算法在敏度求解时能方便地得到以上敏度;易知,当式(8)成立时,传统优化中的约束式

(4)也成立。式(9)表示优化过程中设计变量的变化范围,其变化范围较传统优化问题更小。鲁棒优化问题中其它公式和变量的含义与传统优化问题中的一致。

鲁棒优化问题的目标函数、设计变量、约束条件以及对设计变量摄动量的处理都将在算例中详细描述,在此不再赘述。

### 1.3.3 鲁棒优化问题的适用度表示

在遗传-敏度混合优化算法中,需要将目标函数和约束条件都转化为适用度,并通过适用度来衡量群体中各个个体的优良程度<sup>[9]</sup>。

本文中定义鲁棒优化问题中个体总适用度为

$$f(v) = a_0 f_0(v) + a_r f_r(v) + \sum_{i=1}^{n_c} a_i f_{ci}(v) \quad (10)$$

其中:  $f(v)$ 为个体总适用度;  $f_0(v)$ 为目标函数提供的适用度;  $f_r(v)$ 为鲁棒目标函数提供的适用度;  $f_{ci}(v)$  ( $i=1, \dots, n_c$ )为第  $i$  个鲁棒约束条件提供的适用度;  $n_c$  为鲁棒约束个数;  $a_0$ 、 $a_r$ 、 $a_i$  ( $i=1, \dots, n_c$ )为相应的加权系数,通过加权系数来衡量各项在优化问题中的重要性。

在优化问题中,首先要求所得优化解必须满足约束条件。对于本文中的鲁棒优化问题,鲁棒约束也是首先必须满足的。为严格保证这一点并加快收敛速度,将约束的加权系数  $a_i$  ( $i=1, \dots, n_c$ ) 设置成比其它加权系数大得多。

本文中,分析当  $a_0$ 、 $a_i$  ( $i=1, \dots, n_c$ ) 固定,而  $a_r$  取不同值时,即达到不同的鲁棒性要求时,对优化结果的影响。

## 2 优化模型

### 2.1 结构有限元和气动模型

本文中采用的计算模型与文献[1]和文献[12]中的类似,为一个大展弦比复合材料机翼,该机翼采用三墙式结构,由上蒙皮、下蒙皮、前缘蒙皮、后缘蒙皮、纵墙、长桁和翼肋组成。

根据复合材料大展弦比机翼的建模准则,并考虑到复合材料机翼结构的特殊性,使用一个由 6000 多个结点和 9000 多个单元组成的三维结构有限元模型模拟整个左机翼。建模时,所有部件均采用复合材料板单元。机翼各部件使用的复合材料层合板按照下列准则进行铺设:(1)上蒙皮、下蒙皮、前缘蒙皮、后缘蒙皮、纵墙突缘、纵墙腹板和长桁均设计成从翼根向翼尖逐渐减薄;(2)所有部件均采

用由  $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$  铺层构成的对称均衡层合板;(3)在蒙皮、突缘和长桁使用的复合材料层合板中, $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$  铺层的厚度在总厚度中的比例基本按照 60%、10%、30%;(4)在纵墙腹板、翼肋使用的复合材料层合板中, $0^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$  铺层的厚度在总厚度中的比例基本按照 10%、10%、80%。

由于机翼在亚音速情况下飞行,采用亚音速偶极子网格法进行气动力计算<sup>[13]</sup>。根据大展弦比机翼气动力网格的划分原则,将机翼划分成具有不同网格密度的 6 块平板升力面。机翼的结构有限元模型和气动力模型如图 1 所示。

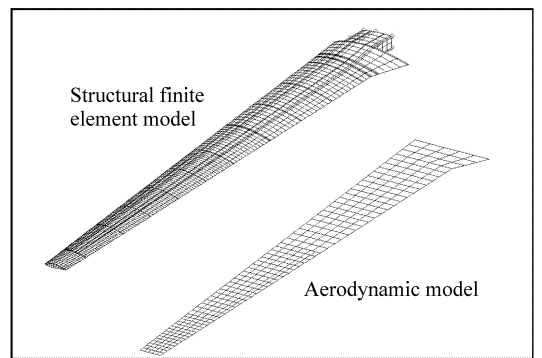


图 1 机翼的结构有限元模型和气动力模型

Fig.1 Structural finite element model and aerodynamic model of the wing

### 2.2 设计变量

为了描述机翼各部件的厚度变化,定义了 28 个铺层厚度参数,分别表示上蒙皮、下蒙皮、前缘蒙皮、后缘蒙皮、纵墙、长桁和翼肋的  $0^\circ$  铺层在外翼外侧处的厚度初始值、在外翼段沿展向单位长度的厚度增量、在中翼外段沿展向单位长度的厚度增量和在中翼内段沿展向单位长度的厚度增量,具体定义见文献[1]。各部件其它铺层的厚度初始值和单位长度厚度增量使用线性函数关系式和这些厚度参数相关联,以确保优化时各铺层厚度的比例满足前文所定义的铺层设计准则。

选取机翼模型中所有的铺层厚度参数作为设计变量,共 28 个。对于设计变量的鲁棒变化,本文中采用最坏情况进行保守设计,即假定所有的设计变量能同时发生恶化情况摄动,使得结构性能变化最大。

### 2.3 目标函数

对于气动弹性结构优化问题,目标函数一般取为结构质量最轻,本文中的目标函数也同样为结构质量最轻,而鲁棒目标函数则要求在满足结构质量

尽可能小的情况下,同时使设计变量的摄动对于结构质量的影响尽可能小。

### 2.4 约束条件

本文中要求复合材料机翼在最严重受载情况下,满足强度约束和变形约束,同时满足颤振速度和发散速度约束:(1)强度和变形约束定义为:在最严重受载情况下,机翼各部件满足强度准则,机翼翼尖的相对垂直变形  $D$  不大于 10%,翼尖扭角的绝对值  $|\delta|$  不大于  $0.5^\circ$ 。其中,翼尖变形以向上为正,翼尖扭角以前缘向上、后缘向下为正。(2)颤振速度和发散速度约束定义为:在海平面高度,机翼的颤振速度和发散速度不低于 300 m/s,用  $V_I$  表示临界速度。

## 3 计算分析

### 3.1 原始结构分析

根据目前的工艺水平,在复合材料层合板成型过程中,铺层厚度的公差在  $\pm 8\%$  以内<sup>[15]</sup>。原始结构在设计变量发生摄动前后的各项响应值如表 1 所示(这里所说的摄动后的结果是指以最坏情况摄动的结果,下同)。本文中,各种情况下的结构质量都以原始结构在设计变量发生摄动前的质量为参照,用  $m$  表示。

从表 1 可以看出,原始结构虽然在设计变量未发生摄动前能满足各项约束,但在发生摄动后其翼尖位移已经超出约束限制。

表 1 原始机翼的响应  
Table 1 Responses of original wing

Response	Constraint	Before perturbation	After perturbation
$m/\%$	—	100	93.1
$D/\%$	$\leq 10.0$	9.7	10.5
$ \delta /(\circ)$	$\leq 0.5$	0.15	0.17
$V_I/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$\geq 300$	322	306

### 3.2 优化结果分析

分别使用传统设计方法(式(3)~(5))和鲁棒设计方法(式(6)~(9))对复合材料机翼进行优化设计,设计中均采用遗传-敏度混合优化算法,每代取 100 个个体,迭代计算 15 代,交叉概率  $p_c$  为 0.7,变异概率  $p_m$  为 0.4。

对于采用鲁棒设计方法进行的结构优化,需要在式(10)中,选定个体适应度表达式中的各加权系

数。本文中取约束条件的加权系数  $a_i = 1000 (i=1, \dots, n_c)$ ,目标函数的加权系数  $a_0 = 1.0$ 。分析鲁棒目标函数的加权系数  $a_r$  分别取 1.0、2.0、3.0(即不同程度的鲁棒性要求)对优化结果的影响。

图 2 所示为各种优化情况下,每代最优个体的总适用度以及该个体在设计变量摄动前的机翼结构质量随迭代次数的变化情况。从图 2(a)可以看出,对于求解传统优化问题和鲁棒优化问题,遗传-敏度混合优化算法在全局范围具有较快的收敛速度,有的优化情况甚至在前两代就找到了全局最优解。在图 2(b)中,鲁棒优化情况的结构质量收敛曲线有时在前几代会出现振荡现象,而不是像传统优化问题那样平稳。这是因为鲁棒优化问题采用的是双目标函数的形式,需要同时综合考虑目标函数(结构质量)和鲁棒目标函数的最小化,而由于每代最优个体的目标函数值和鲁棒目标函数值不一定同时都是最小的,故出现了这种振荡现象,但最终都趋于收敛。其它响应的迭代情况具有相似的变化趋势,限于篇幅在此不详细叙述。

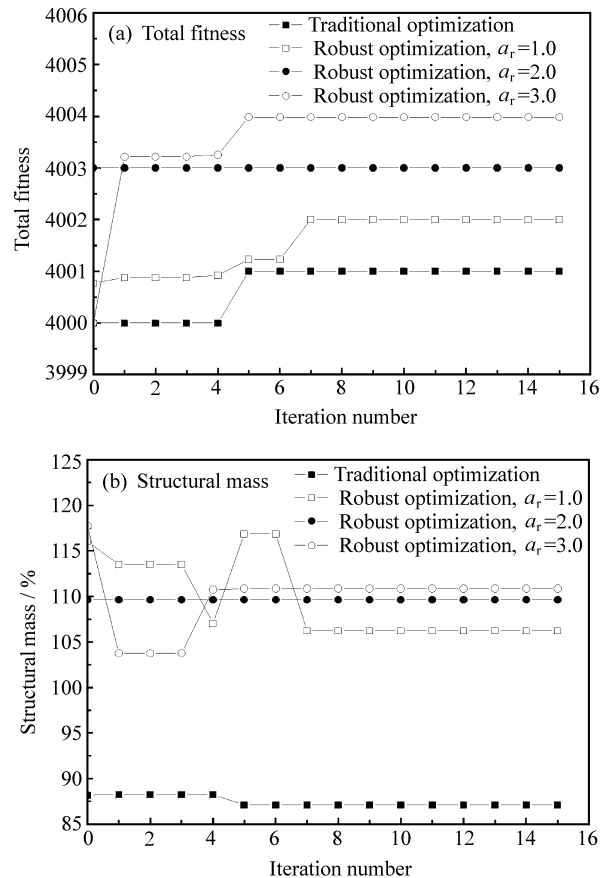


图 2 总适用度和结构质量迭代历程

Fig. 2 Iteration history of total fitness and structural mass

表 2 所示为传统优化方式得到的最终优化解在设计变量发生摄动前后的响应情况。从表 2 可以看出, 传统优化方式得到的最终优化解虽然满足各项约束, 且结构质量较原始结构大大减轻, 但在设计变量发生摄动后, 其翼尖位移和颤振速度都已不能满足约束条件。这说明采用传统优化方式获得的最优设计鲁棒性不一定很好, 开展鲁棒优化设计具有一定的必要性。

表 2 传统优化解的响应

Table 2 Responses of traditional optimal solution

Response	Constraint	Before perturbation	After perturbation
$m/\%$	—	87.1	80.6
$D/\%$	$\leq 10.0$	10.0	10.9
$ \delta /(\circ)$	$\leq 0.5$	0.333	0.371
$V_f/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$\geq 300$	300	284

表 3 所示为鲁棒优化方式下, 鲁棒目标函数加权系数取不同值时, 所得到的最终优化解在设计变量发生摄动前后的各约束响应情况。表 4 为相应的目标函数(机翼质量)的变化情况。

表 3 鲁棒优化解的约束响应

Table 3 Responses of robust optimal solution

Mass coefficient	Constraint	Before perturbation	After perturbation
$a_r=1.0$	$D/\%$	8.4	9.2
	$ \delta /(\circ)$	0.139	0.156
	$V_f/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	352	334
$a_r=2.0$	$D/\%$	8.5	9.2
	$ \delta /(\circ)$	0.083	0.097
	$V_f/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	357	335
$a_r=3.0$	$D/\%$	8.3	9.0
	$ \delta /(\circ)$	0.010	0.004
	$V_f/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	340	324

表 4 鲁棒优化解的质量变化

Table 4 Mass variation of robust optimal solution

Mass coefficient	Before perturbation $A/\%$	After perturbation $B/\%$	$\frac{B-A}{A}/\%$
$a_r=1.0$	106.2	98.0	-7.72
$a_r=2.0$	109.7	101.7	-7.29
$a_r=3.0$	110.9	103.0	-7.12

从表 3 可以看出, 3 种鲁棒设计情况都得到了满足鲁棒约束的最优解。这充分说明鲁棒设计在实际运用中的可行性。比较表 2 和表 4 可知, 鲁棒优化设计所得到的最优结果较之传统优化设计的最优结果要付出质量代价, 而且这种代价随着加权系数  $a_r$  的增加而增加; 但机翼质量在摄动前后的相对变化量(绝对值)随  $a_r$  的增加而减少, 在本文中意味着目标函数的鲁棒性增强。设计人员可以在鲁棒优化设计中根据具体需要, 通过调节  $a_r$  来考虑鲁棒性目标函数的重要性。

### 3.3 设计变量摄动范围对鲁棒优化设计的影响

当工艺水平变化时, 设计变量的摄动范围会随之变化, 从而会得到不同的鲁棒最优解。图 3 所示为设计变量的最大摄动范围分别为 4%、6% 和 8% 时, 每代最优个体在设计变量摄动前的机翼结构质量随迭代次数的变化情况, 此时对应的适应度加权系数都为  $a_0=1.0$ ,  $a_r=2.0$ 。从图 3 可以看出, 随着工艺水平的提高, 设计变量的摄动范围减小; 鲁棒设计方法能通过对设计变量的合理调整, 在满足约束的情况下使结构质量进一步减小。

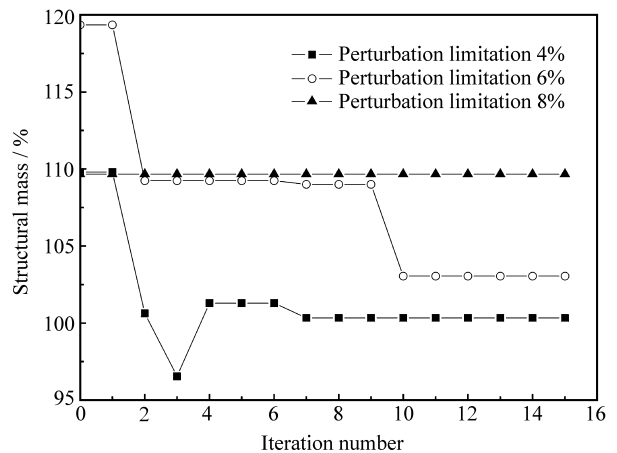


图 3 不同设计变量摄动范围情况下结构质量迭代历程

Fig. 3 Iteration history of structural mass for different perturbation limitations

### 3.4 计算效率

本文中的气动弹性鲁棒优化涉及静气动弹性响应分析、敏感度分析和颤振分析等, 采用了一个具有较多自由度的工程计算模型进行优化, 其优化过程在一台普通微机上运行, 具体配置为: Inter Core 2 双核 CPU, 2.66 G 主频, 2 G 内存, Windows XP Professional 操作系统。在这种配置下, 一次运行 25 h 左右, 且其中包含进行多次敏感度求解的时间

(每次约 0.2~0.3 h), 比传统优化问题仅多几个小时。这说明在工程中进行气动弹性鲁棒优化是可行的, 其计算耗费可以接受。

## 4 结 论

(1) 基于遗传-敏度混合优化算法, 开展了鲁棒气动弹性结构优化设计, 并通过在一个大展弦比复合材料机翼复杂结构上的实际运用, 论证了鲁棒设计方法的可行性和有效性。同时, 在复合材料结构设计中, 仍然需要对优化后的结果进行工程圆准化, 以使优化结果更加发挥效益。

(2) 使用鲁棒优化方法得到的最优设计在设计变量发生摄动后, 结构性能仍能满足各项约束; 而传统优化方式获得的最优设计则不尽然。

(3) 相对于传统优化设计结果, 鲁棒优化设计结果需要付出一定的质量代价, 鲁棒性要求越高, 优化所得到的结构质量越大。

(4) 设计变量的摄动范围越小, 鲁棒优化设计所得到的结构质量越小。

## 参考文献:

- [1] 吕 斌. 飞机气动弹性主动优化设计方法 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2007: 97-124.  
Lü Bin. Active optimization method for the aeroelastic design of airplane [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007: 97-124.
- [2] 肖方豪, 蹇开林. 鲁棒优化设计方法在结构动力学中的应用 [J]. 工程力学, 2007, 24(增刊 I): 62-65.  
Xiao Fanghao, Jian Kailin. Application of robust optimal design in structural dynamics [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Supplement I): 62-65.
- [3] Venkataraman S, Salas P. Optimization of composite laminates for robust and predictable progressive failure response [J]. AIAA Journal, 2007, 45(5): 1113-1125.
- [4] 陈建桥, 李 峰, 杨能仁, 等. 复合材料层合板的强度鲁棒性特征 [J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2003, 31(1): 111-113.  
Chen Jianqiao, Li Feng, Yang Nengren, et al. Characteristics of strength robustness of laminated composites [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2003, 31(1): 111-113.
- [5] 王向阳, 陈建桥. 复合材料层合板的可靠性优化和鲁棒特征 [J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2006, 34(8): 94-96.  
Wang Xiangyang, Chen Jianqiao. Reliability optimum and robust characteristics of composites [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2006, 34(8): 94-96.
- [6] 张志峰, 陈浩然, 白瑞祥. 含初始缺陷复合材料格栅加筋圆柱壳的鲁棒优化设计 [J]. 固体力学学报, 2006, 27(1): 58-64.  
Zhang Zhifeng, Chen Haoran, Bai Ruixiang. Robust optimization of advanced grid composite cylindrical shell considering initial imperfect effect [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, 27(1): 58-64.
- [7] Zink P S, Raveh D E, Mavris D N. Robust structural design of an active aeroelastic wing with maneuver load inaccuracies [J]. Journal of Aircraft, 2004, 41(3): 587-593.
- [8] Wan Zhiqiang, Yan Hong, Liu Deguang, et al. Aeroelastic analysis and optimization of high - aspect - ratio composite forward - swept wings [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2005, 18(4): 317-325.
- [9] 万志强, 杨 超, 酆正能. 混合遗传算法在气动弹性多学科优化中的应用 [J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(12): 1142-1146.  
Wan Zhiqiang, Yang Chao, Li Zhengneng. Application of hybrid genetic algorithm in aeroelastic multidisciplinary optimization [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(12): 1142-1146.
- [10] 吕 斌, 谭申刚, 万志强, 等. T 型尾翼气动弹性优化设计 [J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(4): 409-413.  
Lü Bin, Tan Shengang, Wan Zhiqiang, et al. Optimization design for aeroelastic dynamics of T - tail [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(4): 409-413.
- [11] 肖志鹏, 万志强, 梁 猛, 等. 双尾撑布局飞机飞行载荷分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(4): 456-459.  
Xiao Zhipeng, Wan Zhiqiang, Liang Meng, et al. Flight loads analysis of a twin - tailboom aircraft [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(4): 456-459.
- [12] 万志强, 杨 超. 大展弦比复合材料机翼气动弹性优化 [J]. 复合材料学报, 2005, 22(3): 145-149.  
Wan Zhiqiang, Yang Chao. Aeroelastic optimization of a high-aspect-ratio composite wing [J]. Acta Materiae Composite Sinica, 2005, 22(3): 145-149.
- [13] Rodden W P, Johnson E H. MSC/Nastran aeroelastic analysis user's guide V68 [M]. Los Angeles, CA: MSC. Software Corporation, 1994: 44-65.
- [14] 于利磊, 唐文勇, 张圣坤, 等. 一种工程结构的鲁棒优化设计方法 [J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(8): 1189-1192.  
Yu Lilei, Tang Wenyong, Zhang Shengkun, et al. Robust optimization design method for engineering structures [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2003, 37(8): 1189-1192.
- [15] 杨乃宾, 章怡宁. 复合材料飞机结构设计 [M]. 北京: 航空工业出版社, 2002: 102-120.  
Yang Naibin, Zhang Yining. Structural design of composite airplane [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2002: 102-120.