复合材料学报 第 27 卷 第 1 期 2 月 2010 年
Acta Materiae Compositae Sinica Vol. 27 No. 1 February 2010

文章编号：1000-3851(2010)01-0196-06

四边简支压电层合板灵敏度分析的精确解

张宏伟*，武锋锋，卿光辉
（中国民航大学 航空工程学院，天津 300300）

摘　要： 为了应用弹性力学中的 Hamilton 正则方程研究压电材料的灵敏度系数问题，基于压电材料的 H-R (Hellinger-Reissner)变分原理，简要地导出 Hamilton 正则方程算子表达式，建立了四边简支板静力学控制方程。根据灵敏度定义，在静力学控制方程的基础上联立灵敏度控制方程，得到了增维的齐次压电材料静力响应和灵敏度系数混合控制方程。应用该方程可以同时求得压电层合板的力学、电学参量及其灵敏度。该算法过程简单、运算效率和稳定性好。数值算例结果与有限差分法的结果比较表明本文方法切实有效。

关键词： 压电材料；层合板；灵敏度分析；Hamilton 正则方程；混合控制方程

中图分类号： O343.2；O176　　**文献标志码：** A

Exact solution for sensitivity analysis of simply supported piezoelectric laminated plates

ZHANG Hongwei*, WU Fengfeng, QING Guanghui
(College of Aviation Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: In order to analyze the sensitivity coefficients of piezoelectric lamina in terms of Hamilton canonical equation, based on the H-R (Hellinger-Reissner) variational principle of piezoelectric materials, the expression of operator was deduced for Hamilton canonical equation, and the governing equations of static response were established for piezoelectric plates simply supported on four sides as well. According to the definition of sensitivity analysis, the hybrid governing equation of static response and sensitivity coefficients was obtained by uniting Hamilton canonical equation and the equation of sensitivity. The mechanic, electric parameters and the sensitivity coefficients of static response would be gained by this hybrid governing equations at the same time. This algorithm simplifies the process and improves the efficiency of calculation and stability. The results of numerical examples, compared with those of the finite difference methods, show that the present solution is efficient.

Keywords: piezoelectric materials; laminated plates; sensitivity analysis; Hamilton canonical equation; hybrid governing equation

压电材料是一类智能结构系统中的主导材料。它具有类生物的功能，通过自身的感知响应内外环境的变化，达到自检测、自诊断、自适应的目的，实现动态、在线、实时、主动监测与控制。因此，在航空航天、国防军事、民用建筑、水利、医学、汽车等领域都有着广阔的发展前景[1]。为了提高传感器的响应速度和可靠性，对材料进一步进行优化设计是十分必要的。

选择适当的组分材料、空间结构及夹杂形状是设计压电材料的第一步[2]。其中，应力和位移对材料参数灵敏度的研究可为选择组分材料、空间结构及夹杂形状提供重要的参考。另外，应力和位移对几何参数灵敏度的研究可用于结构形状的优化。灵敏度即求导信息，灵敏度分析(SA)是一种度量、评价因设计变量或参数的改变而引起结构响应特性变化率的方法[3]。

SA 的研究方法经过几十年的发展已经相当丰富，主要有解析法[4]、有限差分法、半解析法[5]和随机有限元法[6]等。伴随着 20 世纪 90 年代初弹性力学辛理论[7-9]的建立，将弹性力学辛理论下的 Hamilton 正则方程引入 SA 的研究可能成为层合结构 SA 研究的一个新方向。文献[10]首次应用状

收稿日期： 2008-12-22；**收修改稿日期：** 2009-06-09
基金项目： 天津市自然科学基金(07JCYBJC02100)；中国民航大学校基金(05YK07M)
通讯作者： 张宏伟，讲师，主要研究方向为复合材料结构力学与飞机结构修理　E-mail: hwzhang@cauc.edu.cn

态空间方法即 Hamilton 正则方程方法研究了热电弹性层合板多个物理量的灵敏度问题，这是灵敏度分析研究中首次引入 Hamilton 正则方程。

本文中在压电材料 Hamilton 正则方程理论的基础上，给出了一种求解压电层合板参数灵敏度的增维齐次方程方法。

1 Hamilton 正则方程和级数解法

在直角坐标系下，压电弹性材料修正后的 H-R(Hellinger-Reissner)变分原理或类 Hamilton 原理可表示为[7, 8, 11-15]

$$\delta\boldsymbol{\Pi} = \delta\iiint_V(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{,z} - H)\mathrm{d}V + \delta\iint_{S_A}(\lambda_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{p\bar{q}} - \lambda_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{\bar{p}q})\mathrm{d}S \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{P}=[\sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zz} \quad D_{zz}]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{Q}=[u \quad v \quad w \quad \varphi]^{\mathrm{T}}$；$H$ 是 Hamiltonian 函数；S_A 为混合边界条件；$\boldsymbol{B}_{p\bar{q}}=[p_x(u-\bar{u}) \quad p_y(v-\bar{v}) \quad p_z(w-\bar{w}) \quad p_q(\varphi-\bar{\varphi})]^{\mathrm{T}}$，$p_i(i=x,y,z)$是侧面边界表面 3 个坐标方向的应力，$p_q$ 是边界表面上的电荷载荷，$\bar{u}$、$\bar{v}$ 和 $\bar{w}$ 是边界表面 3 个坐标方向的给定位移分量，$\bar{\varphi}$ 是边界表面上的给定电势；$\boldsymbol{B}_{\bar{p}q}=[\bar{p}_x u \quad \bar{p}_y v \quad \bar{p}_z w \quad \bar{p}_q\varphi]^{\mathrm{T}}$，$\bar{p}_i(i=x,y,z)$是边界表面 3 个坐标方向的给定应力分量，$\bar{p}_q$ 是边界表面给定的电荷载荷。$\lambda_1=[\lambda_x-1\ \lambda_y-1\ \lambda_z-1\ \lambda_q-1]^{\mathrm{T}}$ 和 $\lambda_0=[\lambda_x\ \lambda_y\ \lambda_z\ \lambda_q]^{\mathrm{T}}$ 是特意引入的特征系数，$\lambda_i(i=x,y,z,q)$的值可取 1 和 0。如果在 x 方向为应力边界条件，则 $\lambda_x=1$；若是位移边界条件，则 $\lambda_x=0$；λ_y、λ_z 的取值依次类推。若边界上给定电位移，则 $\lambda_q=1$；若边界上给定电势，则 $\lambda_q=0$。在弹性材料修正后的H-R变分原理中引入特征系数方法最早由陈浩然等提出，本文中将其扩展到了压电弹性材料问题中，即用相同的特征参数来标记边界处的电位移和电势 2 个变量。引入特征系数后，式(1)既能表达单一边界条件问题，又能表达混合边界条件问题。

对不考虑体积力的静力学问题，Hamiltonian 函数 H 的表达式为

$$H = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{Q}) - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\Phi_{21}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{22}(\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{Q}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{11}\boldsymbol{P} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$，$\alpha=\partial/\partial x$，$\beta=\partial/\partial y$；对于正交各向异性压电材料有

$$\boldsymbol{\Phi}_{11} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & k_4 & k_5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{12} = -\boldsymbol{\Phi}_{21}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 \\ k_8 & k_9 & 0 & 0 & 0 \\ k_{10} & k_{11} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{22} = \begin{bmatrix} k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{17} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

式中，$k_i(i=1,2,\cdots,17)$是与材料刚度矩阵系数相关的常量，具体表达式见文献[15]。

式(1)中并不包括平面内应力和电位移分量。这正是式(1)被称为修正后的变分原理的原因之一。3 个平面内应力和 2 个平面内电位移分量的表达式为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_{xx} \\ D_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{12}\alpha & k_{13}\beta & 0 & 0 & 0 & -k_8 & -k_{10} \\ k_{13}\alpha & k_{14}\beta & 0 & 0 & 0 & -k_9 & -k_{11} \\ k_{15}\beta & k_{15}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{16}\alpha & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{17}\beta & 0 & -k_7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \\ D_{zz} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

式(4)表明平面内应力和电位移分量是关于位移 u、v、电势 φ、平面外应力和平面外电位移的表达式。

就板类问题而言，板侧面边界上位移和电势的边界条件可表示为

$$u=\bar{u},\ v=\bar{v},\ w=\bar{w},\ \varphi=\bar{\varphi} \tag{5}$$

式(1)中的 $p_i(i=x,y,z,q)$可用板的侧面边界应力和电位移分别表示为

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 \\ 0 & n_y & n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{qx} & n_{qy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_{xx} \\ D_{yy} \end{Bmatrix} \tag{6a}$$

$$p_z = n_x\sigma_{xz} + n_y\sigma_{yz} \tag{6b}$$

以 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 为相互独立的变量，对式(1)进行变分并分部积分可得 Hamilton 正则方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{21} & \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{22}\boldsymbol{G}_2 \\ \boldsymbol{\Phi}_{11} & -(\boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{\Phi}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{Q} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

文献[10]从热弹性材料的本构关系和相应的平衡方程出发也导出了与方程(7)类似的表达式。很显然方程(7)并没有包括边界项，主要是因为下面仅考虑四边简支的矩形板问题。

根据文献[9 - 10]，对于四边简支的矩形板问题，可用三角级数对平面外应力(包括电位移)和位移(包括电势)变量分离

$$\left.\begin{aligned}
[u,\sigma_{xz}] &= \sum_m \sum_n [u^{mn}(z),\sigma_{xz}^{mn}(z)]\cos(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\\
[v,\sigma_{yz}] &= \sum_m \sum_n [v^{mn}(z),\sigma_{yz}^{mn}(z)]\sin(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)\\
[w,\sigma_{zz}] &= \sum_m \sum_n [w^{mn}(z),\sigma_{zz}^{mn}(z)]\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\\
[D_z,\varphi] &= \sum_m \sum_n [D_z^{mn}(z),\varphi^{mn}(z)]\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中：a、b 分别表示矩形板的长和宽；m、n 代表波数。

将式(8)代入方程(7)，对于任意一对 $m - n$ 都有

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)\boldsymbol{R}(z) = \boldsymbol{KR}(z) \tag{9}$$

方程(9)是齐次微分方程，标准解为

$$\boldsymbol{R}(z) = \boldsymbol{T}(z)\boldsymbol{R}(0) \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{T}(z)=\exp(\boldsymbol{K}z)$。

为了叙述方便，将应力和电位移简称为应力或广义应力，位移和电势简称为位移或广义位移。

对于一 n 层板，每一层都有相应的方程(9)。由层间位移和应力的连续关系可得

$$\boldsymbol{R}(z_n) = \left(\prod\nolimits_{j=1}^{n} \boldsymbol{T}_j(z_j)\right)\boldsymbol{R}(0) \tag{11}$$

式中：z_j $(j=1,2,3,\cdots,n)$ 表示每一层的厚度；$\boldsymbol{K}_j$ $(j=1,2,3,\cdots,n)$ 表示每一层的系数矩阵。

按照位移和应力分类，方程(11)可写成矩阵形式的方程组

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}^{mn}(z_n) \\ \boldsymbol{Q}^{mn}(z_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \boldsymbol{T}_{12} \\ \boldsymbol{T}_{21} & \boldsymbol{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}^{mn}(0) \\ \boldsymbol{Q}^{mn}(0) \end{Bmatrix} \tag{12}$$

2　灵敏度公式和求解方法

首先，将材料参数如 E_x、μ_{xy}、e_{31} 等以及几何参数 a 和 b 看作平面外应力函数和位移函数的自变量。根据灵敏度的定义，对方程(9)其中任意参数求导

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(z)/\mathrm{d}z = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{K}_{,\lambda}\boldsymbol{R}(z) \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{X}(z)=\boldsymbol{R}_{,\lambda}(z)=\mathrm{d}\boldsymbol{R}(z)/\mathrm{d}\lambda$；$\boldsymbol{K}_{,\lambda}=\mathrm{d}\boldsymbol{K}/\mathrm{d}\lambda$；$\lambda$ 代表材料参数或几何参数。

同理，对于一 n 层板，每一层都有相应的方程(13)。层合板中第 j 层的解为

$$\boldsymbol{X}(z_j) = \boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j)\boldsymbol{X}(z_{j-1}) + \boldsymbol{R}_{\lambda j}(z_j) \tag{14}$$

式中：

$\boldsymbol{X}(z_j) = [\boldsymbol{P}_{,\lambda}^{mn}(z_j) \quad \boldsymbol{Q}_{,\lambda}^{mn}(z_j)]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{X}(z_{j-1}) = [\boldsymbol{P}_{,\lambda}^{mn}(z_{j-1}) \quad \boldsymbol{Q}_{,\lambda}^{mn}(z_{j-1})]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j) = \exp(\boldsymbol{K}_j\cdot z_j)$，

$\boldsymbol{R}_{\lambda j}(z_j) = \int_0^{z_j}\exp(\boldsymbol{K}_j\cdot(z_j-\tau))\boldsymbol{K}_{,\lambda j}\boldsymbol{R}(\tau)\mathrm{d}\tau.$

由层间位移和应力的连续关系，有

式(9)中：

$\boldsymbol{R}(z)=[\boldsymbol{P}^{mn} \quad \boldsymbol{Q}^{mn}]^{\mathrm{T}}=[\sigma_{xz}^{mn}(z) \quad \sigma_{yz}^{mn}(z) \quad \sigma_{zz}^{mn}(z) \quad D_z^{mn}(z) \quad u^{mn}(z) \quad v^{mn}(z) \quad w^{mn}(z) \quad \varphi^{mn}(z)]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & k_8\eta & k_{10}\eta & k_{12}\eta^2+k_{15}\zeta^2 & k_{13}\eta\zeta+k_{15}\eta\zeta & 0 & 0\\
0 & 0 & k_9\zeta & k_{11}\zeta & k_{13}\eta\zeta+k_{15}\eta\zeta & k_{14}\zeta^2+k_{15}\eta^2 & 0 & 0\\
\eta & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-k_6\eta & -k_7\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{16}\eta^2+k_{17}\zeta^2\\
-k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta & k_6\eta\\
0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\zeta & k_7\zeta\\
0 & 0 & k_3 & k_4 & -k_8\eta & -k_9\zeta & 0 & 0\\
0 & 0 & k_4 & k_5 & -k_{10}\eta & -k_{11}\zeta & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

$\zeta=m\pi/b$，$\eta=n\pi/b$.

$$\boldsymbol{X}(z_n)=(\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j))\boldsymbol{X}(0)+(\prod_{j=2}^{n}\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j))\boldsymbol{R}_{\lambda 1}(z_1)+(\prod_{j=3}^{n}\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j))\boldsymbol{R}_{\lambda 2}(z_2)+\cdots+\boldsymbol{R}_{\lambda n}(z_n) \tag{15}$$

将上式写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(h_n)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(h_n)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_{\lambda 11} & \boldsymbol{T}_{\lambda 12}\\ \boldsymbol{T}_{\lambda 21} & \boldsymbol{T}_{\lambda 22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(0)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(0)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 1}\\ \boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 2}\end{Bmatrix} \tag{16}$$

式中

$$[\boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 1}\quad \boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 2}]=(\prod_{j=2}^{n}\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j))\boldsymbol{R}_{\lambda 1}(z_1)+(\prod_{j=3}^{n}\boldsymbol{T}_{\lambda j}(z_j))\boldsymbol{R}_{\lambda 2}(z_2)+\cdots+\boldsymbol{R}_{\lambda n}(z_n)$$

从方程(13)到方程(16)，本文的推导方法与文献[10]完全相同。

文献[10]求解应力灵敏度和位移灵敏度的最基本的 3 个步骤是：首先由公式(11)求得任意位置的位移应力和位移 $\boldsymbol{R}(z_j)$，再将其代入方程(13)进行卷积运算得到 $\boldsymbol{R}_{\lambda j}(z_j)$；然后根据方程(15)得到 $[\boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 1}\quad \boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 2}]$；最后由方程(16)求得任意位置的应力灵敏度和位移灵敏度。

很明显，文献[10]中的方法比较繁琐，程序编写也很不方便。另一方面，$[\boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 1}\quad \boldsymbol{\Gamma}^{mn}_{,\lambda 2}]$的数据运算量很大，而且卷积运算比较消耗时间。

事实上，方程(9)和方程(13)可联立求解。其联立形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(z)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(z)\\ \boldsymbol{P}^{mn}(z)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}(z)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{11,\lambda} & \boldsymbol{K}_{12,\lambda}\\ \boldsymbol{K}_{21} & -\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} & K_{21,\lambda} & -\boldsymbol{K}_{11,\lambda}^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ 0 & 0 & \boldsymbol{K}_{21} & -\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(z)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(z)\\ \boldsymbol{P}^{mn}(z)\\ \boldsymbol{Q}^{mn}(z)\end{Bmatrix} \tag{17a}$$

为了叙述方便，将上式简写为如下形式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Xi}(z)/\mathrm{d}z=H\boldsymbol{\Xi}(z) \tag{17b}$$

式中，$\boldsymbol{\Xi}(z)=[\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(z)\ \ \boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(z)\ \ \boldsymbol{P}^{mn}(z)\ \ \boldsymbol{Q}^{mn}(z)]^{\mathrm{T}}$。

对于一 n 层板，每一层都有方程(17)。值得注意的是方程(17)是齐次方程，因此由层间的连续关系可以得到

$$\boldsymbol{\Xi}(z_n)=(\prod_{j=1}^{n}\boldsymbol{\Psi}_j(z_j))\boldsymbol{\Xi}(0)=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Xi}(0) \tag{18}$$

式中：z_j ($j=1,2,3,\cdots,n$) 是每一层的厚度；$\boldsymbol{\psi}_j(z_j)=\exp(\boldsymbol{H}_j\cdot z_j)$，$\boldsymbol{H}_j$ ($j=1,2,3,\cdots,n$)是每一层的系数矩阵。

交换方程(17)中的列向量 $\boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}^{mn}$，并将其写成方程组的形式

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_P(z_n)\\ \boldsymbol{\Xi}_Q(z_n)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_{11} & \boldsymbol{\Pi}_{12}\\ \boldsymbol{\Pi}_{21} & \boldsymbol{\Pi}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\Xi}_P(0)\\ \boldsymbol{\Xi}_Q(0)\end{Bmatrix} \tag{19}$$

式中：$\boldsymbol{\Xi}_Q(0)=[\boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(0)\quad \boldsymbol{Q}^{mn}(0)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Xi}_Q(z_n)=[\boldsymbol{Q}^{mn}_{,\lambda}(z_n)\quad \boldsymbol{Q}^{mn}(z_n)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Xi}_P(0)=[\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(0)\quad \boldsymbol{P}^{mn}(0)]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Xi}_P(z_n)=[\boldsymbol{P}^{mn}_{,\lambda}(z_n)\quad \boldsymbol{P}^{mn}(z_n)]^{\mathrm{T}}$ 分别代表层合板上下表面的应力，通常是已知的。如果上下表面的电位移不是已知的，则电势就应该是已知的。因此可将向量 $\boldsymbol{\Xi}_P$ 中电位移 $D^{mn}(z)$和灵敏度 $D^{mn}_{,\lambda}(z)$与向量 $\boldsymbol{\Xi}_Q$ 中的电势 $\varphi^{mn}(z)$和 $\varphi^{mn}_{,\lambda}(z)$对调。

根据方程(19)，可获得上下表面的位移解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Xi}_Q(0)&=\boldsymbol{\Pi}_{12}^{-1}(\boldsymbol{\Xi}_P(z_n)+\boldsymbol{\Pi}_{11}\boldsymbol{\Xi}_P(0))\\ \boldsymbol{\Xi}_Q(z_n)&=\boldsymbol{\Pi}_{21}\boldsymbol{\Xi}_P(0)+\boldsymbol{\Pi}_{22}\boldsymbol{\Xi}_Q(0)\end{aligned} \tag{20}$$

通过方程(17)，又可以同时获得层合板内部任意位置的应力、应力灵敏度和位移、位移灵敏度。虽然联立方程(17)的系数矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的维数是方程(10)或方程(13)的 2 倍，但是，方程(17)中的传递矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 只需计算 1 次，与文献[10]中的方法相比简洁得多。另一方面，即本文的方法最突出的优点是齐次方程(17)的求解，过程简洁，易于编程，同时避免卷积运算，提高了运算速度和数值结果的稳定性。

3 数值实例分析

考虑由 PZT－5A 型压电材料构成的三层板，板的长度和宽度均为 a，厚宽比 $R=h/a=0.1$，各子层厚度 $h_1=h_2=h_3=h/3$，铺层角度为 0°/90°/0°。上表面受单位均布载荷，且上下表面电势差为 1 V，PZT－5A 型压电材料的材料性质见表 1。

实例分析表明本文方法与采用文献[10]的方法所得的结果一致(精确位数 8 位)。表 2 和表 3 列出由本文方法($m=n=1$)得到的最大位移和最大应力的灵敏度。

灵敏度的有限差分法的表达式为[16]

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\cdots)=\frac{f(\cdots+\Delta\lambda)-f(\cdots)}{\Delta\lambda} \tag{21}$$

本文解与有限差分解的对比结果见表 4。限于篇幅问题，本文只给出最下一层板的静力响应对厚宽比 R 灵敏度系数与有限差分法结果比较的误差，其中差分法步长为 $0.000005R$。可以看出，本文的结果是可靠的。表 4 中的误差公式为 $\frac{\text{Difference}-\text{Present}}{\text{Present}}$。

表 1 所用 PZT－5A 型压电材料的材料性能

Table 1 Material properties of PZT－5A

Elastic modulus / GPa			Shear modulus / GPa			Poisson's ratio		
E_1	E_3	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{23}
61.0	61.0	53.2	22.6	21.1	21.1	0.35	0.38	0.38
Piezoelectric constant / (C · m^{-2})						Dielectric constant/10^{-8}farads · m^{-1}		
e_{31}	e_{32}	e_{33}	e_{15}	e_{24}	/	ε_{11}	ε_{22}	ε_{33}
374	−171	−171	584	584	/	1.53	1.53	1.50

表 2 层合板层间界面和上下表面的最大广义位移 w、D_z 的灵敏度

Table 2 Sensitivity coefficients of generalized displacement w and D_z of the interface, top and bottom surface

f	z/h	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}E_1$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}R$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{33}$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{31}$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{15}$
$w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	0.0	−1.85950E−22	1.95636E−11	3.66882E−12	1.23563E−12	4.89767E−13
	0.4	−1.83078E−22	1.97051E−11	−2.34254E−12	3.03376E−12	4.82926E−13
	0.6	−1.83227E−22	1.97051E−11	−8.16498E−12	4.78665E−12	5.07692E−13
	1.0	−1.86393E−22	1.95636E−11	−1.37934E−11	6.46996E−12	4.88595E−13
$D_z\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	0.0	−2.50601E−32	1.96086E−8	−3.66882E−12	−1.23563E−12	−4.89768E−13
	0.4	−2.68460E−32	3.13525E−9	−6.30168E−12	7.66814E−12	5.66878E−13
	0.6	−1.43720E−32	−6.45863E−9	−1.11614E−11	4.46822E−12	−5.66785E−13
	1.0	−1.61725E−32	−9.60871E−9	−1.37934E−11	6.46996E−12	4.88596E−13

表 3 层合板层间界面最大平面外广义应力的灵敏度

Table 3 Sensitivity coefficients of generalized out-plane stress of the interface

f	z/h	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}E_1$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}R$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{33}$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{31}$	$\mathrm{d}f/\mathrm{d}e_{15}$
$\sigma_{xz}\left(0,\frac{a}{2},z\right)$	0.4	3.14903E−12	0.212279	0.067725	−3.67122	−0.216303
	0.6	2.82605E−12	0.212405	−0.0681763	3.33369	−0.0995074
$\sigma_{zz}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	0.4	4.93163E−16	−7.38851E−5	0.0143071	−6.71094E−3	−0.0166233
	0.6	2.92093E−16	3.84639E−5	0.0142127	−6.66666E−3	−3.40737E−3
$\varphi\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	0.4	3.05868E−26	2.39390E−3	4.46285E−5	−3.39794E−5	−3.80002E−7
	0.6	3.05050E−26	1.90228E−3	4.46192E−5	−3.39725E−5	−3.80064E−7

表 4 静力响应对厚宽比 R 的灵敏度系数

Table 4 Sensitivity coefficients to static responses of width and thickness ratio R

	$w\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	$D_z\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	$\sigma_{xz}\left(0,\frac{a}{2},z\right)$	$\sigma_{zz}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	$\varphi\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},z\right)$	$\sigma_{xy}(0,0,z)$	D_{xx}
Difference method	1.95638E−11	−9.60864E−9	0.212405	3.84636E−5	1.90227E−3	−2.1465	−1.46403E−8
Present solution	1.95636E−11	−9.60871E−9	0.212405	3.84639E−5	1.90228E−3	−2.1465	−1.46403E−8
Error	1.92997E−9	6.60979E−8	1.71142E−8	4.00891E−6	2.08796E−7	2.8871E−9	1.73143E−8

4 结 论

本文中以压电材料的 Hamilton 正则方程为基础，通过联立静力学控制方程和灵敏度控制方程，为压电层合板的材料和几何参数灵敏度分析提出了一种简洁方法，这里称其为混合控制方程解析法或齐次方程解析法。实例分析中，得到了位移和应力对材料参数和几何参数的灵敏度系数在 z 方向上的分布情况，解析法结果与有限差分法比较表明解析法结果切实有效。

参考文献：

[1] 王 腾，晏 雄. 智能复合材料的开发应用及进展[J]. 纺织导报，2004(4)：20-25.
Wang Teng，Yan Xiong. Progress in the development and application of intelligent composite materials [J]. China Textile Leader，2004(4)：20-25.

[2] 杨凤霞，李智华. 压电复合材料的电弹耦合特性分析[J]. 复合材料学报，2005，22(2)：121-124.
Yang Fengxia，Li Zhihua. Analysis to the coupled electroelastic behaviors of piezoelectric composites [J]. Acta Materiae Compositae Sinica，2005，22(2)：121-124.

[3] 唐明裴，阎贵平. 结构灵敏度分析及计算方法概述[J]. 中国铁道科学，2003，24(1)：74-79.
Tang Mingpei，Yan Guiping. Overview of structural sensitivity analysis and computation method [J]. China Railway Science，2003，24(1)：74-79.

[4] Pandey P C，Bakshi P. Analytical response sensitivity computation using hybrid finite elements [J]. Computers and Structures，1999，71(5)：525-534.

[5] Bakshi P，Pandey P C. Semi-analytical sensitivity using hybrid finite elements [J]. Computers and Structures，2000，77(2)：201-213.

[6] Bhattacharyya B，Chakraborty S. Sensitivity statistics of 3D structures under parametric uncertaintty [J]. Engrg Mech，2001，127(9)：909-914.

[7] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连：大连理工大学出版社，1995：182-187
Zhong Wanxie. A new systematic methodology for theory of elasticity [M]. Dalian：Dalian University of Technology Press，1995：182-187.

[8] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京：科学出版社，2003：22-44.
Zhong Wanxie. Symplectic system of applied mechanics [M]. Beijing：Science Press，2003：22-44.

[9] 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论[M]. 北京：科学出版社，1996：111-385
Fan Jiarang. Exact theory of laminated thick plates and shells [M]. Beijing：Science Press，1996：111-385.

[10] Xu Kangming，Noor Ahmed K. Tang Yvette Y. Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，1995，126(3/4)：355-371.

[11] Zou Guiping，Tang Limin. A semi-analytical solution for laminated composite plates in Hamiltonian system [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，1995，128(2)：295-404.

[12] Qing Guanghui，Qiu Jiajun，Liu Yanhong. Free vibration analysis of stiffened laminated plates [J]. International Journal of Solids and Structures，2006，43(6)：1357-1371.

[13] Qing Guanghui，Qiu Jiajun，Liu Yanhong. A semi-analytical solution for dynamic analysis of plate with piezoelectric patches [J]. International Journal of Solids and Structures，2006，43(6)：1388-1403.

[14] 陈浩然，杨正林，唐立民. 复合材料层合板固化过程的数值模拟[J]. 应用力学学报，1998，15(3)，30-36.
Chen Haoran，Yang Zhenglin，Tang Limin. Numerical simulation of composite laminates during cure process [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics，1998，15(3)，30-36.

[15] 卿光辉，邱家俊，塔 娜. 压电材料修正后的 H-R 混合变分原理及其层合板的精确法[J]. 工程力学，2005：22(5)：43-47.
Qing Guanghui，Qiu Jiajun，Ta Na. Modified H-R mixed variational principle for piezoelectric material and exact solution of piezoelectric laminates [J]. Engineering Mechanics，2005，22(5)：43-47.

[16] Perry M A，Bates R A，Atherton M A，Wynn H P. A finite-element-based formulation for sensitivity studies of piezoelectric systems [J]. Smart Material Structures，2008，17(1)：1-7.