

双曲守恒律方程 WENO 格式的优化方法^{*}

徐振礼, 邱建贤, 刘儒勋

(中国科学技术大学数学系, 安徽合肥 230026)

摘要: Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) 是求解双曲守恒律方程的高精度高分辨率数值格式. 论文讨论了双曲守恒律方程 WENO 格式的一些优化策略, 减少了非线性权的计算次数和特征分解的次数, 通过数值算例证明了这些策略的可行性, 并比较了优缺点.

关键词: WENO 格式; 双曲守恒律方程; Runge-Kutta 方法

中图分类号: V211.1 **文献标识码:** A

AMS Subject classification(2000): 65M06, 65M99, 35L65 1

0 引言

在流体力学和工程计算中, 双曲守恒律方程的数值格式的设计具有很重要的地位, 尤其是常常在求解区域中会遇到一些物理量有很大的梯度变化或者间断的问题, 如水跃问题, 气动力学上的激波问题等, 模拟这一类问题是非常困难的.

自上世纪 90 年代以来, 基于 ENO (Essentially Non-Oscillatory)^[4,5] 发展起来的 WENO (Weighted ENO) 格式一直是人们研究的热点. WENO 格式具有高精度, 高分辨率的良好性质, 因此特别适合间断问题的处理, 比如激波湍流问题, 航空声学问题等. Liu, Osher 和 Chan^[12] 首先构造了一维空间上的三阶有限体积 WENO 格式, Jiang, Shu, Hu 和 Qiu 等许多人对发展 WENO 做了许多工作^[1,3,6,7,14,16]. WENO 是通过低阶数值流通量的加权平均得到高阶数值流通量, 其中的非线性权值通过数值解的局部光滑性来确定, 这部分计算占用了大量的 CPU 工作时间, 使得计算效率很低. Levy, Puppo 和 Russo^[10] 首先基于 TVD-Runge-Kutta 时间离散方法, 将在每一时间步, 只作一次非线性权计算应用到中心 WENO 中, 并证明是可行的^[8,9,13], 本文在迎风 WENO 中也证明了它的可行性, 并讨论了在求解双曲守恒律方程组时, 在一个时间步中只进行一次特征分解的可行性.

1 WENO 格式优化方法讨论

首先以一维标量方程

^{*} 收稿日期: 2002-04-20

基金项目: 国家自然科学基金(10071083)和中国科学技术大学火灾科学国家重点实验室创新基金

作者简介: 徐振礼, 男, 1978 年生, 硕士生. E-mail: xuzl@mail.ustc.edu.cn

$$u_i + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

为例介绍有限差分 WENO 格式的重构思想^[7]. 在网格点 $x = x_j$ 上, 有差商逼近

$$f(u)_x \big|_{x=x_j} \approx \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}),$$

这里 $\hat{f}_{j+1/2}$ 为需要重构的高阶 WENO 数值流通量. 考虑 $f'(u) \geq 0$ 的情况, 假设有 k 个备选模板, 记为

$$S_r(j) = \{x_{j-r}, x_{j-r+1}, \dots, x_{j-r+k-1}\}, r = 0, 1, \dots, k-1, \quad (2)$$

对 $\hat{f}_{j+1/2}$ 每个模板都可以重构得到一个不同的近似值, 从而可得到 k 个不同的低阶流通量,

$$\check{f}_{j+1/2}^{(r)} = p^{(r)}(x_{j+1/2}) = \sum_{i=0}^{k-1} c_{ri} f(u_{j-r+i}), r = 0, 1, \dots, k-1, \quad (3)$$

这里的 $p^{(r)}(x)$ 为模板 S_r 上的插值多项式. WENO 利用这些低阶的数值流通量的凸组合得到高阶流通量

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_r \check{f}_{j+1/2}^{(r)}, \quad (4)$$

现在要做的事情是确定权值 ω_r , 来使格式具有高阶精度. 为满足稳定性和相容性, 要求

$$\omega_r \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \omega_r = 1.$$

对于函数 $f(u)$ 光滑的情形, 如果我们找到了 d_r , 称为线性权 (Linear Weights), 使得

$$\hat{f}_{j+1/2} = \sum_{i=0}^{k-1} d_r \check{f}_{j+1/2}^{(r)} \quad (5)$$

具有更高的精度, 一般可以使 $\hat{f}_{j+1/2}$ 达到 $2k-1$ 阶的精度. 为确定 d_r , 在大模板 $T = \cup_{r=0}^{k-1} S_r$ 上构造满足 $2k-1$ 阶插值多项式 $P(x)$, 我们可以通过求解方程

$$P(x_{j+1/2}) = \sum_{i=0}^{k-1} d_r p^{(r)}(x_{j+1/2}) \quad (6)$$

得到 d_r . $k=3$ 时, 有

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10}. \quad (7)$$

由于 $P(x)$ 为具有 $2k-1$ 阶精度的插值多项式, 其数值流通量在光滑区域满足精度要求.

在处理间断问题时, 为了避免采用线性权而产生的强烈振荡, 须引入光滑因子来衡量数值解的陡度和光滑程度. 这是采用 Jiang 和 Shu 设计的光滑因子 β_r 和非线性权 ω_r 方法,

$$\beta_r = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{I_j} h^{2l-1} \left[\frac{d^l}{dx^l} p^{(r)}(x) \right]^2 dx \quad (8)$$

其中, $p^{(r)}(x)$ 是在区间 $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ 上节点模板 $S_r(j)$ 的插值多项式. 取 $k=3$ 时,

$$\beta_0 = \frac{13}{12} (f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 + \frac{1}{4} (f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2,$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{j-1} - f_{j+1})^2,$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12} (f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2.$$

然后,取非线性权 ω_r 为

$$\omega_r = \alpha_r / \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s, \quad \alpha_r = d_r / (\varepsilon + \beta_r)^2, \quad r = 0, 1, \dots, k-1, \quad (9)$$

选取的 ε 是较小量,目的是防止分母为零,一般 $\varepsilon = 10^{-6}$. 这样得到的权值具有以下性质:

(I) 在光滑区域,有 $\omega_r \approx d_r$,可以证明在光滑区域格式具有 $2k - 1$ 阶精度;

(II) 在激波附近,WENO 流通量与 ENO 的流通量相似,因为在有间断通过的节点模板上权值接近于零.

如果 $f(u) \leq 0$,则节点模板必须做相应调整,目的是具有迎风效果,此时只须与 $f(u) \geq 0$ 的情况对称就可以重构得到 WENO 流通量. 而对于一般的 $f(u)$,则必须做流通量分裂

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u),$$

使得 $(f^+)'(u) \geq 0, (f^-)'(u) \leq 0$. WENO 重构可以对 $f^+(u)$ 和 $f^-(u)$ 分开进行,然后组合成高阶的流通量. 一种简单的流通量分裂方法是 Lax-Friedrichs 分裂,

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}[f(u) \pm \alpha u], \quad \alpha = \max_u |f'(u)|. \quad (10)$$

在方程组的情况下,这里的 α 为 $f(u)$ 的 Jacobi 矩阵的最大特征值的绝对值.

从文献 [7] 可以知道: 如果非线性权具有 $\omega_r = d_r^k + O(h^{k-1}), r = 0, 1, \dots, k-1$ 的性质,那么 WENO 逼近保持 $2k - 1$ 阶的数值精度. 而

$$\beta_r = D(1 + O(h^{k-1}))$$

为充分条件,其中 D 为不依赖于 r 的非零量. 通过 Taylor 展开可以证明上面的非线性权满足条件.

回顾三阶的 TVD-Runge-Kutta 方法

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(1)}). \end{aligned}$$

分别令 $\omega_r^{(l)}, \beta_r^{(l)}$ 为在相应 Runge-Kutta 内时间步计算所需的非线性权和光滑因子. 在当前的方法中,当离散空间导数项的时候,都采用相同的非线性权

$$\omega_r^{(l)} = \omega_r, \quad \beta_r^{(l)} = \beta_r, \quad k = 0, 1, 2, \quad l = 1, 2.$$

也就是说,只需第一个 Euler 后差步的非线性权,后两步所使用的非线性权不用计算,直接采用第一步计算所保留的非线性权. 由于 $\beta_r^{(l)} = \beta_r = D(1 + O(h^{k-1}))$ 在每个时间步上保持不变,因而这种策略在光滑区域并不降低格式的精度.

接下来讨论激波处理的能力. 我们知道,在激波附近,WENO 格式具有与 ENO 相类似的性质,在有激波通过的小模板中的数值流通量其权值接近于零,也就是说,在改模板中所计算的光滑因子大于其他模板. 对 $k = 3$ 的情况,不妨假设 β_1 大于另两光滑因子, $\beta_r/\beta_1 \approx 0, r = 0, 2$. 考虑当前讨论的缩时方法,在合适的条件 $\Delta t \leq c\Delta t_1$ 下,这里 c 称为 CFL 系数, TVD-Runge-Kutta 方法是稳定的. 定义 $f_i^{(1)} = f(u_i^{(1)})$, 然后使用 Taylor 级数展开,有

$$f_i^{(1)} = f_i^n + \Delta t G_1(u_i^n) + (\Delta t^2/2)G_2(u_i^n) + (\Delta t^3/3!)G_3(u_i^n) + \dots,$$

这里 $G_r(u) = d_r^i f(u) L(u)$. 在此利用 Taylor 展开可以得到

$$\beta_r^{(1)} = \beta_r(1 + O(h)), \quad r = 1, 2, 3.$$

这里的 $\beta_r^{(1)}$ 是标准的 WENO 格式所需计算的光滑因子, 并且在 Taylor 展开过程中利用了稳定 $\Delta t = O(h)$. 因此, 可以得到 $\beta_r^{(1)}/\beta_1^{(1)} \approx 0, r = 0, 2$. 同样可以求得 $\beta_r^{(2)}/\beta_1^{(2)} \approx 0, r = 0, 2$. 从而可以得到结论, 在激波附近, 利用这种缩时策略在有激波通过得小模板上, 其权值同样接近于零.

WENO 格式有两种方式求解双曲守恒律方程组问题. (I) 分量形式的方法是一个方程接一个方程按照标量方程的形式来重构, 其优点是简单、计算速度快, 但在有些问题上, 得到的数值解具有很强的非物理振荡. (II) 利用特征分解的方法, 虽然此法增加了计算复杂度, 但却可以避免振荡. 在本文算例中都采用 Roe 的特征分解方法. 在特征分解的缩时策略中, 在每个特征方向上, WENO 重构所需的非线性部分只需计算一次, 其方法与标量守恒律方程所使用的方法相同.

2 数值算例

下面给出一些算例来测试优化后的 WENO 格式, 时间上采用三阶的 TVD-Runge-Kutta 离散方法, 空间上若没有特别说明均采用五阶的有限差分 WENO 离散.

例 1 精度测试的例子, 考虑线性单行波方程

$$u_t + u_x = 0, \quad (11)$$

初值条件为 $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$, 采用周期边界条件, 计算到 $T = 2$. 表 1 显示优化策略后的 WENO 格式达到了理论上的精度要求.

例 2 非线性的 Burgers 方程

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \quad (12)$$

初值条件为 $u(x, 0) = 0.5 + \sin(\pi x)$, 采用周期边界条件. 当计算到时间 $t = 0.5/\pi$ 时, Burgers 方程的解依旧光滑, 表 2 列出了数值解的误差以及数值精度阶的结果. 当计算到时间 $t = 1.5/\pi$, 激波出现. 图 1 画出了时间 $t = 0.5/\pi$ 时的图象, 其中实线为解析解, 图象几乎没有非物理振荡.

表 1 数值误差和精度(线性标量方程)

表 2 数值误差和精度阶(Burgers 方程)

Tab. 1 Numerical error and accurate degree (linear scalar equation)

Tab. 2 Numerical error and order of accurate degree (Burgers equation)

N	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
10	3.47E-02		2.87E-02	
20	1.58E-03	4.46	1.49E-03	4.27
40	4.69E-05	5.07	4.75E-05	4.97
80	1.47E-06	5.00	1.54E-06	4.95
160	4.66E-08	4.97	4.64E-08	5.05
320	1.50E-09	4.96	1.44E-09	5.01
640	4.92E-11	4.93	4.28E-11	5.07

N	L_1 error	L_1 order	L_∞ error	L_∞ order
10	4.11E-02		7.58E-02	
20	4.39E-03	3.23	1.23E-02	2.62
40	2.65E-04	4.05	1.03E-03	3.59
80	9.05E-06	4.87	4.70E-05	4.45
160	3.51E-07	4.69	1.49E-06	4.98
320	1.23E-08	4.83	1.16E-07	3.68
640	3.02E-10	5.35	3.67E-09	4.99

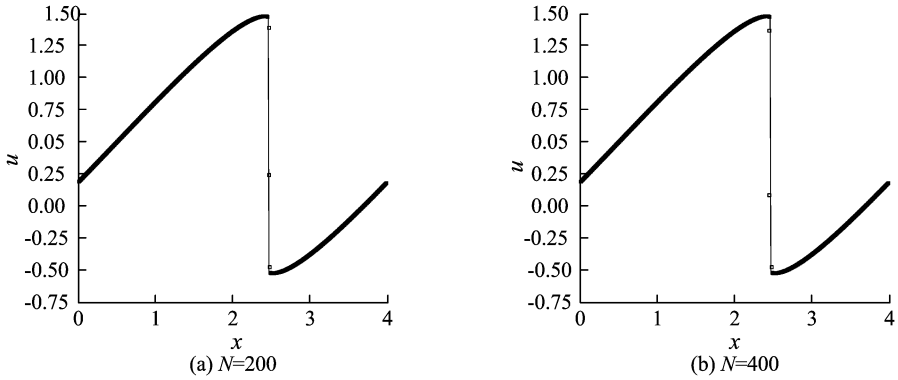


图 1 一维线性标量 Burgers 方程

Fig. 1 Dimensional linear scalar quantity Burgers equations

例 3 Euler 方程的激波管问题

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}_x = 0, \tag{13}$$

其中: ρ, v, p 分别表示密度、速度和压力,而总能量为 $E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho v^2, \gamma = 1.4$. 求解 Lax 激波管初值问题

$$\begin{cases} (\rho, v, p) = (0.445, 0.698, 3.528), & x \leq 0 \\ (\rho, v, p) = (0.5, 0, 3.571), & x > 0, \end{cases}$$

和 Sod 激波管初值问题

$$\begin{cases} (\rho, v, p) = (1.0, 0, 1.0), & x \leq 0 \\ (\rho, v, p) = (0.125, 0, 0.1), & x > 0, \end{cases}$$

分别计算到时间 1.6 和 2.0,如图 2 所示. 可以发现,数值解几乎没有非物理的数值振荡.

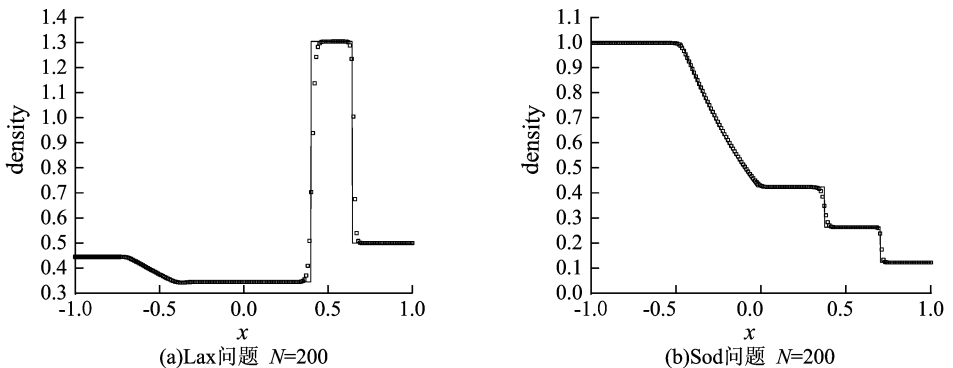


图 2 Euler 方程的 Riemann 初值问题

Fig. 2 The Riemann value problem for Eulerian equations

例 4 Euler 方程,初值条件为

$$\begin{cases} (\rho, v, p) = (3.857143, 2.629369, 10.333333), & x < 4 \\ (\rho, v, p) = (1 + \varepsilon \sin(5x), 0, 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon = 0.2$. 前面的例子只是检验数值方法的精度和激波处理的能力,通常二阶的数值方法都能够很好地求解它,因而不能体现高精度高分辨率的数值格式的优越性. 对于既包含激波又包含复杂的光滑结构的求解,高精度格式才能完美体现其优点. 利用当前格式计算时间 $t = 1.8$ 时的结果如图 3 所示,采用 2000 网格点的 Runge-Kutta 时间离散的五阶 WENO 格式的计算结果作为解析解. 可以发现高阶格式在处理具有复杂光滑区域问题上的优越性,因为当 $N = 400$ 时就可以清晰的看到数值解的激波结果和复杂光滑结构.

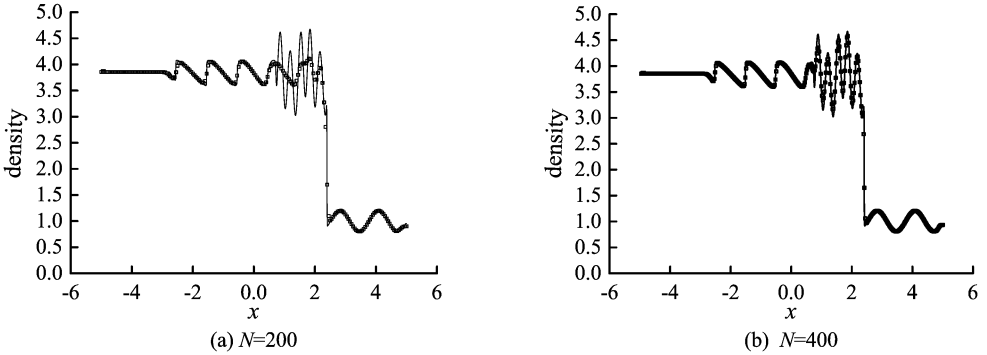


图 3 Euler 方程激波密度波碰撞问题

Fig. 3 The collision problem between shock and density wave for Eulerian equation

例 5 两强激波相互碰撞. 考虑 Euler 方程组初值条件

$$\begin{cases} (\rho_l, v_l, p_l) = (1, 0, 1000), & x \leq 0.1, \\ (\rho_c, v_c, p_c) = (1, 0, 0.01), & 0.1 < x < 0.9, \\ (\rho_r, v_r, p_r) = (1, 0, 100), & x > 0.9. \end{cases}$$

计算区域为 $[0, 1]$, 在左右边界上都采用反射边界条件. 计算到时间为 0.038. 由于激波比较强烈,许多数值方法在模拟这个问题的时候经常会产生非物理意义上的负值,从而中断计算,因而它是在所选取的数值算例中最考验数值方法好坏的例子^[7]. 本文用有限差分优化方法模拟这个问题时就出现了困难,因为只有在 CFL 数非常小的时候才能稳定下来,由于 CFL 数非常小,势必导致时间步长很短,从而影响计算时间,使优化策略得不偿失. 可喜的是,有限体积方法^[16]下的优化能够在正常的 CFL ($CFL = 0.6$) 下稳定,图 4 的计算结果显示间断处理得非常的锐利,数值结果令人满意.

例 6 二维的 Burgers 方程

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x + \left(\frac{u^2}{2}\right)_y = 0, \quad (14)$$

初值条件为 $u(x, y, 0) = 0.5 + \sin[\pi(x + y)/21]$, 在区域 $[0, 4] \times [0, 4]$ 上采用周期边界条件. 在时间 $t = 1.5/\pi$ 时的结果如图 5 所示. 可以发现数值格式对二维问题也不会产生非物理振荡.

例 7 二维的双马赫反射问题. Mach 数为 10 的激波,以 60° 角在墙上反射,未扰流体的密度 $\rho = 1.4$, 压力 $p = 1.0$. 计算区域 $[0, 4] \times [0, 1]$, 反射墙位于区域底边 $1/6 < x < 4$. 左右边界分别以入流出流条件,在底边上 $0 < x < 1/6$ 的部分赋以准确的波后条件,其余部分是反射墙,上边界为 Mach 数为 10 的激波精确解,即以激波速度移动,波头左边赋以波

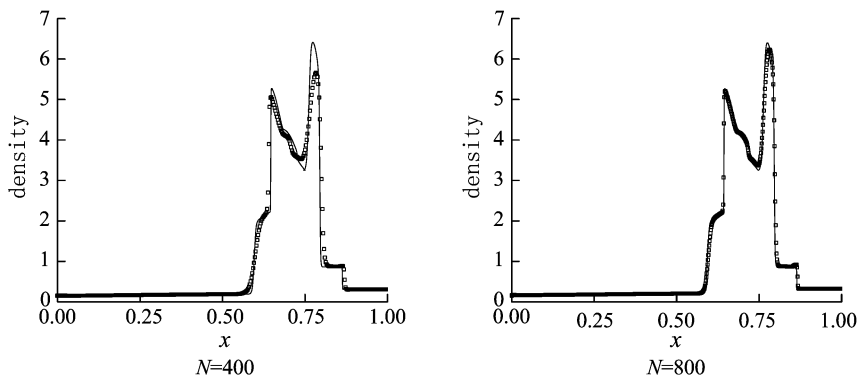


图 4 Euler 方程强激波碰撞问题

Fig. 4 Interacting strong blast waves of Eulerian equation

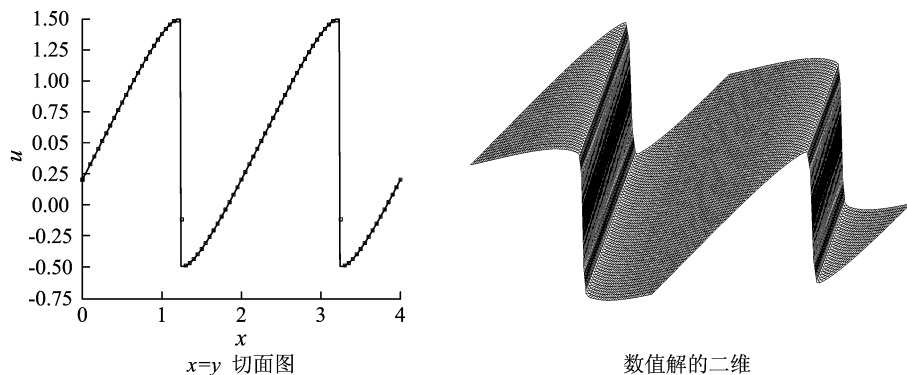


图 5 二维 Burgers 方程, 80 × 80

Fig. 5 2-dimensional Burgers equations

后条件, 右边赋以波前条件, 计算到时间 $t = 0.2$. 计算结果如图 6、图 7 所示, 图中画出了 30 条等值线. 需要说明的是:

(I) 此方法可节省时间, 但同时也大大增加了存储量. 一维问题节省时间比多维问题多. 有限差分方法比有限体积方法节省时间多. 而节省时间的多少与编译器和操作系统有关. 在 2G CPU 处理器和 512M 内存的 IBM 机器上, 编译器为 Compaq Visual Fortran 6.5, 对于 Lax 激波管, 优化的 WENO 格式可将计算效率提高 20 ~ 25%, 而对于二维双马赫反射问题, 计算效率提高并不明显, 在 6% 左右. 比较有限差分方法而言, 有限体积方法由于占用的存储量更大, 因而计算效率没有大的提高, 尤

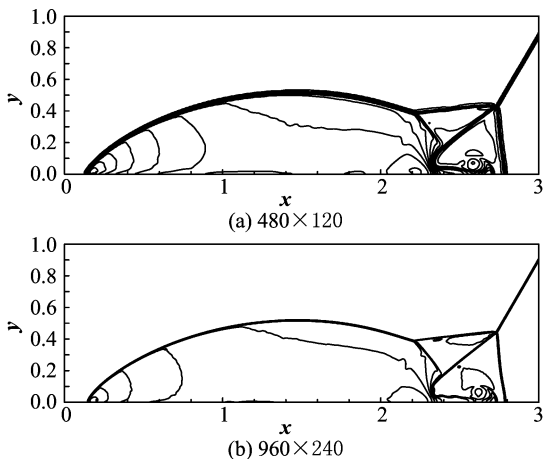


图 6 双马赫反射问题的密度从 1.5 到 22.7 的 30 条等值线图

Fig. 6 Double Mach reflection paroblem; Damsity ρ ; contour lines from $\rho = 1.5$ to $\rho = 22.7$

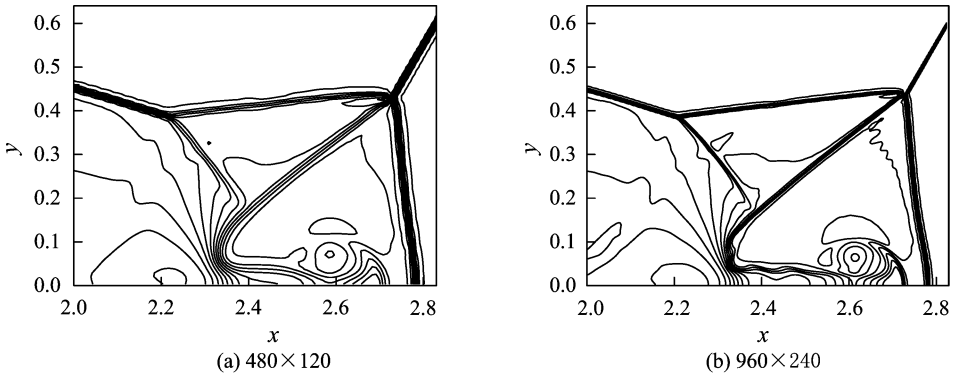


图 7 双马赫反射问题的密度从 1.5 到 22.7 的 30 条等值线局部放大图

Fig. 7 Double Mach reflection problem. Blon-up region around the double Mach system.

Density ρ ; 30 contour lines from $\rho = 1.5$ to $\rho = 22.7$

其对二维方程组,几乎没有提高计算效率。

(II)对强激波问题利用这种缩时策略可能会出现问題. 比如强激波碰撞的例子. 有限差分 WENO 方法在 CFL 条件下会计算出非物理的负值而不能很好地模拟, 虽然降低 Courant 数的大小可以改善这种情况, 但这样也就失去了缩时的优点. 可喜的是, 有限体积的 WENO 方法可以在相同的 CFL 条件下模拟强激波碰撞的问题。

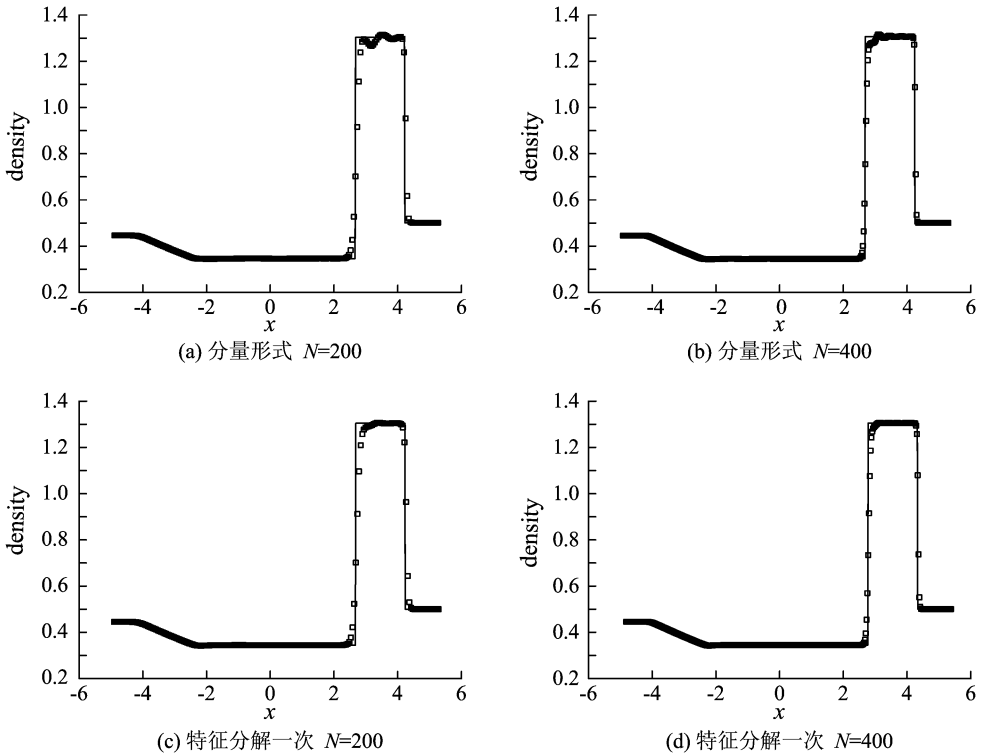


图 8 Lax 激波管问题

Fig. 8 Lax shock wave pipe problem

影响计算效率的原因主要有二. 一是为避免 Gibbs 现象进行的非线性权值的计算, 可以通过减少非线性权得计算次数的方法取得了提高计算效率的结果. 二是由于特征分解, 许多论文都提到在高精度的数值格式求解双曲守恒问题时, 采用分量形式的方法会产生非物理振荡, 为了避免这种振荡, 特征分解是必须的, 但由此耗费了大量的计算时间, 因而从特征分解的角度去考虑提高效率的策略也是可取的.

接下来通过数值算例的比较考虑利用特征分解以缩短计算时间. 我们以 Lax 激波管算例作为例子. 时间离散采用三阶的 TVD-Runge-Kutta 方法, 而空间离散采用有限差分五阶 WENO 格式. 利用分量形式得到的数值解在接触间断附近有许多振荡 (图 8 所示), 而经过特征分解后, 数值结果非常的光滑, 不能从肉眼看到激波附近的振荡. 可以发现, 由于特征分解非常耗时, 因而计算时间上, 分量形式的 WENO 格式快许多. 和前面减少非线性权的方法相类似的, 只在 Runge-Kutta 时间离散的最后一步特征分解, 而前几步仍然采用分量形式. 从图 8 分析, 虽然数值解还有一些振荡, 但是与纯分量形式的方法相比, 振荡的幅度减少了许多. 而且只经过一步特征分解可以减少一半的时间.

参 考 文 献

- [1] Balsara D and Shu C W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order accuracy [J]. J Comput. Phys. ,2000,160: 405-452.
- [2] Deng X and Zhang H. Developing high-order weighted compact nonlinear schemes. J. Comput. Phys. ,2000,165: 22-44.
- [3] Friedrichs O. Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids [J]. J Comput. Phys. ,1998,144: 194-212.
- [4] Harten A, Engquist B, Osher S and Chakravarthy S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III [J]. J Comput. Phys. ,1987,71: 231-303.
- [5] Harten A and Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, I, SIAM J. Numer. Ana. ,1987,24: 279-309.
- [6] Hu C And Shu C W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes [J]. J Comput. Phys. ,1999,150: 97-127.
- [7] Jiang G S and Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. J Comput. Phys. ,1996,126: 202-228.
- [8] Levy D, Puppo G and Russo G. On the behavior of the total variation in CWENO methods for conservation laws [J]. Appl. Numer. Math. , 2000,33: 407-414.
- [9] Levy D, Puppo G and Russo G. A third order central WENO scheme for 2D conservation laws [J]. Appl. Numer. Math. , 2000, 33: 415-421.
- [10] Levy D, Puppo G and Russo G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws [J]. Math. Model. Numer. Anal. ,1999, 33: 547-571.
- [11] 李荫藩, 宋松和, 周铁. 双曲守恒律的高阶, 高分辨有限体积法 [J]. 力学进展, 2001, 31: 245-262.
- [12] Liu X D, Osher S and Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. J Comput. Phys. ,1994,115: 200-212.
- [13] Qiu J X and Shu C W. On the construction, comparison and local characteristic decomposition for high order central WENO schemes [J]. Submit to J Comput. Phys.

duced birefringence of fibers. A linear relationship between wavelength separation of FBG and transverse loading is obtained experimentally. A multi-point distribute transverse load sensing by means of wavelength addressing is also investigated with an experiment of two-grating simultaneous sensing.

Key words: fiber Bragg grating; transverse load; stress induced birefringence; resonance wavelength separation; multi-point distribute sensing

(上接第 37 页)

- [14] Qiu J X and Shu C W. Finite difference WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretizations[J]. Submit to SIAM J Sci. Comput.
- [15] Shi J, Hu C and Shu C W. A technique of treating negative weights in WENO scheme[R]. ICASE Report No. 2000-49.
- [16] Shu C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[R]. ICASE Report No. 97-65.
- [17] Wang Z J and Chen R F. Optimized weighted essentially non-oscillatory schemes for linear waves with discontinuity [J]. J Comput. Phys. ,2001,174: 381-404.

Some Optimal Methods for WENO Scheme in Hypabolic Conservation Laws

XU Zhen-li, QIU Jian-xian, LIU Ru-xun

(Department of Maths, USTC, Hefei, Anhui, 230026)

Abstract: WENO (weighted Essentially Non-Oscillatroy) is a high-resolution numerical scheme used for solving equations of hyperbolic conservation laws. In this paper, some optimal strategies of the WENO scheme of hyperbolic conservation laws are discussed and the time of nonlinear weighted computation and characteristic decomposing is reduced. By some numerical examples, the feasibility of these strategies is proved and the advantages and disadvantages compared.

Key words: WENO scheme; hyperbolic conservationa law equation; Runge-Kutta method