

# 智能抛物面桁架天线的建模和模型降阶\*

王永<sup>1</sup>, 马运领<sup>1</sup>, 陈斌<sup>1</sup>, 孙红灵<sup>2</sup>, 张培强<sup>2</sup>

(1. 中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

(2. 中国科学技术大学力学和机械工程系中科院材料力学行为与设计重点实验室, 安徽合肥 230027)

**摘要:**设计了一个智能抛物面桁架天线, 采用有限元方法得到了它的动力学模型. 由于此模型的阶次太高, 给以后的振动控制工作带来了极大的困难. 采用模态集结法对其高阶模型进行降阶. 通过零极点比较、输出曲线比较和将针对低阶模型设计的线性二次型最优控制律加入原高阶模型等方法对降阶结果进行了验证.

**关键词:**智能桁架天线; 振动控制; 有限元方法; 建模; 模型降阶; 线性二次型最优控制

**中图分类号:** TP13 ; O32      **文献标识码:** A

## 0 引言

在航天领域, 由于运载重量和运载容量的限定, 要求天线轻质可展. 因此, 大型可展抛物面天线, 是航天器天线的发展趋势. 早在 1969 年, Fager 和 Garriott 已提出大口径可展天线的概念<sup>[1]</sup>. 自 90 年代以来, 日本在可展天线方面作了大量的工作, 很多天线已投入使用. 我国在这方面起步较晚, 工作主要集中在结构设计上<sup>[2~3]</sup>. 为满足天线工作要求, 天线必须有足够的表面精度. 由于航天器姿态的变化以及其他随机振动的影响, 天线会产生振动, 从而影响反射面的精度, 必须对其进行振动控制. 鉴于以上考虑, 设计了一个由桁架构成的抛物面天线模型.

智能桁架结构是航空航天领域中近年来广泛研究和发展的—种新型结构, 它将作动和传感元件集成—体形成的主动构件(如压电主动控件)配置在结构中, 取代原结构中某些关键部件, 使结构具有智能于外界环境变化的能力. 近年来, 利用智能桁架结构自身的主动构件产生的内作动力, 实现结构的振动控制得到了很大的重视, 并进行了多种控制方法的理论和实验研究<sup>[4~6]</sup>. 然而, 在国内, 对于桁架天线的振动都是从结构的角度来分析, 目前还没有发现从控制的角度对其进行振动分析. 因此, 本文基于智能抛物面桁架天线结构的动力学方程, 首先利用模态集结法对它进行了模型降阶, 然后针对降阶后的模型设计了线性二次型最优控制律, 并应用到原系统, 实现了智能桁架结构的振动控制.

\* 收稿日期: 2003-11-28

基金项目: 安徽省自然科学基金(03042303)资助项目.

作者简介: 王永, 男, 1962 年生, 工学博士/教授、博士生导师. 研究方向: 航空航天控制、振动主动控制和农业环境信息采集与控制等. E-mail: yongwang@ustc.edu.cn

### 1 天线模型

可展天线多采用模块化设计,其优点是杆件类型少,结构拓扑容易. 本文不涉及展开动力学问题,只考虑展开后固定形状的动力学特性,并对其进行控制. 初步设计了由 106 根杆组成的抛物面桁架天线作为研究对象. 该天线由 9 个模块组成,基本模块为六棱柱,由 18 根杆组成(如图 1). 图 2 为其杆编号示意图. 它共有 32 个节点,节点为铰接. 天线的内表面为有效抛物面,抛物面方程:

$$z - \frac{1}{2f}(x^2 + y^2) = 0. \tag{1}$$

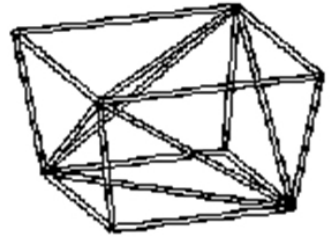


图 1 基本模块  
Fig. 1 Basic module

### 2 有限元建模

将图 2 天线模型中的第 37 根杆<sup>[10]</sup>换成压电主动控件,由材料常数的改变而引起的特征频率的改变很小,故可以忽略不计. 同时,为了避免对结构进行重复建模,引入压电主动控件以后,只考虑其控制作用,不考虑其材料常数对结构的影响.

采用有限元方法,得到智能抛物面桁架天线的质量矩阵  $\bar{M}$  ( $84 \times 84$ ), 阻尼矩阵  $\bar{C}$  ( $84 \times 84$ ), 刚度矩阵  $\bar{K}$  ( $84 \times 84$ ) 和由各桁架单元的方向余弦向量组成的方向余弦矩阵  $\bar{F}$  ( $84 \times 81$ ). 于是整个智能桁架结构的动力学方程<sup>[7,8]</sup>为:

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{x}} + \bar{C}\dot{\mathbf{x}} + \bar{K}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{u}, \tag{2}$$

其中:  $\mathbf{x}$  为由桁架天线的 28 个节点在空间坐标下  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴方向的位移分量构成的向量,  $\mathbf{u}$  为

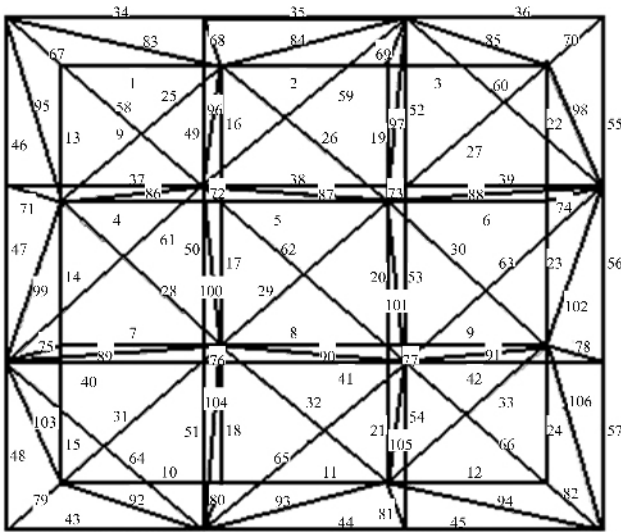


图 2 杆编号示意图

Fig. 2 Sketch map of bar number

主动构件产生的控制力向量.

令  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$ , 则方程(2)可以写成方程(3)所示:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{3}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\bar{M}^{-1}\bar{K} & -\bar{M}^{-1}\bar{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{M}^{-1}\bar{F} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}$  为  $168 \times 168$  的矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $168 \times 1$  的矩阵.

另外,考虑第 4 个节点的  $z$  方向的位移输出,由此建立系统的测量方程

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4)$$

$\mathbf{C}$  为  $1 \times 168$  的矩阵. 由此得到智能抛物面桁架天线的有限元数学模型的 168 阶的单输入单输出状态方程.

### 3 模型降阶

由于得到的有限元模型的阶次太高, 如果直接使用高阶模型来进行系统仿真或设计控制方案极其困难, 因此考虑采用模型简化方法得到性能与原有的高阶模型相近似的低阶模型.

#### (I) 模型降阶方法的选择

对降阶过程的首要要求是精度, 要求降阶模型的特性与实际受控对象的特性有较好的近似性, 但仅仅考虑精度是不够的. 例如所研究的智能桁架天线的有限元模型, 它包含了前 84 阶的模态及固有频率信息, 而在实际情况中, 比较经常出现而且阻尼较小、衰减较慢的是前 3 阶模态, 而其余的高阶模态出现的几率较小, 更重要的是高阶模态的材料阻尼较大, 使得即使出现高阶振动也会很快被衰减. 因此需要研究和控制的主要是前三阶模态, 那么在降阶过程中希望被简化掉的是不受关心的高阶模态. 由此出发点选择合适的降阶方法.

在常用的降阶方法中, 代价分析法用能量作为性能指标, 将能量贡献较小的分量略去, 但是它要求系统既能控又能观, 这个条件对于桁架天线结构太苛刻; 平衡降阶法通过构造与系统等价的平衡实现, 忽略平衡系统能控能观对角矩阵中较小元素对应的状态, 得到降阶模型, 但该方法只能对系统能进行平衡实现的部分(即可控可观部分)进行降阶, 而桁架天线结构的能控能观性均较差, 因此该方法也不适用.

模态集结法是通过寻找合适的集结矩阵将系统的状态变量进行合并, 用数目较少的一组状态变量来描述系统的模型, 而系统的本质特性保持不变. 更重要的是, 模态集结法可以保持原系统的主模态. 因此考虑采用模态模态集结法来简化高阶有限元模型.

#### (II) 模态集结法模型降阶

集结的思想起源于经济理论, 经济学家很早以前就使用集结的方法将同类产品合并起来研究宏观经济和微观经济之间的关系. Acki 是在模型简化和大规模动态系统控制中使用集结概念的倡导者. 模态模态集结法又称之为主极点模态集结法, 采用模态集结法进行降阶的过程也就是寻找合适的集结矩阵的过程<sup>[9]</sup>.

现使用模态模态集结法将原来的高阶系统降阶为只有三个模态的低阶系统.

对于方程(3)和(4)描述的高阶矩阵, 可通过寻找集结矩阵  $\mathbf{H}$ , 得到方程(5)的关系式:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t), \quad (5)$$

$\mathbf{H}$  为  $6 \times 168$  的常数集结矩阵,  $\mathbf{z}(t)$  为  $6 \times 1$  的向量, 称为状态  $\mathbf{x}(t)$  的集结, 即集结状态向量. 降阶后的系统模型可以表示成

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{K}\mathbf{z}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

$\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{K}$  分别为  $6 \times 6$ 、 $6 \times 1$ 、 $1 \times 6$  的矩阵,  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  为  $1 \times 1$  的近似输出向量. 方程(6)中的矩阵对  $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$  满足

$$\left. \begin{aligned} FH &= HA \\ G &= HB \\ KH &\cong C \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

集结矩阵  $H$  由方程(8)确定,

$$H = M_i P M^{-1}, \quad (8)$$

$M$  是系统(3)、(4)的模态矩阵;  $M_i$  是  $6 \times 6$  的矩阵, 包含  $A$  对应于原系统保留模态的 6 个主特征值;  $P = [I_1 \quad 0]$  是  $6 \times 168$  的变换矩阵, 则  $F, G, K$  如方程(9)所示

$$\left. \begin{aligned} F &= M_i P M^{-1} A M P^T M_i^{-1} \\ G &= M_i P M^{-1} B \\ K &= C H^+ = C H^T (H H^T)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于模态集结法的主要目的是通过状态的合并来保持系统的主要模态, 但是对系统的输出并不能保持不变, 只能保证输出中的主要模态的存在, 使  $y \cong \hat{y}$ , 因此有时为了保证系统的静态增益, 需要在  $\hat{y} = Kz(t)$  上加加以修改. 对于本文所研究的智能桁架天线的降阶后的模型, 静态增益修正因子  $\sigma = 0.1427$ , 即  $\hat{y} - \sigma Kz(t) = 0.1427 Kz(t)$ .

(III) 模型降阶后的结构和验证

对有限元 168 阶模型采用模态集结法进行降阶, 为衡量降阶的结果, 将降阶前后系统的极点进行比较.

表 1 降阶前系统的前 10 阶零极点

Tab. 1 Zeros and poles of the first 10 order modes of unreduced system

序号	零点	极点	对应频率/Hz
1,2	-0.027 9±954.111 4i	-0.025 6±600.803 7i	95.620 8
3,4	-0.026 9±1 012.495 6i	-0.026 3±865.389 4i	137.731 0
5,6	-0.035 5±2 693.207 3i	-0.030 5±1 163.298 5i	185.144 7
7,8	-446.638 1±2 802.036 9i	-0.029 8±2 466.201 8i	392.508 2
9,10	446.588 7±2 802.047 9i	-0.035 8±3 128.023 8i	497.840 4
11,12	-0.032 1±3 732.249 7i	-0.029 9±3 433.601 7i	546.474 7
13,14	-0.028 7±4 320.792 8i	-0.032 1±4 129.538 4i	657.236 5
15,16	-0.043 6±4 628.440 0i	-0.035 1±4 275.102 0i	680.403 6
17,18	-0.043 0±5 501.071 1i	-0.038 7±4 736.240 6i	753.796 1
19,20	-0.038 2±6 140.878 4i	-0.042 5±5 544.957 9i	882.507 5

表 2 降阶后系统的零极点

Tab. 2 Zeros and poles of reduced system

序号	零点	序号	极点	对应频率/Hz
1	-59.818 0	1,2	-0.025 6±600.803 7i	95.620 8
2,3	25.640 1±993.426 9i	3,4	-0.026 3±865.389 4i	137.731 0
4,5	-27.687 5±989.207 4i	5,6	-0.030 5±1 163.298 5i	185.144 7

从对表 1 和表 2 的比较中可以看出,降阶后的系统精确保留了原系统的第一阶、第二阶和第三阶固有频率对应的主要模态.降阶前后的系统的 Bode 图如图 3 所示.

从图 3 可以看出,降阶后的系统很好的保留了原系统前三阶的主要模态和主要特征.

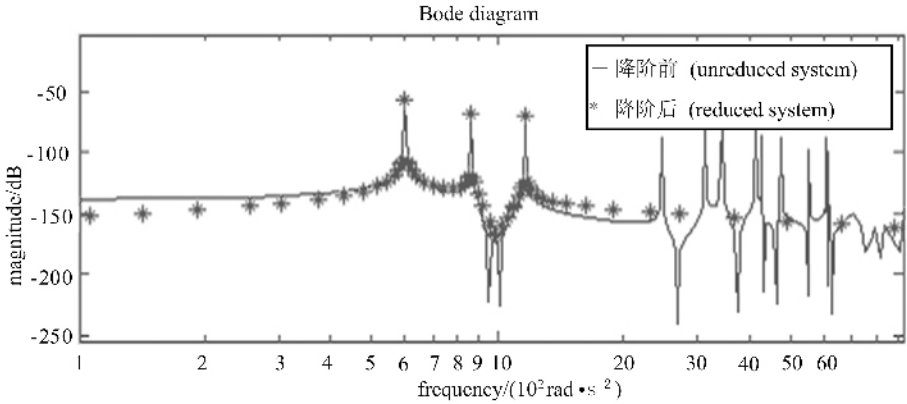


图 3 降阶前后 Bode 图比较

Fig. 3 The compare of Bode graph of reduced system and unreduced system

为进一步检验降阶结果,给降阶前的系统和降阶后的系统分别输入单位方波(左)和白噪声(右),得到的输出如图 4 所示.

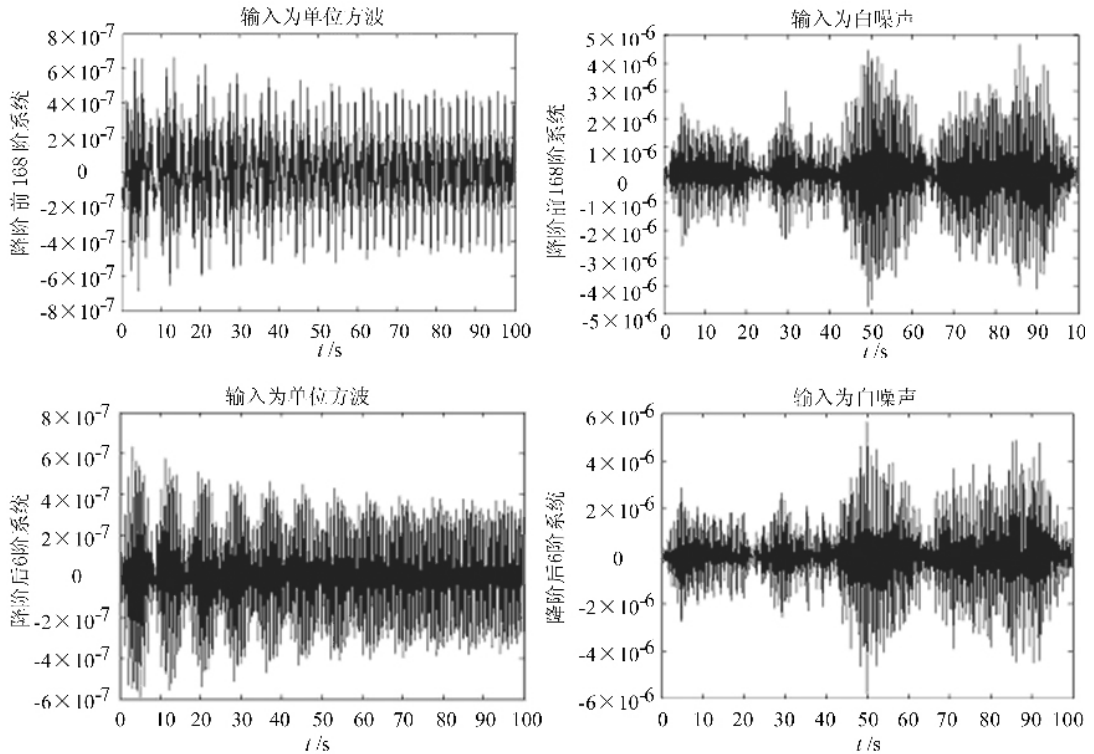


图 4 输入方波和白噪声时系统降阶前后的比较

Fig. 4 The compare between unreduced and reduced system when input are square wave and white noise

从图中可以看出,降阶前后系统在相同的输入下,输出曲线的形状和幅值都基本相同。其中采用白噪声是为了激起原系统的所有振动模态,以考察截断高阶模态对系统的影响,从图上可以看出,保留系统的前三阶模态已经足够描述系统的大致特性,截断的部分对系统不会有太大的影响。图 4 从曲线上进一步验证了降阶的可行性和有效性。

在柔性振动主动控制中,由于高阶模态的衰减很快,对于整个系统的影响比较小,可以近似忽略不计。模态集结法是基于模态截断原理的,即只保留对系统影响很大的低阶模态,而忽略高阶模态。因此,只要保证降阶后的模型在低频段能够很好逼近原系统,并且可以有效的抑制噪声,就可以称为一个满意的降阶模型。对于高频段的模型偏差可以通过溢出抑制或鲁棒控制的方法来加以解决。从上面分析可以看出,采用模态集结法对原高阶系统进行模型降阶,保留了原系统的主要模态和特性,得到令人满意的结果。

对降阶后的系统设计控制律,并将其加入高阶原系统,以进一步验证降阶的结果。采用带状态观测器的线性二次型最优控制律设计方案,将目标函数选为

$$J(u) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt. \quad (10)$$

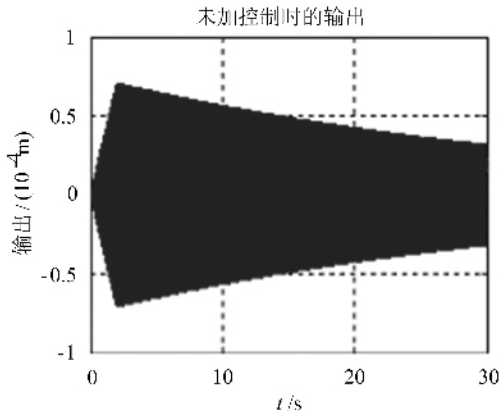


图 5 6 阶系统最优控制曲线

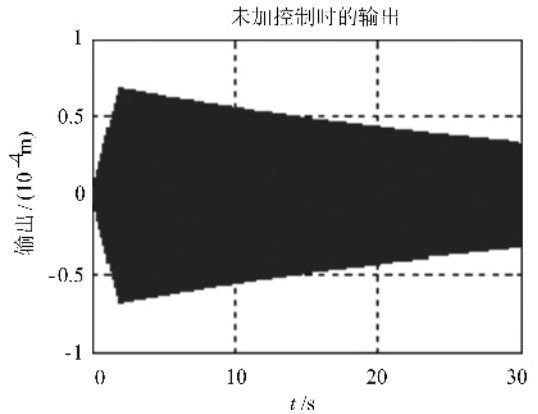


图 6 原系统最优控制曲线

Fig. 5 Optimal control curve of 6 orders system

Fig. 6 Optimal control curve of unreduced system

选取  $Q = 20, R = 1$ , 对降阶后的 6 阶系统设计控制律得到控制效果如图 5 所示, 首先

使用与原系统一阶模态相同频率的正弦信号激励降阶后的系统 2 s, 发现, 未加控制律时降阶后的系统需要 200 s 的时间才可以衰减到零, 而加上控制律的系统仅用了 4.2 s 的时间就衰减到零。

同样的, 采用与原系统一阶模态相同频率的正弦信号激励原系统 2 s, 将该控制律加入原 168 阶高阶系统, 得到控制效果如图 6 所示。从图中可以看出, 将对 6 阶系统设计的控制律用于 168 阶原系统效果很好, 振动得到明显的抑制。未加控制律时原系统需要 270 s 的时间才可以衰减到零, 而加上控制律后, 系统仅用了 30 s 的时间就衰减到零。它们的比值是 1 : 9, 可见加入控制律的效果是非常明显的, 这同时也说明了降阶的有效性。

## 4 结论

本文针对自行设计的智能抛物面桁架天线结构, 首先分析了它的结构特点, 然后利用有限元方法建立了它的数学模型, 并对它进行了有限元分析。但由于通过有限元分析方法得到的数学模型阶次太高, 无法直接用于控制律的设计, 因此, 对有限元建模得到的 168 阶模型采用模态集结法降阶, 仅保留前三阶模态得到 6 阶模型。通过比较降阶前后的零极点、波特图和输出曲线等, 验证了降阶模型很好地保留原高阶系统的前三阶模态信息。最后, 将针对降阶后 6 阶模型设计的控制律用于控制原 168 阶系统, 有效地抑制了系统的振动, 得到很好的效果。数值仿真结果表明, 采用模态集结法对高阶桁架模型进行降阶是切实可行的, 针对降阶后模型设计的最优控制律也是很有有效的。

## 参 考 文 献

- [1] Panossian H V. Model order reduction techniques in large space structure application [C]. The 33 AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structural Dynamics and Material Conference, 1992, 13-15.
- [2] 唐宝富. 天线模态分析[J]. 电子机械工程, 2001, 4: 21-24.
- [3] 张淑杰, 关富玲, 张京街. 大型空间可展网状天线的形面分析[J]. 空间结构, 2001, 7 (2): 44-48.
- [4] Fanson J L, Garba J A. Experimental studies of active members in control of large space structures[C]. Proceedings of the 29th AIAA/SDM conference, 1988, AIAA-88-2207, 9-17.
- [5] Chen G S, Lurie B J, Wada B K. Experimental studies of adaptive structures for precision performance [C]. Proceedings of the 30th AIAA/SDM conference, 1989, AIAA-89-1327-CP, 1 462-1 472.
- [6] Fanson J L, Blackwood G H, Chu C C. Active member control of precision structures [C]. Proceedings of the 30th AIAA/SDM conference, 1989, AIAA-89-1329-CP, 1 480-1 494.
- [7] 李俊宝, 张令弥. 智能桁架结构局部力反馈振动控制及其主动控件的配置研究[J]. 振动工程学报, 10(3): 380-386.
- [8] 石银明, 华宏星, 李中付等. 主动约束层阻尼悬臂梁的有限元建模[J]. 压电与声光, 2002, 22: 426-429
- [9] 詹姆希迪 M. 大系统的建模与控制[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [10] 孙红灵, 何雪飞, 马云领等. 抛物面桁架天线振动控制中主动杆件的优化配置[J]. 宇航学报, 2004.

## Modeling and Model Reduction of Intelligent Paraboloid Truss Antenna

WANG Yong<sup>1</sup>, MA Yun-ling<sup>1</sup>, CHEN Bin<sup>1</sup>, SUN Hong-ling<sup>2</sup>, ZHANG Pei-qiang<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, USTC, Hefei 230027, China; 2. Department of Mechanics and Mechanical Engineering, USTC, CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Material, Hefei 230027, China)

**Abstract:** An intelligent paraboloid truss antenna is designed and its dynamic model is presented by means of finite element method. The model has a higher order, which brings a lot of difficulties in our later work of vibration control. Then the high order model was reduced by the modal aggregation method. The order-reduced results are verified by comparing the zeros, poles and outputs curves before and after the order reduction and applying the linear quadratic optimal control law for low-order model to the high-order model.

**Key words:** intelligent truss antenna; vibration control; finite element method; modeling; model reduction; linear quadratic optimal control

---

(上接 511 页)

## Key Problem Analysis of the Climbing Structure of Highly Mobile Over-Obstruct Robots

WANG Xin, YANG Dong, XU Min, FAN Ming-cong  
WU Yue-hua, DU Hua-sheng, YANG Jie

(Department of Precise Machine and Precise Instrument, USTC, HeFei 230027, China)

**Abstract:** This paper presents a mobile robot which is adaptive to unknown unstructured environments. It includes a combined transformed structure consisting of a climbing structure with double cranks and springs and two high-position quadrangles. The combination of wheels and feet has been realized so that the structure has strong self over-obstruct ability. Based on the six-wheel highly mobile over-obstruct robot, a mechanical model of the climbing structure is constructed and a method of optimization is presented for the structure parameter of the climbing structure with ADAMS simulation tool and experiment means. Subsequently, a comparison of the mechanical analysis of cranks with and without springs is performed by the principle of virtual displacement which analyses quantitatively and verifies the important effect of climbing structures' springs during over-obstruct process.

**Key words:** climbing structure; optimization design; double-crank structure; principle of virtual displacement