文章编号: 1000-6788(2010)04-0723-09 中图分类号: N94; O159 文献标志码: A

变权层次分析法

李春好 [1], 孙永河 [1,2], 贾艳辉 [3], 杜元伟 [1,2]

(1. 吉林大学 管理学院, 长春 130025; 2. 昆明理工大学 管理与经济学院, 昆明 650093; 3. 吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130025)

摘　要 为克服传统层次分析法 (AHP) 因采用固定不变的权重体系以及在此基础上的不因方案变化而变化的复合排序方法而不能反映复杂系统非线性、涌现性等本质特征的缺陷, 在借鉴现有多目标变权决策方法变权思想的基础上, 通过构建评价问题的新分析结构和方案评价的价值体系给出了一种关于方案优选排序的变权 AHP 实现方法, 并对该方法的变权机理及其相对于传统 AHP 的优点予以了理论分析. 实例应用表明, 变权 AHP 方法具有较好的实际应用可行性.

关键词 层次分析法; 变权; 分析结构; 价值体系; 决策; 方案排序

Analytic hierarchy process based on variable weights

LI Chun-hao[1], SUN Yong-he[1,2], JIA Yan-hui[3], DU Yuan-wei[1,2]

(1. School of Management, Jilin University, Changchun 130025, China; 2. Faculty of Management and Economics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China; 3. School of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract Traditional analytic hierarchy process (AHP) has the flaw of its fixed weights system (FWS) and the composite ranking approaches based on FWS, incapable of reflecting basic characteristics of complex evaluation issues, such as nonlinearity, emergence, etc. To overcome the above flaw, with the idea of weight varying (WV) adopted, a new alternative ranking approach based on variable weights is given by the way of constructing a new analysis structure of AHP evaluating problems and its corresponding value system for evaluating alternatives. The mechanism of WV in the new approach and its advantages over the traditional AHP are also analyzed. Applied to a real example, the approach is validated to be feasible and applicable.

Keywords analytic hierarchy process; variable weight; analysis structure; value system; decision-making; alternative ranking

1 引言

美国著名运筹学家 Saaty 教授提出的层次分析法 (Analytic hierarchy process, AHP) 是一种适合于复杂问题的定性与定量相结合的系统分析与决策方法 [1]. Badiru 通过引入事件的状态和概率对 AHP 予以改进, 提出了动态决策的 DDM 模型及软件 [2]. 尽管 AHP (包括 DDM) 自提出以来已被广泛应用于社会、经济、管理等诸多领域, 但因其会产生方案逆序问题 (即增加一个新方案或删除原有的一个方案后原有方案或其余方案的相对排序发生变化的问题) 而倍受专家学者的置疑与批评 [3−7]. Barzilai 和 Golani 指出, 错误地采用加法型集成函数是导致传统 AHP 出现逆序问题的一个重要根源 [7]. 由此根源出发, 作者进一步认为, 建构在因素固定权重 (简称为固权) 体系上的、反映系统要素相互作用机理的少数几种特定的方案复合排序方法很有可能出现方法模型的失效问题. 其中原因在于: 复杂系统内部因素 (如方案、指标、准则等) 之间蕴含

收稿日期: 2008-12-07
资助项目: 国家自然科学基金 (70971054, 70471015); 教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-09-0368); 教育部人文社会科学研究规划项目 (09YJA630047); 教育部科技发展中心 “网络时代的科技论文快速共享” 研究专项 (2009111); 吉林省软科学研究项目 (20080610); 吉林大学基本科研业务费资助项目 (2008JC012); 昆明理工大学组织行为与复杂行为决策创新团队支持计划
作者简介: 李春好 (1967–), 男, 辽宁盖州人, 教授, 博士生导师, 研究方向: 复杂系统管理决策, 项目管理; 孙永河 (1978–), 男, 山西大同人, 博士, 研究方向: 复杂系统管理决策, 项目管理.

着许多错综复杂的非线性、动态性关系, 对系统要素之间的相互作用机理的合理近似假设在通常情况下不仅是比较困难的, 而且即使能够做出特定的近似假设也不能够断言假设的近似作用机理关系对不同评价决策问题或同一个评价决策问题的各个待评价方案均是合理的、适用的. 因此, 从复杂系统内在的机理复杂性上看, 如何采用变权思想对传统 AHP(或称作固权 AHP) 所采用的固权体系及相应的方案复合排序方法予以合理改进, 是克服固权 AHP 方法失效问题、提高 AHP 评价决策科学性的一个重要研究课题. 事实上, 在 Saaty 提出 AHP 时也曾研究了因素变权问题, 但这种变权是一种时变系统的变权 (即因素权重随时间的变化而变化), 而不是因系统因素状态值变化而变化的状态变权. 关于状态变权的概念, 我国学者汪培庄教授早在 20 世纪 80 年代研究多目标决策时就曾提出过[8], 之后, 以李洪兴教授为代表的一些学者对变权理论进行了系统的研究, 给出了处罚型变权、激励型变权与混合型变权的公理化体系和基于状态变权向量、均衡函数等概念的多目标变权决策方法[9−13]. 但是, 从已有相关成果上看, 目前不仅没有关于变权 AHP 分析方面的研究报道, 而且由于现有的多目标变权决策方法存在着状态变权向量的确定过于主观武断、因素固权概念的使用与方法构建的核心思想不一致等问题, 因此迄今尚缺乏将现有的变权分析方法直接应用于复杂问题 AHP 分析、实现 AHP 变权评价的科学依据.

下文首先为说明已有变权研究成果在 AHP 分析上的不适宜性, 分析了现有多目标变权决策方法的内在缺陷; 然后, 为解决 AHP 的固权问题以及固权 AHP 可能导致的方案复合排序方法失效问题, 依据整体论与还原论相结合的系统分析思路, 通过构建复杂评价问题的新分析结构, 给出了一种方案评价的变权 AHP 实现方法; 之后, 对该方法的变权机理与优点予以了理论分析; 最后, 通过一个实例对给出的变权 AHP 方法的实际应用可行性予以了验证, 并结合实例对因素权重是如何随着其状态变化而变化的、变权是否合理这两个问题进行了深入分析.

2 变权决策方法的缺陷分析

针对多目标决策问题, 文献 [8] 给出了如下式 (1) 所示的变权综合决策模型:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} w_i(x_1^0,\cdots,x_m^0)x_i^0 \tag{1}$$

其中, Z 为实际评价值; $x_i^0(i=1,2,\cdots,m)$ 为因素 x_i 的状态值; $w_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 是与 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0$ 有关的 x 的变权, 它满足规一性条件 $\sum_{i=1}^{m} w_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)=1$. 若记 $X=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0)$ 为因素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的状态向量, $W=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 为因素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的常权 (即固权) 向量, $S(X)=(S_1(X),S_2(X),\cdots,S_m(X))$ 为状态变权向量, 则因素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的变权向量 $W(X)=(w_1(X),w_2(X),\cdots,w_m(X))$ 可表示为 W 和 $S(X)$ 的规一化的 Hadamard 乘积. 即:

$$W(X)=\frac{W\cdot S(X)}{\sum_{i=1}^{m} w_iS_i(X)}=\frac{(w_1S_1(X),\cdots,w_mS_m(X))}{\sum_{i=1}^{m} w_iS_i(X)} \tag{2}$$

作者认为, 上述多目标变权决策方法存在如下两方面缺陷.

第一, 状态变权向量 $S(X)$ 的确定过于主观武断. 目前, 对状态变权向量 $S(X)$ 的确定主要有乐观系数法[12] 和调权水平法[13]. 乐观系数法通过专家 (决策者) 给出的乐观系数 (α) 来确定 $S(X)$, 其表达式为 $S(X)=(\mathrm{e}^{\alpha(x_1^0-\overline{x^0})},\cdots,\mathrm{e}^{\alpha(x_m^0-\overline{x^0})})$, 式中, $\overline{x^0}=(1/m)\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^0$, $\alpha\in(-\infty,+\infty)$. 从该式不难看出, 如何科学确定出 α 值是合理确定 $S(X)$ 的核心所在. 然而迄今为止, 对于 α 值如何确定的问题, 现有相关文献并没有给出对实际问题的解决较具有可操作性的方法. 文献 [12] 虽然认识到如何确定参数 α 是个深入研究的问题, 但该文只是指出: "决策者对状态值大的因素考虑的越多, α 的取值应越正大; 决策者对状态值小的因素考虑的越多, α 的取值应越负大". 显然, 这仅从变权机理上说明了决策者所考虑的因素对 α 取值的影响, 并没有给出 α 值的确定方法. 由此可见, 乐观系数法尽管有一定的理论价值, 但由于它缺乏关于 α 的合理赋值方法, 因此在实际应用中, 专家在确定 α 值时必然存在着较强的主观随意性和武断性, 这样, 其给出的 $S(X)$ 也必然具有明显的主观武断性. 文献 [13] 试图运用调权水平法来克服乐观系数法存在的内在缺陷, 并指出在一般情况下, 可通过专家给出的调权水平 $A(A\in[1/m,1])$ 来确定出 α 值及 $S(X)$. 但是, 对于 A 值如何确定的问题, 文献 [13] 只是给出了确定调权水平的一个基本原则, 即: "若对因素值的均衡性要求低, 则调权水平取低值; 若对因素值的均衡性要求高, 则调权水平取高值". 结合 A 值的取值范围可知, 上述原则仍然存在着过于笼统、实际应用可操作性差问题. 因此, 与乐观系数法一样, 调权水平法在解决实际问题时同样存在着 A 值与 $S(X)$ 确定的主观武断问题.

第二, 因素固权概念的使用与方法构建的核心思想不一致. 这主要表现在, 尽管变权决策方法构建的核心思想在于 "因素的权重是随状态向量 X 的变化而变化的"(换言之便是 "因素的固定权重并不存在"), 但在方法运用中却又要求专家进行因素固权的估计 (也就是说因素的固定权重是存在的 —— 若不然则让专家去估计什么). 退一步来讲, 即使说因素的固定权重是存在的, 现有的变权决策方法也没有给出固权的内涵定义 (如固权是在何种条件下的何种特定含义), 因而专家在使用固权、变权两个概念进行判断估计时很可能产生因界限不清楚而导致的概念逻辑混乱问题. 事实上, 受两院院士关注的文献 [14] 也有相近看法, 该文认为常权是变权的近似, 常权生成变权的模型 (即式 (2)) 是本末倒置的.

3 复杂评价问题的新分析结构

尽管现有多目标变权方法存在以上两方面的缺陷, 但它强调因素权重随着因素状态值变化而变化的变权思想, 能够较好地反映复杂系统非线性、动态性等本质特征, 对研究复杂系统 AHP 评价问题还是有着很重要的理论借鉴价值的. 借鉴多目标决策的变权思想, 我们可构建如下图 1 所示的复杂评价问题的新层次分析结构. 在新分析结构中, 与固权 AHP 类似, 仍需要将系统的各种因素按属性分解为多类因素集, 如总目标集、分目标集或准则集 (准则集可以进一步细分为子准则集)、指标集和方案集. 在图 1 中, 总目标集只有一个总目标 G, $g_1, \cdots, g_M$ 表示的是分目标集中的 M 个因素; 与之类似, $c_1, \cdots, c_H$、$s_1, \cdots, s_N$、$a_1, \cdots, a_R$ 分别表示准则集、指标集和方案集中的 H、N、R 个因素. 与固权 AHP 的分析结构相比, 新分析结构有如下两方面的不同: 其一, 因素集 (方案集和总目标集除外) 中的每个因素均根据需要划分为有限个可能的取值水平 (状态); 其二, 关于因素集与其下一层因素集之间机理关系的认识, 抛弃了固权 AHP 的还原论系统分析思路, 取而代之的是整体论与还原论相结合的系统分析思路. 固权 AHP 的还原论分析思路是在先将系统自上而下逐层分解, 然后分别以上层因素作为控制准则, 判断下层因素之间的相对重要性, 最后将各因素局部权重进行简单还原综合 (即认为整体为部分之和); 与此相对应, 新分析结构在系统分解的基础上, 依据整体论系统思维认为, 下层因素集中各因素对其上层因素集中各因素的影响并不一定是独立的, 而是可能存在着替代、匹配等复杂关联关系, 从所有下层因素的整体角度判断分析它们对上层相关因素的影响更为合理 (关于整体判断的可行性详见第 4 部分步骤 4). 为此, 将影响上层因素的下层因素视作系统投入, 将相应的上层因素视作系统投入的产出, 用向上的箭头表示系统自下而上的投入产出过程.

图 1 中, 用符号 L 及其下角标表示系统因素 (不包括总目标和方案) 的水平状态, 如 $L_{11}, \cdots, L_{1G_1}$ 表示的是分目标 g_1 的 G_1 个水平状态. 系统因素的水平状态是新分析结构区别于固权 AHP 分析结构的一个显著特征, 也是变权 AHP 方案评价的重要基础. 这里借鉴 DDM 模型的有关技术思想 [2], 通过设定参照系给出因素集中各因素 (不包括总目标和方案) 水平状态的确定 (划分) 方法. 首先, 选取因素集中各因素水平状态划分的参照系. 参照系是为了便于专家进行整体判断而选定的一个实际存在的、与待评价方案类似的参照对象 (方案) 的一组对应于分析结构各系统因素的具体实际情况 (即系统因素状态). 参照系的选取应保证专家能够比较熟悉参照对象的系统实际情况. 例如, 某房地产企业在对多个投资项目进行风险评价时, 可在该企业过去成功的投资项目中选择一个对专家来讲是比较熟悉的项目作为参照对象, 将参照对象对应于分析结构各个系统因素的实际状态作为参照系. 然后, 邀请多位 (比如 E 位) 专家共同确定出分析结构中各因素相对于参照系的几个水平状态级别 (即因素的水平状态). 根据 Saaty 教授关于分辨能力的心理学实验结论 [1], 系统因素的状态划分级别可划分为 3、5、7、9 级. 例如, 当选定 3 个级别进行状态划分时, 可以将系统因素状态划分为 "比参照水平好"、"与参照水平一样"、"比参照水平差"3 个状态. 系统因素状态的多少应视被评价方案的数量而定; 当方案数量较多时, 划分的状态级别数即状态数也需相应增加. 需要指出的是, 为方便, 图 1 中各因素的状态均是按相对参照基础由好到差予以排序的.

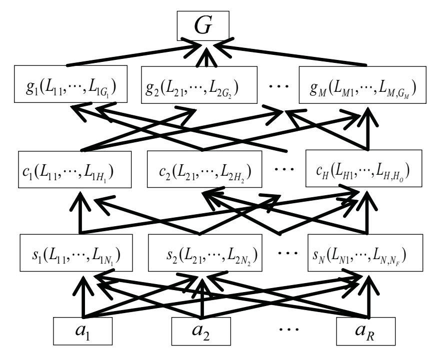

图 1 复杂评价问题的新层次分析结构

4 方案优选排序的变权 AHP 实现方法

运用变权 AHP 进行方案优选排序, 可以按如下 7 个步骤进行.

步骤 1 建立如图 1 所示的复杂评价问题的新分析结构.

步骤 2 构建分析结构下方案评价的价值体系.

分析结构下方案评价的价值体系是指对应于图 1 中各系统因素 (不包括方案和总目标) 各水平状态的一组效用偏好值 (价值). 其构建方法为: 请 E 位专家共同对图 1 因素集 (总目标集和方案集除外) 中各个因素的各个状态进行偏好判断, 并予以介于 0–100 的效用偏好赋值. 价值体系主要有以下两方面作用: ①它是实现方案评价的基础; ②它与系统因素状态的主观概率 (参见步骤 4) 相结合, 可计算出方案在各系统因素状态上的期望价值, 从而确定出方案在各系统因素上的期望状态或期望状态区间. 例如, 若指标 s_1 的 3 个状态 L_{11}、L_{12}、L_{13} 的效用偏好值分别为 100、50、0, 方案 $a_r\,(r=1,2,\cdots,R)$ 在 s_1 的 3 个状态上的主观概率分别为 0.2、0.6 和 0.2, 则参见下文步骤 4 可知, a_r 在 s_1 状态上的期望价值

$$U_r^{(s_1)}=0.2\times100+0.6\times50+0.2\times0=50,$$

进而可知 a_r 在 s_1 上的期望状态为 L_{12}; 若方案 a_r 在 s_1 的 3 个状态上的主观概率分别为 0.6、0.3 和 0.1, 则 $U_r^{(s_1)}=0.6\times100+0.3\times50+0.1\times0=75$ 进而可知 a_r 在指标 s_1 上的期望状态区间是 (L_{11},L_{12}).

步骤 3 令 $r=1$.

步骤 4 针对方案 a_r 请专家进行判断, 确定出因素集 (不包括总目标集和方案集) 中因素各水平状态的主观概率 (相当于证据理论中的性质函数或打赌概率) 并计算出 a_r 在分析结构各因素状态上的期望价值.

根据图 1 中分析结构的层次属性, 可以将主观概率划分为指标集中因素各水平状态的主观概率和准则集、分目标集中因素各水平状态的主观概率. 这两类主观概率及各因素期望价值的确定方法如下:

1) 指标集中因素各状态主观概率及各因素期望价值的确定结合图 1 方案对指标的影响关系, 针对任意一个方案 a_r, $r=1,2,\cdots,R$, 邀请 E 位专家分别判断出方案 a_r 在指标 s_1 上所处的水平状态. 如果认为 a_r 在 s_1 上处于状态 $L_{11},\cdots,L_{1N_1}$ 的专家数分别为 $E_{11,r}^{(s_1)},\cdots,E_{1N_1,r}^{(s_1)}$, 那么 a_r 在 s_1 上处于状态 $L_{11},\cdots,L_{1N_1}$ 的主观概率 $p_{11,r}^{(s_1)},\cdots,p_{1N_1,r}^{(s_1)}$ 分别为 $E_{11,r}^{(s_1)}/E,\cdots,E_{1N_1,r}^{(s_1)}/E$. 类似地, 可以邀请专家判断出方案 a_r 处于指标 $s_2,\cdots,s_N$ 相应水平状态的主观概率. 若在方案评价的价值体系中指标 s_1 各状态 $L_{11},\cdots,L_{1N_1}$ 的价值为 $u_{11}^{(s_1)},\cdots,u_{1N_1}^{(s_1)}$, 则方案 a_r 在 s_1 状态上的期望价值计算公式为:

$$U_r^{(s_1)}=\sum_{n_1=1}^{N_1}p_{1n_1,r}^{(s_1)}u_{1n_1}^{(s_1)}\tag{3}$$

类似地, 可以计算出方案 a_r 在指标 $s_2,\cdots,s_N$ 状态上的期望价值 $U_r^{(s_2)},\cdots,U_r^{(s_N)}$.

2) 准则集、分目标集中因素各状态主观概率及各因素期望价值的确定

不失一般性, 这里以准则集中因素各状态主观概率及各准则期望价值的确定为例来予以说明. 值得强调的是, 指标集中的因素与其上一层准则集中的因素之间可能存在着复杂的影响关系, 不妨假设指标集中的因素对上一层准则集中因素的影响关系如图 1 所示. 由于 $c_1,\cdots,c_H$ 受下层指标的影响 (参见图 1), 因此, 需要专家基于指标集中因素的状态 (更准确地说应是期望状态或期望状态区间), 对受下层指标影响的准则 $c_1,\cdots,c_H$ 所处的状态做出整体判断. 这种判断方式是与交合分析 (Conjoint analysis, CA) 的全景法 (即从待评价对象的多个属性整体的角度判断出对评价对象的偏好) 完全一致的[15]. CA 自 1964 年被正式提出以来其全景法迄今已在消费者偏好测定、产品分析等管理科学领域得到了广泛而成功的应用[15−17]. 由于大量的应用实践证明 CA 的全景法是一种十分有效的分析方法, 因此选用全景法对分析结构中各因素所处的水平状态进行整体判断是具有较好可行性的. 下面基于系统因素水平状态的整体判断给出准则 $c_1,\cdots,c_H$ 主观概率的确定方法. 即:

针对任意一个方案 a_r, 请 E 位专家分别基于对 c_1 有影响的指标 (即 s_1、s_2) 的期望水平状态或期望状态区间, 应用全景法判断出 a_r 在 c_1 上所处的水平状态. 若认为 a_r 在 c_1 上处于状态 $L_{11},\cdots,L_{1H_1}$ 的专家人数分别为 $E_{11,r}^{(c_1)},\cdots,E_{1H_1,r}^{(c_1)}$, 则方案 a_r 在 c_1 上处于状态 $L_{11},\cdots,L_{1H_1}$ 的主观概率 $p_{11,r}^{(c_1)},\cdots,p_{1H_1,r}^{(c_1)}$ 分别为 $E_{11,r}^{(c_1)}/E,\cdots,E_{1H_1,r}^{(c_1)}/E$. 类似地, 可以邀请专家判断出方案 a_r 处于准则 $c_2,\cdots,c_H$ 相应水平状态的主观概率.

与各指标期望价值的计算方法类似, 可以计算出 a_r 在 $c_1,\cdots,c_H$ 状态上的期望价值 $U_r^{(c_1)},\cdots,U_r^{(c_H)}$.

步骤 5 令 $r=r+1$, 若 $r\le R$(R 为待评价方案个数), 则转步骤 4; 若 $r>R$, 则转步骤 6.

步骤 6 邀请专家按照摆幅置权 (Swing weighting, SW) 方法确定分目标 $g_1,g_2,\cdots,g_M$ 的权重向量.

由于 SW 重要性概念在国外目前已成为被普遍接受的关于多目标权重重要性的规范性解释[18], 因此这里采用 SW 方法来确定分目标权重向量. 其具体做法是: 首先, 根据分目标 $g_1, g_2, \cdots, g_M$ 的状态空间, 确定出 2 个假设方案. 其中一个假设方案是在每一个分目标上都是最差状态, 记作最差方案 $(L_{1G_1}, \cdots, L_{M,G_M})$; 另一个假设方案是在每一个分目标上都是最好状态, 记作最好方案 $(L_{11}, \cdots, L_{M1})$. 然后, 从最差方案出发, 请专家从 M 个分目标中挑选出一个最希望首先改进最差方案的分目标 (设该分目标为 g_θ), 将其由最差状态 L_{θ,G_θ} 改进成最好状态 $L_{\theta1}$, 并将专家进行这一改进的价值偏好 (相当于 $u_{\theta1}^{(g_\theta)} - u_{\theta,G_\theta}^{(g_\theta)}$) 定为 100 (称作分目标 g_θ 的初步权重). 接下来, 对余下的分目标请专家仿照前述方法分别改进最差方案, 并对每一个分目标状态值改进的价值偏好相对于在分目标 g_θ 上的改进偏好做出介于 0 和 100 之间的一个数值估计 (称作相应目标的初步权重). 最后, 对上述初步权重进行规一化, 得出分目标 $g_1, \cdots, g_M$ 的规一化权重向量 $(\omega_1, \cdots, \omega_M)$.

步骤 7 计算出方案 $a_1, \cdots, a_R$ 的相对总效用偏好评价排序值 $U_1, \cdots, U_R$, 并依据 $U_1, \cdots, U_R$ 的大小对各方案排序.

设 $\delta_1, \cdots, \delta_M$ 为在分目标 $g_1, \cdots, g_M$ 上的状态效用变化 (即 $u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}, \cdots, u_{M1}^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}$) 相对于某一共同的效用价值尺度的当量系数, 则反映方案 $a_r (r = 1, 2, \cdots, R)$ 优劣的总效用偏好值 U'_r 可表述为:

$$U'_r = \delta_1(U_r^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}) + \cdots + \delta_M(U_r^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}) \tag{4}$$

另外, 由 SW 相对重要性权重概念内涵可知:

$$\frac{\delta_2(u_{21}^{(g_2)} - u_{2G_2}^{(g_2)})}{\delta_1(u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)})} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \cdots, \quad \frac{\delta_M(u_{M1}^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)})}{\delta_1(u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)})} = \frac{\omega_M}{\omega_1} \tag{5}$$

令 $\lambda = \delta_1(u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)})/\omega_1$(显然 $\lambda > 0$, 则由式 (4) 和式 (5) 可知如下表达式成立. 即:

$$U'_r = \left[\frac{U_r^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}}{u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}}\omega_1 + \frac{U_r^{(g_2)} - u_{2G_2}^{(g_2)}}{u_{21}^{(g_2)} - u_{2G_2}^{(g_2)}}\omega_2 + \cdots + \frac{U_r^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}}{u_{M1}^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}}\omega_M\right]\lambda \tag{6}$$

在式 (6) 中, 由于 λ 的取值并不影响 $U'_1, \cdots, U'_R$ 之间的排序, 因此可定义方案 a_r 的相对总效用偏好评价排序值 (即相对效用)U_r 为:

$$U_r = \frac{U_r^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}}{u_{11}^{(g_1)} - u_{1G_1}^{(g_1)}}\omega_1 + \frac{U_r^{(g_2)} - u_{2G_2}^{(g_2)}}{u_{21}^{(g_2)} - u_{2G_2}^{(g_2)}}\omega_2 + \cdots + \frac{U_r^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}}{u_{M1}^{(g_M)} - u_{M,G_M}^{(g_M)}}\omega_M, \quad r = 1, 2, \cdots, R \tag{7}$$

5 方法的变权机理与优点

5.1 变权机理

设任意方案 a_r 在各指标上的取值状态向量为 $Y = (y_1, \cdots, y_N)$. 由于 AHP 中的因素权重可逐层分解到底层指标, 因此按照 AHP 复合排序公式可知, 方案 $Y = (y_1, \cdots, y_N)$ 的综合评价值为:

$$V = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2 + \cdots + \tau_N u_N. \tag{8}$$

其中, $\tau_1, \cdots, \tau_N$ 为因素 $y_1, \cdots, y_N$ 的复合排序权重, $\sum_{l=1}^{N} \tau_l = 1$, u_l 为因素 y_l 的单属性效用值. 若 $y_1, \cdots, y_N$ 被视作连续变量, V 在 $(y_1, \cdots, y_N)$ 处可导 (若不可导, 采用 Dini 导数即可[19]), 则式 (8) 两边对 u_l 求导得:

$$\frac{\partial V}{\partial u_l} = \tau_l \tag{9}$$

由式 (7) 可知, U_r 表示的是方案 a_r 的相对效用, 因此它与 V 之间存在一个正的比例系数 φ, 使得

$$U_r = \phi V \tag{10}$$

从而进一步可推知:

$$\frac{\partial U_r}{\partial u_l} = \phi\frac{\partial V}{\partial u_l}, \quad \sum_{l=1}^{N}\frac{\partial U_r}{\partial u_l} = \phi\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial u_l} = \phi\sum_{l=1}^{N}\tau_l = \phi \tag{11}$$

联立式 (9)、(11) 可以得出:

$$\tau_l = (1/\phi)\frac{\partial U_r}{\partial u_l} = \frac{\partial U_r}{\partial u_l}\Bigg/\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial U_r}{\partial u_l} \tag{12}$$

因为方案综合评价值 V 是 $u_1, \cdots, u_N$ 的函数, 所以结合式 (9) 可知 τ_l 也必然是 $u_1, \cdots, u_N$ 的函数, 从而有 $\tau_l = F_l(u_1, \cdots, u_N)$. 其中, F_l 表示的是 τ_l 与 $u_1, \cdots, u_N$ 之间的函数关系. 而 u_l 又是因素 y_l 的函数,

即 $u_l = u_l(y_l)$, 这样由式 (12) 可知: $\tau_l = F_l(u_1(y_1),\cdots,u_N(y_N))$. 该式表明随着因素 $y_1,\cdots,y_N$ 取值的变化, 因素 y_l 的权重 τ_l 也是随着变化的, 即如下式 (13) 所示的关系成立.

$$\tau_l = F_l(u_1(y_1),\cdots,u_N(y_N)) \overset{\triangle}{=} G_l(y_1,\cdots,y_N) = G_l(Y) \tag{13}$$

上式 (13) 为 τ_l 相对于方案 $Y=(y_1,\cdots,y_N)$ 的变权机理, 即因素 y_l 的权重 τ_l 并不只依赖于 y_l 的变化而变化, 而是依赖于所有因素 $y_1,\cdots,y_N$ 取值组合的变化而变化的, 即一种组合变权.

需要说明的是, 在本文给出变权 AHP 实现方法中相对效用 U_r 并不是直接使用各因素的变权进行合成的, 而是在从指标期望价值 $U_r^{(s_1)},\cdots,U_r^{(s_N)}$ 到分目标期望价值 $U_r^{(g_1)},\cdots,U_r^{(g_M)}$ 逐层递推的过程中隐含了各因素的变权, 通过 $U_r^{(g_1)},\cdots,U_r^{(g_M)}$、分目标权重 $(\omega_1,\cdots,\omega_M)$ 以及各目标最好、最差状态的价值 (即 $u_{11}^{(g_1)},\cdots,u_{M1}^{(g_M)}$ 和 ${}_{1G_1}^{(g_1)},\cdots,u_{M,G_M}^{(g_M)}$) 进行合成的 (参见式 (7)). 另外, 变权 AHP 中并非所有因素的权重都是变化的, 其中也有固权的存在, 如步骤 6 通过 SW 方法确定目标权重 $\omega_1,\cdots,\omega_M$ 就是固权. 但是, 变权 AHP 中的固权以及隐含使用的变权与已有多目标变权决策方法中使用的固权、变权有着本质上的区别. 这是因为, 在已有多目标变权决策方法中, 因素的固权和变权均是针对同一因素而言的 (参见式 (2)), 而在变权 AHP 中, 从方案集到准则集, 系统因素只存在反映系统客观机理的变权而不存在固权. 尽管分目标集中因素 (即分目标) 既有固权又有变权, 但是分目标的固权是相对总目标而言的, 它反映的是专家关于分目标策略的主观价值偏好, 而分目标的变权是相对下层相关因素而言的, 它反映的是分目标与其下层因素之间的内在客观系统机理.

5.2 方法优点

相对于固权 AHP 而言, 本文给出的方案优选排序的变权 AHP 实现方法主要具有以下两方面的优点.

第一, 变权 AHP 评价问题的新分析结构和基于新分析结构的专家判断信息的提取方法即整体判断法抛弃了固权 AHP 的还原论分析思路, 取而代之的是更具有科学合理性的整体论与还原论相结合的系统分析思路, 从而相对于固权 AHP 更有利于反映非线性、涌现性等复杂系统特征.

第二, 从式 (7) 可知, 变权 AHP 给出的相对总效用偏好评价排序值 U_r 与方案 a_r 是一一对应的. 这样, 对任意一组评价方案而言, 增加一个新方案 (或删除该组方案中的一个方案) 后不会改变该组方案 (或其余方案) 的相对排序, 因而本文给出的变权 AHP 方法从本质上解决了困扰专家学者的固权 AHP 方案逆序问题.

6 实例验证

为验证新方法的实际应用可行性, 下文结合某高科技企业新产品项目的开发风险评价问题进行了案例实证研究. 在该评价问题中有六个新产品开发项目 (视作方案 $a_1,\cdots,a_6$) 和十五位风险评价专家; 对于该评价问题, 建立了如下图 2 所示的系统分析结构 (限于篇幅, 作者对该分析结构中的部分评价指标进行了删节).

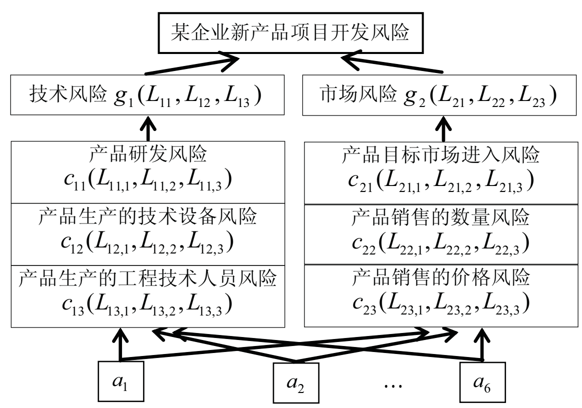

图 2 方案评价的分析结构

图 2 中, 总目标为某企业新产品项目开发风险, 评价分目标为技术风险 (g_1) 和市场风险 (g_2), 影响技术风险的指标因素包括产品研发风险 (c_{11})、产品生产的技术设备风险 (c_{12}) 和产品生产的工程技术人员风险 (c_{13}), 反映市场风险的指标包括产品目标市场进入风险 (c_{21})、产品销售的数量风险 (c_{22})、产品销售的价格风险 (c_{23}). 运用前文给出的方法步骤, 首先选定十五位专家都熟悉的该企业近期成功开发的一个新产品项目作为参照对象, 并将参照对象对应方案评价分析结构的各因素实际状态作为参照系, 在此基础上对分析结构中分各目标和指标可能的取值状态均予以了 “比参照项目风险小”、“与参照项目风险差不多” 和 “比参照项目风险大” 三个状态级别划分. 然后, 请专家判断出各方案在各指标上所处的状态, 从而得出了 $a_1,\cdots,a_6$ 在各指标上各个状态的主观概率 (见表 3 第 2–19 行); 根据 $a_1,\cdots,a_6$ 在各指标上各状态的主观概率及价值体系中各指标的状态价值 (见表 1 第 3 行后半部分和第 6 行), 计算出了各方案在各指标状态上的期望价值 (见表 2), 在此基础上确定出了对应于各方案的各指标的期望状态或期望状态区间. 接着, 针对每个方案, 请专家分别基于对 g_1、g_2 有影响的指标期望状态或期望状态区间, 判断出了各方案在分目标 g_1、g_2 上所处的水平状态, 从而得出了各方案在 g_1、g_2 上各个状态的主观概率 (参见表 3 最后 6 行); 由各方案在 g_1、g_2 上的主观概率和价值体系中 g_1、g_2 的状态价值 (见表 1 第 3 行前半部分) 计算出了各方案在 g_1、g_2 状态上的期望价值 (见表 4

第 2、第 3 列). 最后, 请专家按照 SW 的方法确定出了 g_1、g_2 的相对权重 (分别是 85 和 100, 并由 g_1 和 g_2 的相对权重、g_1、g_2 最好和最差状态的价值及各案在 g_1 和 g_2 各状态上的期望价值 (利用式 (7)), 求出了各方案的相对总效用偏好评价排序值 (见表 4 第 4 列).

表 1　方案评价的价值体系

因素状态	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{21}	L_{22}	L_{23}	$L_{11,1}$	$L_{11,2}$	$L_{11,3}$	$L_{12,1}$	$L_{12,2}$	$L_{12,3}$
状态	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$u_{11,1}$	$u_{11,2}$	$u_{11,3}$	$u_{12,1}$	$u_{12,2}$	$u_{12,3}$
价值	100	50	0	100	50	0	100	50	0	100	50	0
因素状态	$L_{13,1}$	$L_{13,2}$	$L_{13,3}$	$L_{21,1}$	$L_{21,2}$	$L_{21,3}$	$L_{22,1}$	$L_{22,2}$	$L_{22,3}$	$L_{23,1}$	$L_{23,2}$	$L_{23,3}$
状态	$u_{13,1}$	$u_{13,2}$	$u_{13,3}$	$u_{21,1}$	$u_{21,2}$	$u_{21,3}$	$u_{22,1}$	$u_{22,2}$	$u_{22,3}$	$u_{23,1}$	$u_{23,2}$	$u_{23,3}$
价值	100	50	0	100	50	0	100	50	0	100	50	0

表 2　方案在各指标状态上的期望价值

方案	$U_r^{(c_{11})}$	$U_r^{(c_{12})}$	$U_r^{(c_{13})}$	$U_r^{(c_{21})}$	$U_r^{(c_{22})}$	$U_r^{(c_{23})}$
a_1	53.33	40	50	56.67	40	100
a_2	36.67	60	83.33	76.67	66.33	63.33
a_3	66.67	20	40	60	73.33	50
a_4	40	63.33	63.33	36.67	83.33	80
a_5	63.33	86.67	23.33	50	53.33	36.67
a_6	43.33	30	90	50	36.67	66.67

表 3 方案在指标与分目标上的主观概率

主观概率	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$p_{11,1,r}$	0.267	0.133	0.533	0.2	0.467	0.133
$p_{11,2,r}$	0.533	0.467	0.267	0.4	0.333	0.6
$p_{11,3,r}$	0.2	0.4	0.2	0.4	0.2	0.267
$p_{12,1,r}$	0.2	0.267	0.133	0.267	0.8	0.2
$p_{12,2,r}$	0.4	0.667	0.133	0.733	0.133	0.2
$p_{12,3,r}$	0.4	0.066	0.734	0	0.067	0.6
$p_{13,1,r}$	0.2	0.667	0.267	0.467	0.133	0.8
$p_{13,2,r}$	0.6	0.333	0.267	0.333	0.2	0.2
$p_{13,3,r}$	0.2	0	0.466	0.2	0.667	0
$p_{21,1,r}$	0.467	0.600	0.4	0.267	0.133	0.4
$p_{21,2,r}$	0.200	0.333	0.4	0.2	0.733	0.2
$p_{21,3,r}$	0.333	0.067	0.2	0.533	0.134	0.4
$p_{22,1,r}$	0.2	0.467	0.6	0.667	0.333	0
$p_{22,2,r}$	0.4	0.333	0.267	0.333	0.4	0.733
$p_{22,3,r}$	0.4	0.2	0.133	0	0.267	0.267
$p_{23,1,r}$	1	0.333	0.2	0.6	0.133	0.533
$p_{23,2,r}$	0	0.4	0.6	0.4	0.467	0.267
$p_{23,3,r}$	0	0.267	0.2	0	0.4	0.2
$p_{11,r}$	0.267	0.333	0	0.4	1	0.133
$p_{12,r}$	0.4	0.6	0.133	0.6	0	0.4
$p_{13,r}$	0.333	0.067	0.867	0	0	0.467
$p_{21,r}$	0.2	0.933	0.867	0.467	0.4	0.2
$p_{22,r}$	0.6	0.067	0.133	0.067	0.467	0.333
$p_{23,r}$	0.2	0	0	0.466	0.133	0.467

依据表 4 第 4 列数据可知, 方案的优劣次序为 $a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_6$.

在上述实例应用过程中, 无论是划分因素的水平状态还是确定主观概率, 均没有遇到方法应用难题, 这表明本文提出的排序方法具有较好的实际应用可操作性.

由前文反映因素权重是如何随方案取值组合变化而变化的变权机理公式 (13) 可知, 指标 $c_{11},\cdots,c_{23}$ 权重 $\tau_{11},\cdots,\tau_{23}$ 的变权机理分别为:

$$\tau_{11} = F_{11}(u_{11}(c_{11}), u_{12}(c_{12}), \cdots, u_{23}(c_{23})),$$

$$\vdots$$

$$\tau_{23} = F_{23}(u_{11}(c_{11}), u_{12}(c_{12}), \cdots, u_{23}(c_{23})).$$

但是, 由于这些对方案的评价是一种离散评价, 上述变权机理中的有关函数即 $F_{11},\cdots,F_{23}$, $u_{11},\cdots,u_{23}$ 并不能予以显性表达, 因此下面通过具体数值解的分析来说明本文提出的方法隐含使用的指标权重 $\tau_{11},\cdots,\tau_{23}$ 确实是相对指标组合 (即方案) 的变化而变化的.

表 4 方案在分目标 g_1 和 g_2 各状态上的期望价值与方案的排序值

方案	$U_r^{(g_1)}$	$U_r^{(g_2)}$	U_r
a_1	46.67	50	89.67
a_2	63.33	96.67	150.5
a_3	6.67	93.33	99
a_4	70	50	109.5
a_5	100	63.33	148.33
a_6	33.33	36.67	65

设指标权重 $\tau_{jk}(j=1,2;k=1,2,3)$ 相对于方案 a_r 的权重为 $\tau_{r,jk}(\tau_{r,jk}>0)$, 则由前文式 (8)、(10) 以及分别在表 2 和表 4 所示的方案在各指标状态上的期望价值、方案的相对效用排序值可知:

$$\begin{cases}\phi(53.33\tau_{1,11}+40\tau_{1,12}+50\tau_{1,13}+56.67\tau_{1,21}+40\tau_{1,22}+100\tau_{1,23})=89.67\\ \phi(36.67\tau_{2,11}+60\tau_{2,12}+83.33\tau_{2,13}+76.67\tau_{2,21}+66.33\tau_{2,22}+63.33\tau_{2,23})=150.5\\ \phi(66.67\tau_{3,11}+20\tau_{3,12}+40\tau_{3,13}+60\tau_{3,21}+73.33\tau_{3,22}+50\tau_{3,23})=99\\ \phi(40\tau_{4,11}+63.33\tau_{4,12}+63.33\tau_{4,13}+36.67\tau_{4,21}+83.33\tau_{4,22}+80\tau_{4,23})=109.5\\ \phi(63.33\tau_{5,11}+86.67\tau_{5,12}+23.33\tau_{5,13}+50\tau_{5,21}+53.33\tau_{5,22}+36.67\tau_{4,23})=148.33\\ \phi(43.33\tau_{6,11}+30\tau_{6,12}+90\tau_{6,13}+50\tau_{6,21}+36.67\tau_{6,22}+66.67\tau_{6,23})=65\end{cases}\tag{14}$$

若指标权重 $\tau_{11},\cdots,\tau_{23}$ 是相对于指标组合的变化而变化的, 则式 (14) 中至少存在一个指标权重 $\tau_{r,jk}$ 是相对于方案变化而变化的. 假设所有的指标权重 $\tau_{r,jk}$ 均不因方案而变化, 记指标固定不变的权重为 $\tau'_{jk}(\tau'_{jk}>0)$, 则此时式 (14) 可转换为:

$$\begin{cases}\phi(53.33\tau'_{11}+40\tau'_{12}+50\tau'_{13}+56.67\tau'_{21}+40\tau'_{22}+100\tau'_{23})=89.67\\ \phi(36.67\tau'_{11}+60\tau'_{12}+83.33\tau'_{13}+76.67\tau'_{21}+66.33\tau'_{22}+63.33\tau'_{23})=150.5\\ \phi(66.67\tau'_{11}+20\tau'_{12}+40\tau'_{13}+60\tau'_{21}+73.33\tau'_{22}+50\tau'_{23})=99\\ \phi(40\tau'_{11}+63.33\tau'_{12}+63.33\tau'_{13}+36.67\tau'_{21}+83.33\tau'_{22}+80\tau'_{23})=109.5\\ \phi(63.33\tau'_{11}+86.67\tau'_{12}+23.33\tau'_{13}+50\tau'_{21}+53.33\tau'_{22}+36.67\tau'_{23})=148.33\\ \phi(43.33\tau'_{11}+30\tau'_{12}+90\tau'_{13}+50\tau'_{21}+36.67\tau'_{22}+66.67\tau'_{23})=65\end{cases}\tag{15}$$

令 $\phi\tau'_{jk}=\tau''_{jk}$, 则式 (15) 经等价变换为如下的齐次线性方程组:

$$\begin{cases}53.33\tau''_{11}+40\tau''_{12}+50\tau''_{13}+56.67\tau''_{21}+40\tau''_{22}+100\tau''_{23}=89.67\\ 36.67\tau''_{11}+60\tau''_{12}+83.33\tau''_{13}+76.67\tau''_{21}+66.33\tau''_{22}+63.33\tau''_{23}=150.5\\ 66.67\tau''_{11}+20\tau''_{12}+40\tau''_{13}+60\tau''_{21}+73.33\tau''_{22}+50\tau''_{23}=99\\ 40\tau''_{11}+63.33\tau''_{12}+63.33\tau''_{13}+36.67\tau''_{21}+83.33\tau''_{22}+80\tau''_{23}=109.5\\ 63.33\tau''_{11}+86.67\tau''_{12}+23.33\tau''_{13}+50\tau''_{21}+53.33\tau''_{22}+36.67\tau''_{23}=148.33\\ 43.33\tau''_{11}+30\tau''_{12}+90\tau''_{13}+50\tau''_{21}+36.67\tau''_{22}+66.67\tau''_{23}=65\end{cases}\tag{16}$$

解式 (16) 得, $\tau''_{11}=0.292$, $\tau''_{12}=0.972$, $\tau''_{13}=-0.312$, $\tau''_{21}=1.382$, $\tau''_{22}=0.502$, $\tau''_{23}=-0.165$. 由此进一步可知: $\tau'_{11}=0.292/\phi,\tau'_{12}=0.972/\phi,\tau'_{13}=-0.312/\phi,\tau'_{21}=1.382/\phi,\tau'_{22}=0.502/\phi,\tau'_{23}=-0.165/\phi$. 由于 $\phi>0$, 因此指标权重 $\tau'_{13}=-0.312/\phi<0,\tau'_{23}=-0.165/\phi<0$. 显然这与假设矛盾, 从而指标权重 $\tau_{11},\cdots,\tau_{23}$ 确实是相对指标组合 (即方案) 的变化而变化的.

需要强调说明, 因素固权只是变权的一种特殊情况, 在实际中是否需要变权是由评价者决定的, 由于在该例子中无法判别评价者是否需要变权, 因此我们认为采用更为一般的因素变权是科学合理的. 事实上, 本文提出的变权 AHP 法不仅适用于因素状态变权体系下的方案评价, 而且也适用于固权体系下的方案优选排序. 此外, 关于状态变权的合理性问题, 李德兴、李洪兴等学者已明确指出, 总是采用固定不变的因素权重在实际中经常会出现诸多不合理现象, 一般说来, 采用变权的思想对决策问题进行评价是合理的 [11].

7 结论

建构在固权体系上的、反映系统要素相互作用机理的少数几种特定的 AHP 方案复合排序方法因不能反映复杂系统非线性、涌现性等本质特征而可能出现方法模型的失效问题. 因此, 从复杂系统内在的机理复杂性上看, 如何采用变权思想对传统 AHP 所采用的固权体系及相应的方案复合排序方法予以合理改进, 是克服固权 AHP 方法失效问题、提高 AHP 评价决策科学性的一个亟待解决的重要研究课题. 为解决 AHP 的

固权问题以及固权 AHP 可能导致的方案复合排序方法失效问题, 论文在借鉴现有多目标变权决策方法的变权思想 (即因素权重随因素状态值的变化而变化的思想) 的基础上, 依据整体论与还原论相结合的系统分析思路, 通过构建复杂评价问题的新分析结构和新分析结构下方案评价的价值体系, 给出了一种方案优选排序的变权 AHP 实现方法. 在变权 AHP 中, 因素权重并不只依赖于其评价值本身的变化而变化, 而是依赖于所有因素取值组合的变化而变化的, 即一种组合变权. 相对于固权 AHP 而言, 变权 AHP 方法不仅采用了更有利于反映复杂系统非线性、涌现性等特征的新分析结构和基于新分析结构的专家判断信息的提取方法即整体判断法, 而且从根本上解决了困扰专家学者的 AHP 方案逆序问题. 案例应用结果表明, 该方法有着很强的实际应用可操作性.

参考文献

[1] Saaty T L. Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process[M]. Pittsburgh: RWS Publications, 2001.

[2] Badiru A B, Pulat P S, Kang M. DDM: decision support system for hierarchical dynamic decision making[J]. Decision Support System, 1993, 10(1): 1–18.

[3] Wang Y M, Elhag T M S. An approach to avoiding rank reversal in AHP[J]. Decision Support System, 2006, 42(3): 1474–1480.

[4] Wang Y M, Luo Y. On rank reversal in decision analysis[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(5–6): 1221–1259.

[5] Leung L C, Cao D. On the efficacy of modeling multiattribute decision problems using AHP and Sinarchy[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 132(1): 39–49.

[6] Ramanathan R. Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process[J]. Computers & Operations Research, 2006, 33(5): 1289–1307.

[7] Stam A, Duarte Silva A P. On multiplicative priority rating methods for the AHP[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 145(1): 92–108.

[8] 汪培庄. 模糊集与随机集落影 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985.
Wang P Z. Fuzzy Sets and Stochastic Sets Projection[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1985.

[9] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架 (VIII)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1–9.
Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge representation (VIII)[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1995, 9(3): 1–9.

[10] 刘文奇. 一般变权原理与多目标决策 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(3): 1–11.
Liu W Q. The ordinary variable weight principle and multiobjective decision-making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2000, 20(3): 1–11.

[11] 李德清, 李洪兴. 状态变权向量的性质与构造 [J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2002, 38(4): 455–461.
Li D Q, Li H X. The properties and construction of state variable weight vectors[J]. Journal of Beijing Normal University: Natural Science, 2002, 38(4): 455–461.

[12] 李德清, 崔红梅, 李洪兴. 基于层次变权的多因素决策 [J]. 系统工程学报, 2004, 19(3): 258–263.
Li D Q, Cui H M, Li H X. Multifactor decision making based on hierarchical variable weights[J]. Journal of Systems Engineering, 2004, 19(3): 258–263.

[13] 李德清, 李洪兴. 变权决策中变权效果分析与状态变权向量的确定 [J]. 控制与决策, 2004, 19(11): 1241–1245.
Li D Q, Li H X. Analysis of variable weights effect and selection of appropriate state variable weights vector in decision making[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1241–1245.

[14] 张瑞, 王攀, 丁力. 变权综合的若干问题研究 [J]. 微计算机信息, 2006, 22(7–1): 261–263.
Zhang R, Wang P, Ding L. Some issues on variable weight synthesis[J]. Microcomputer Information, 2006, 22(7–1): 261–263.

[15] Scholl A, Manthey L, Helm R, et al. Solving multiattribute design problems with analytic hierarchy process and conjoint analysis: An empirical comparison[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164(3): 760–777.

[16] Moskowitz H R, Silcher M. The applications of conjoint analysis and their possible uses in sensometrics[J]. Food Quality and Preference, 2006, 17(3-4): 145–165.

[17] Ida T, Kinoshita S, Sato M. Conjoint analysis of demand for IP telephony: The case of Japan[J]. Applied Economics, 2008, 40(10): 1279–1287.

[18] Winterfeldt D V, Edwards W. Decision Analysis and Behavioral Research[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[19] Loewena P D, Wang X F. On the multiplicity of Dini subgradients in separable spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2004, 58(1–2): 1–10.