文章编号: 1000-6788(2010)04-0695-05 中图分类号: TB114.3 文献标志码: A

成败型系统可靠性增长的动态 Bayes 评定方法

邢云燕, 武小悦

(国防科技大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘 要 针对产品研制过程存在多阶段的试验信息和产品性能参数呈现动态变化的特点, 提出一种 Bayes 框架下成败型系统可靠性的动态评估方法. 该方法依据产品研制过程中不同研制阶段的试验数据, 利用离散 AMSAA 可靠性增长模型对产品可靠性的变化趋势进行描述, 进而对新批次的产品可靠性进行预测, 并由最大熵方法给出产品可靠性验前分布的确定方法, 再结合产品少量的现场试验数据, 对新批次的产品可靠性做出 Bayes 评估. 最后通过实例对比分析, 表明该方法很好地解决了小子样产品的可靠性试验评估问题.

关键词 可靠性增长; Bayes 方法; 离散 AMSAA 模型; 成败型; 动态评估

Dynamic Bayesian evaluation method for binomial system with reliability growth

XING Yun-yan, WU Xiao-yue

(College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Considering that there are multiple-stages field data and product performance parameters take on dynamic change trend during the process of product development, a dynamic Bayesian evaluation method for binomial system reliability is proposed in this paper. The approach uses the discrete AMSAA model to describe the change trend of product reliability according to the existent multiple-stages field data, and make prediction for product reliability at new-stage. Then, the prior distribution of product reliability at new-stage is given by referring to the Maximum Entropy Method. Along with the small quantity of field data, the Bayesian evaluation of product reliability is made by the proposed method. Numerical example indicates that the approach can properly solve the problem of product reliability evaluation under the condition of small sample size.

Keywords reliability growth; Bayesian methods; discrete AMSAA model; binomial; dynamic evaluation

1 引言

任何产品在研制初期, 可靠性与性能参数都不可能立即达到所规定的指标, 必须反复经历试验-分析-改进-再试验的过程, 不断暴露产品设计、制造工艺和操作方法等方面缺陷, 然后通过分析和改进使产品可靠性和性能不断提高, 从而实现可靠性增长 [1]. 对于武器装备而言, 研制过程是分阶段、分批次进行的. 在每个阶段 (或批次) 试验结束之后, 对该阶段 (或批次) 的产品设计进行改进, 因此产品性能参数从总体上不再服从同一分布, 呈现动态变化的特点. 那么, 如何描述产品性能参数在研制过程中的变化规律, 并依据观测数据对产品的性能参数做出客观的统计分析成为工程应用中的关键问题. 可靠性增长模型是解决这一问题的重要手段, 只要模型选取适当, 就可以跟踪产品可靠性增长过程, 依据试验数据, 对产品的性能参数做出可信的统计分析.

收稿日期: 2008-07-02
资助项目: 国家自然科学基金 (70571083)
作者简介: 邢云燕 (1979–), 女, 汉, 黑龙江宁安人, 博士研究生, 研究方向: 装备可靠性试验分析, E-mail: xingyy2005@sina.com.

按失效数据统计性质分类, 可靠性增长模型可以分为两类: 一类是连续型可靠性增长模型, 适用于寿命型产品; 另一类是离散型可靠性增长模型, 适用于成败型产品 [2]. 对于导弹这样的成败型系统, 适于采用 AMSAA 模型. 1972 年美国陆军装备系统分析中心的 Crow 在 Duane[3] 模型的基础上提出了可靠性增长的 AMSAA 模型 [4], 并给出了模型参数的估计方法 [5]. 1980 年以后美国三军广泛推广使用该可靠性增长模型, 1981 年美国国防部向军方和工业界广泛推荐使用此模型, 1996 年起国际电工委员会也推荐使用这一模型. 国内关于可靠性增长的国军标中, 只给出了连续型 AMSAA 模型的使用方法, 并没有给出其离散形式及如何应用于小子样条件下武器装备可靠性试验的分析与评估.

基于上述原因, 本文针对成败型系统, 提出一种 Bayes 框架下系统可靠性的动态评估方法. 由于在系统研制过程中, 各阶段 (或批次) 试验结束之后, 对系统在试验过程中暴露的设计缺陷进行了改进, 因此系统可靠性从总体上不再服从同一分布, 所以我们把对系统可靠性的评估问题归结为动态参数的分析问题 [6−7]. 在 Bayes 理论框架下, 对系统可靠性做出评估, 首先需要解决的就是系统可靠性验前分布的确定问题. 我们依据系统研制过程中不同阶段 (或批次) 的试验信息, 利用离散 AMSAA 模型描述系统可靠性的变化趋势, 建立系统可靠性的预测模型, 并由最大熵方法给出系统可靠性验前分布的确定方法. 最后, 利用 Bayes 方法, 做出现场试验之后系统可靠性的 Bayes 分析与评估.

2 离散 AMSAA 模型

1964 年, 美国通用电气公司的工程师 Duane 提出了一种近似函数关系 (学习曲线特性) [8]

$$E\{K(T^*)\} = \lambda T^{*\beta} \tag{1}$$

其中, λ, β 均为正数, 分别是形状参数和尺度参数, T^* 表示累积试验时间, 函数 K 表示观测到的累积失效次数.

在离散可靠性试验框架下, 由累积试验次数 T 代替累积试验时间 T^*, 故 (1) 式可改写为

$$E\{K(T)\} = \lambda T^{\beta} \tag{2}$$

由 (2) 式, Crow 给出如下离散可靠性增长模型 [9]:

$$R_i = 1 - \frac{\lambda[(t_i)^\beta - (t_{i-1})^\beta]}{n_i} \tag{3}$$

其中, R_i 为系统第 i 阶段的可靠性, n_i 为系统第 i 阶段的试验次数, t_i 为系统试验至第 i 阶段的累积试验次数, $t_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$.

对于 (3) 式, 参数 λ 与系统初始可靠性水平有关, $1-\beta$ 为可靠性增长率. 当 $0 < \beta < 1$ 时, 系统可靠性呈现增长趋势. 当 $\beta = 1$ 时, 系统可靠性不发生变化. 当 $\beta > 1$ 时, 系统可靠性呈现衰退趋势. 在考虑增长情形下, 系统可靠性随着 λ 或 β 值的减小而增长, 而且随着试验阶段的推进也在逐渐增长. 最后, 系统可靠性趋于 1.

特别地, 当系统各阶段的试验次数相同时, 即 $n_i = n(i = 1, 2, \cdots, c)$ 时, (3) 式转化为如下离散可靠性增长模型

$$R_i = 1 - \lambda n^{\beta-1}[i^\beta - (i-1)^\beta] \tag{4}$$

其中, c 表示系统研制过程中的试验阶段次数.

对于离散可靠性增长模型 (3) 式, 可利用极大似然估计求解模型参数 λ, β, 极大似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^{c} \begin{pmatrix} n_i \\ f_i \end{pmatrix} R_i^{n_i - f_i} (1 - R_i)^{f_i} \tag{5}$$

其中, f_i 为系统第 i 阶段的失效次数, R_i 如 (3) 式所示.

3 系统可靠性增长的动态 Bayes 评估方法

对于武器装备而言, 装备研制过程中不同阶段的试验信息是装备试验评估中验前信息的主要来源, 也是最为直接和客观的验前信息. 我们的目标是期望依据系统研制过程中不同阶段的可靠性试验数据, 利用可靠性增长模型, 对系统可靠性的变化规律进行描述, 实现对未来新批次系统可靠性的预测, 并将预测结果作为对新批次系统可靠性的验前认识, 进而获取新批次系统可靠性的验前分布, 再结合新批次系统的现场试验数据, 实现小子样条件下武器装备的可靠性评估.

对于成败型武器系统的研制过程, 系统每个试验阶段的试验结果都将导致对系统设计缺陷的改进. 因此, 假设系统开始新阶段 (或批次) 试验时, 该阶段 (或批次) 的试验样本量已知, 失效次数未知. 下面, 我们利用系统研制过程中不同研制阶段的可靠性试验数据, 对小子样可靠性试验下成败型系统的可靠性进行 Bayes 分析与评估. 首先, 给出系统可靠性验前分布的确定方法.

3.1 系统第 i 阶段可靠性验前分布的确定

假设系统已进行了 $i-1$ 阶段的可靠性试验, 各阶段的试验数据为 $(n_1,f_1),(n_2,f_2),\cdots,(n_{i-1},f_{i-1})$. 依据系统 $i-1$ 阶段的可靠性试验数据, 由 (5) 式可计算得到离散 AMSAA 模型参数 λ,β 的估计值 $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\beta}$. 当已知系统第 i 阶段的试验次数 n_i 时, 由 (3) 式对系统第 i 阶段的可靠性 R_i 进行预测, 得到系统第 i 阶段的可靠性预测值为

$$\widehat{R}_{i0}=1-\frac{\widehat{\lambda}[(t_i)^{\widehat{\beta}}-(t_{i-1})^{\widehat{\beta}}]}{n_i} \tag{6}$$

其中, $t_{i-1}=\sum_{j=1}^{i-1}n_j$, $t_i=t_{i-1}+n_i$, n_i 为系统第 i 阶段的试验次数.

令系统第 i 阶段可靠性 R_i 的验前均值为

$$E(R_i)=\widehat{R}_{i0} \tag{7}$$

由最大熵验前分布的确定方法[10], 系统第 i 阶段可靠性 R_i 的验前分布可表示为

$$\pi(R_i)=\frac{\mathrm{e}^{uR_i}}{\int_0^1\mathrm{e}^{uR_i}\mathrm{d}R_i} \tag{8}$$

其中, u 是待定系数, 为常量.

由 (7) 和 (8) 式, 求解下述方程, 计算待定系数 u

$$E(R_i)=\int_0^1 R_i\pi(R_i)\mathrm{d}R_i=\frac{\int_0^1 R_i\mathrm{e}^{uR_i}\mathrm{d}R_i}{\int_0^1\mathrm{e}^{uR_i}\mathrm{d}R_i}=\widehat{R}_{i0} \tag{9}$$

由 (9) 式求解出待定系数 u 之后, 系统第 i 阶段可靠性 R_i 的验前分布 $\pi(R_i)$ 也就确定了. 由此, 计算系统第 i 阶段可靠性 R_i 的验前二阶矩

$$E(R_i^2)=\frac{\int_0^1 R_i^2\mathrm{e}^{uR_i}\mathrm{d}R_i}{\int_0^1\mathrm{e}^{uR_i}\mathrm{d}R_i} \tag{10}$$

由共轭验前分布可知, 若以 Beta 分布 $Be(a_{i0},b_{i0})$ 作为近似分布拟合 R_i 的验前分布 $\pi(R_i)$, 则要求 $Be(a_{i0},b_{i0})$ 与 $\pi(R_i)$ 具有相同的验前一阶矩和验前二阶矩. 于是, 由 (7) 和 (10) 式, 可得

$$\begin{cases}\dfrac{a_{i0}}{a_{i0}+b_{i0}}=E(R_i)\\[2mm]\dfrac{a_{i0}(a_{i0}+1)}{(a_{i0}+b_{i0})(a_{i0}+b_{i0}+1)}=E(R_i^2)\end{cases} \tag{11}$$

由 (11) 式, 可得

$$\begin{cases}a_{i0}=\dfrac{E(R_i)-E(R_i^2)}{E(R_i^2)-[E(R_i)]^2}E(R_i)\\[2mm]b_{i0}=[1-E(R_i)]\dfrac{E(R_i)-E(R_i^2)}{E(R_i^2)-[E(R_i)]^2}\end{cases} \tag{12}$$

由上所述, 依据系统研制过程中 $i-1$ 阶段的可靠性试验数据, 经过统计推断, 获取系统第 i 阶段可靠性 R_i 的验前分布为 $Be(R_i|a_{i0},b_{i0})$, 其超参数 a_{i0},b_{i0} 满足 (12) 式.

特别地, 对系统第 1 阶段可靠性 R_1 进行评估时, 由于对系统的认识很少, 此时可选取无信息验前分布[10], 后续分析过程与上述方法类似.

3.2 系统性能参数的 Bayes 分析

对系统进行可靠性试验, 观测到系统第 i 阶段的可靠性试验数据为 (n_i,f_i), 则现场试验数据的似然函数为

$$L(n_i,f_i)=C_{n_i}^{f_i}R_i^{n_i-f_i}(1-R_i)^{f_i} \tag{13}$$

其中, n_i 为系统第 i 阶段的试验次数, f_i 为系统第 i 阶段的失效次数.

利用 Bayes 定理, 由 R_i 的验前分布 $Be(R_i|a_{i0}, b_{i0})$ 和似然函数 (13) 式, 可得系统第 i 阶段可靠性 R_i 的后验分布为

$$\pi(R_i|(n_i, f_i)) \sim Be(R_i|a_{i1}, b_{i1}) \tag{14}$$

其中, $a_{i1} = a_{i0} + n_i - f_i, b_{i1} = b_{i0} + f_i$.

由 (14) 式, 可得系统第 i 阶段可靠性 R_i 的后验期望、后验方差和置信下限分别为

$$E(R_i|(n_i, f_i)) = \frac{a_{i1}}{a_{i1} + b_{i1}} \tag{15}$$

$$\mathrm{Var}(R_i|(n_i, f_i)) = \frac{a_{i1}b_{i1}}{(a_{i1} + b_{i1})^2(a_{i1} + b_{i1} + 1)} \tag{16}$$

$$\int_{R_{iL}}^{1} \pi(R_i|(n_i, f_i))\mathrm{d}R_i = 1 - \gamma \tag{17}$$

其中, R_{iL} 为系统第 i 阶段在置信度 γ 下的可靠性置信下限.

令系统第 i 阶段的可靠性估计值 $\widehat{R}_i = E(R_i|(n_i, f_i))$, 给定系统满足定型要求的可靠性标准 R, 若 $\widehat{R}_i \geqslant R$, 则终止试验, 认为系统可靠性达到预定的标准. 若 $\widehat{R}_i < R$, 则对系统进行改进并开始第 $i+1$ 阶段试验, 依据系统 i 阶段的试验数据, 对系统第 $i+1$ 阶段的可靠性进行预测, 不断循环进行上述过程, 直到系统可靠性达到定型要求, 方可终止试验.

4 实例分析

XX 战术导弹武器系统的可靠性试验数据如表 1 所示.

表 1 已有可靠性试验数据

阶段	试验样本量 n_i	试验成功次数 s_i	试验失效次数 f_i
1	4	3	1
2	5	4	1
3	7	6	1

现继续对系统设计进行改进并进行可靠性试验, 试验数据如表 2 所示. 要求对导弹武器系统的可靠性做出评估, 判断系统能否定型 (研制任务书规定系统可靠性定型标准为 0.9).

表 2 新系统的可靠性试验数据

阶段	试验样本量 n_i	试验成功次数 s_i	试验失效次数 f_i
4	7	6	1
5	3	3	0

依据已有 3 阶段可靠性试验数据, 由 (5) 式, 可得离散 AMSAA 模型参数 λ, β 的估计值为 $\widehat{\lambda} = 0.3512$, $\widehat{\beta} = 0.7736$. 由 (6) 式, 可得系统第 4 阶段可靠性 R_4 的预计值为 $\widehat{R}_{40} = 0.8611$. 由 (7)–(12) 式, 可得系统第 4 阶段可靠性 R_4 的验前分布为 $Be(4.861, 0.7833)$. 经过现场可靠性试验, 由 (13)–(15) 式, 可得系统第 4 阶段可靠性 R_4 的估计值为 $\widehat{R}_4$=0.8590 . 因此, 经过统计分析, 判定系统当前的技术状态还未达到定型标准, 需继续改进系统设计并进行可靠性试验, 提高系统可靠性.

依据已有 4 阶段可靠性试验数据, 由 (5) 式, 可得离散 AMSAA 模型参数 λ, β 的估计值为 $\widehat{\lambda} = 0.3469, \widehat{\beta} = 0.7797$, 由 (6) 式, 可得系统第 5 阶段可靠性 $\widehat{R}_5$ 的预计值为 $\widehat{R}_{50} = 0.8663$. 由 (7)–(12) 式, 可得系统第 5 阶段可靠性的验前分布为 $Be(4.861, 0.7486)$. 经过现场可靠性试验, 由 (13)–(15) 式, 可得系统第 5 阶段可靠性 $\widehat{R}_5$ 的估计值为 $\widehat{R}_5 = 0.9131$. 因此, 经过统计分析, 判定系统当前的技术状态已符合定型要求, 终止试验, 允许产品定型.

如果不考虑系统已有 4 阶段的可靠性试验数据, 仅由系统第 5 阶段的试验数据对系统的可靠性做出评估, 则系统第 5 阶段可靠性的验前分布为 $Be(0.5, 0.5)$. 经过现场可靠性试验, 系统第 5 阶段可靠性 R_5 的估计值 $\widehat{R}_5 = 0.875$. 也就是说, 如果不考虑系统研制过程中已有不同阶段的试验数据, 仅由当前阶段的试验数据对系统可靠性进行评估时, 评估结果较为保守.

如果不考虑系统性能参数动态变化的特点, 仅将不同阶段的试验数据混合起来对系统的可靠性进行评估, 则经过计算得到系统可靠性的估计值为 $\widehat{R}=0.8333$. 也就是说, 如果不考虑系统研制过程中阶段试验的改进, 仅将试验数据混合起来对系统可靠性进行评估时, 评估结果同样较为保守.

由上述对比分析表明: 本文提供的方法不仅充分利用了系统研制过程中不同阶段的试验数据, 而且考虑到系统性能参数动态变化的特点. 因此, 评估结论合理.

5 结束语

本文结合武器装备研制过程存在多阶段的试验信息和系统性能参数呈现动态变化的工程实际特点, 针对成败型系统, 提出了一种 Bayes 框架下系统可靠性的动态评估方法. 该方法依据系统研制过程中不同研制阶段的可靠性试验数据, 利用可靠性增长模型, 对新批次的系统可靠性进行预测, 从而做出统计分析与评估. 由于该方法充分利用了系统研制过程中不同研制阶段的试验信息, 并考虑到阶段试验的改进, 因此实现了小子样条件下武器装备的可靠性评估. 另外, 避免了传统评估方法计算过程中复杂的多重积分运算和难以解析求解的困扰. 评估方法可行, 评估结论合理.

参考文献

[1] 梅文华. 可靠性增长试验 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
Mei W H. Reliability Growth Test[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003.
[2] 刘飞, 张为华. 基于离散 AMSAA 模型的固体火箭发动机可靠性增长分析 [J]. 固体火箭技术, 2006, 29(1): 22–24.
Liu F, Zhang W H. Analysis on reliability growth of solid rocket motor based on AMSAA discrete model[J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2006, 29(1): 22–24.
[3] Duane J T. Learning curve approach to reliability monitoring[J]. IEEE Transactions on Aerospace, 1964, (2): 563–566.
[4] Crow L H. AMSAA discrete reliability grow model[R]. Army materiel systems analysis activity methodology office, 1983: 1–83.
[5] Johnson R A. Confidence estimation with discrete reliability growth models[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1991, 29: 8–97.
[6] 张金槐. 分布参数可变时的 Bayes 估计 [J]. 飞行器测控学报, 2001, 20(4): 34–38.
Zhang J H. Bayesian estimation of invariable distributed parameter[J]. Journal of Spacecraft TT & C Technology, 2001, 20(4): 34–38.
[7] 张金槐. 多维分布参数可变时的 Bayes 估计 [J]. 飞行器测控学报, 2002, 21(1): 50–53.
Zhang J H. Bayesian estimation of multi-dimensional invariable distributed parameter[J]. Journal of Spacecraft TT & C Technology, 2002, 21(1): 50–53.
[8] Fries A, Sen A. A survey of discrete reliability-growth models[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1996, 45(4): 582–604.
[9] Fries A. Discrete reliability-growth models based on a learning-curve property[J]. IEEE Transaction on Reliability, 1993, 42(2): 303–306.
[10] 武小悦, 刘琦. 装备试验与评价 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
Wu X Y, Liu Q. Equipment Test and Evaluation[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.