第 30 卷第 4 期 系统工程理论与实践 Vol.30, No.4
2010年 4 月 Systems Engineering — Theory & Practice Apr., 2010

文章编号: 1000-6788(2010)04-0751-07 中图分类号: TB114.3 文献标志码: A

突发事件应急管理中的中断 - 继续随机排序模型

唐恒永[1], 唐春晖[2], 赵传立[1]

(1. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034; 2. 浙江财经学院 工商管理学院, 杭州 310018)

摘 要 给出一个突发事件应急管理中的中断 - 继续随机排序模型, 其中突发事件的开始时间和持续时间都是随机的. 极小化的目标函数是期望加权完工时间和、期望加权误工时间和及期望加权误工工件数. 对目标函数是期望加权完工时间和的问题, 证明了在相融条件下, 问题是多项式可解的; 如果突发事件的开始时间是均匀分布, WSPT 规则是问题的最优策略; 对突发事件的开始时间是确定的特殊情况, 给出一个动态规划算法. 对目标函数是期望加权误工时间和及期望加权误工任务数的问题, 证明了在相融条件下, 它们都是多项式可解的.

关键词 突发事件; 随机排序; 中断 - 继续

A preemptive-resume stochastic scheduling model with disruption

TANG Heng-yong[1], TANG Chun-hui[2], ZHAO Chuan-li[1]

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China;
2. Business Administration College, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China)

Abstract We gave a preemptive-resume stochastic scheduling model with disruption, in witch the starting time and the duration of the disruption are both stochastic. Minimized objective functions are the sum of the expected weighted completion times , the sum of the expected weighted tardiness and the expected weighted number of the tardy jobs. For the problem minimizing the sum of the expected weighted completion times we showed that under an agreeable condition the problem can be polynomially solved, if the starting time of disruption is uniformly distributed, the WSPT rule is an optimal static policy for the problem. A dynamic programming algorithm is given for a special case in witch the starting time of the disruption is deterministic. For the problem minimizing the sum of the expected weighted tardiness and the expected weighted number of the tardy jobs we proved that under an agreeable condition the problem can be polynomially solved.

Keywords disruption; stochastic scheduling; preemptive-resume

1 引言

现实世界中不可预知的现象和突发事件广泛出现, 不确定性是普遍的性质, 它反映了现实世界的本性. 不确定性 (Uncertainty) 使得现实世界是动态的, 复杂的. 不论原定的计划如何完整和优越, 在实施过程中突发事件将扰乱正在运行的系统, 使得系统原来的环境发生变化, 甚至可能使得原计划不可行. 如何有效地利用可能的资源, 实时的调整和改变原计划, 减小干扰产生的负作用, 还要使新计划接近原计划. 这是应急管理研究的问题. 应急管理的应用范围从航空业、制造业、到通信、金融、物流等多方面, 是近年来国际上管理科学、系统工程、工业工程和运筹学等领域的一个受重视的新研究课题. 它针对不同的实际问题和突发事件的性质, 建立一些优化模型和有效地求解方法, 为决策者在突发事件发生后及时地提出计划的最优调整方案. 它的研究成果已成功地应用於航空和半导体工业, 取得了显著的经济效益.

近几十年, 人们为了处理突发事件的不确定性做了巨大的努力, 采用各种方法. 这些方法可以分为两类: 预先计划 (Inadvance planning) 和实时重计划 (Real-time re-planning). 预先计划的目标是在对未来不确定

收稿日期: 2008-12-08
资助项目: 国家自然科学基金 (10471096)

的估计的基础上制定一个最优的运行计划. 而实时重计划是在计划执行其间按需要修正原计划. 对不确定性处理的预先计划中, 主要有随机方法、鲁棒优化方法和动态网络技术等[1−3].

本文我们研究不确定突发事件应急管理中的随机方法. 经典的排序文献研究的排序问题都不考虑可能发生的突发事件. 我们考虑这样一种情况: 一台机器 (设备) 可能被某种外部的不确定的因素 (如洪水、暴风雪、地震等灾害) 影响 (破坏). 在这种情况下, 通常事前我们不知道灾害什么时候发生 (如果发生), 持续多长时间. 一些文章研究了突发事件的开始时间和持续时间是确定的排序问题[4−8]. 但很多实际情况中它们是随机的. 我们讨论的问题可以描述成一个具有随机突发事件的单机排序问题, 其中突发事件的开始时间和持续时间都是随机的. 我们研究的中断 - 继续模型, 极小化的目标函数是期望加权完工时间和、期望加权误工时间和及期望加权误工工件数.

上述问题有广泛的应用背景, 具有实际意义价值. 例如, 在地震高发地区的机械加工厂, 地震发生的时间是随机的, 地震专家可以分析出它的 (近似的) 概率分布, 而设备的破坏程度由地震的震级等因素所决定, 所以设备的维修时间, 即排除故障的时间也是随机的, 这类工厂在特定的时间段的调度问题就是我们研究的排序问题.

可能有人会认为, 我们讨论的问题是具有机器故障随机排序问题的一种特殊情况. 其实不然. 在具有机器故障随机排序问题中, 故障多次出现, 故障的发生间隔和排除故障的时间都是随机的, 可把它作为随机过程处理, 研究结果比较多, 例如 [9–12]. 而我们的问题只有一次故障, 实际上更难处理, 结果也很少.

就我们所知, 除了文章 [13] 以外没有文献讨论我们的问题. Lee 和 Yu[13] 研究了与我们的问题类似的具有可能突发事件发生的单机排序问题. 然而, 在他们的问题中, 突发事件的持续时间是一个离散的随机变量, 突发事件的开始时间是确定的. 他们的问题是我们问题的一种特殊情况.

在第 2 节我们描述具有随机突发事件的中断-继续随机排序问题. 第 3 节讨论目标函数是期望加权完工时间和的问题. 我们证明, 在相融条件下, 问题是多项式可解的; 如果突发事件的开始时间是均匀分布,WSPT 规则是问题的最优策略; 对突发事件的开始时间是确定的特殊情况, 给出一个动态规划算法. 第 4 节讨论目标函数是期望加权误工时间和及期望加权误工任务数的问题. 我们证明: 在相融条件下, 它们都是多项式可解的.

2 问题描述

有 n 个工件 $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,n\}$ 需要在一台机器上加工, 所有的工件都在 0 时刻到达, 工件 j 的加工时间、工期和权分别用 p_j、d_j 和 w_j 表示. 假设机器在 0 时刻可以使用. 然而机器在 S 时刻被突发事件破坏, 从此不可使用, 其中 S 是突发事件的开始时间, 是一个遵循任意分布 F 具有有限数学期望 ϕ 的随机变量. 突发事件的持续时间 (或机器的恢复时间)D 是一个遵循分布 G 具有有限数学期望 ψ 的随机变量. S 和 D 是相互独立的. 我们考虑的是中断 - 继续模型. 中断 - 继续的意思是: 如果机器在加工一个工件时发生故障, 故障前对作业进行的加工没有损失, 一旦机器排除故障恢复工作, 作业可以从故障中断处继续加工. 问题是在某种目标函数下确定一个最优的静态优先策略, 静态优先策略指的是工件在机器上加工的顺序. 我们用

$$1|sto\text{-}disruption, resume|\sum E[f_j(C_j)] \tag{1}$$

表示这类问题, 其中 $f_j(t)(j=1,2,\cdots,n)$ 是 $t\geq 0$ 的非减函数. 我们使用的目标函数是期望加权完工时间和 (The sum of the expected weighted completion times , 简记为 SEWCT)、期望加权误工时间和 (The sum of the expected weighted tardiness, 简记为 SEWT), 及期望加权误工工件数 (The expected weighted number of the tardy jobs, 简记为 EWNTJ).

令 $\pi=(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ 是一个工件在机器上加工的顺序 (排列), 其中 $\pi(k)=j$ 表示工件 j 第 k 个被加工. 令 $C_j(\pi)$ 是工件 j 在排列 π 下的完工时间. 用 $\mathcal{B}_j(\pi)$ 表示在排列 π 下不晚于工件 j 加工的工件集 (包括 j). 记 $P_j(\pi)=\sum_{k\in\mathcal{B}_j(\pi)}p_k$. 设 I_A 是事件 A 的示性函数, 即

$$I_A=\begin{cases}1, & \text{如果}\,A\,\text{发生},\\ 0, & \text{如果}\,A\,\text{不发生}.\end{cases}$$

工件 j 在排列 π 下的完工时间和它的数学期望可以表示成

$$C_j(\pi)=P_j(\pi)+I_{(S<P_j(\pi))}D \tag{2}$$

和

$$E[C_j(\pi)] = P_j(\pi) + Pr(S < P_j(\pi))\psi = P_j(\pi) + \psi \int_0^{P_j^-(\pi)} \mathrm{d}F(t) \tag{3}$$

我们先给出以后要使用的一个结论.

引理 令 $\pi = (\cdots, x, y, \cdots)$, $\tau = (\cdots, y, x, \cdots)$, 定义

$$EF(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} E[f_j(C_j(\pi))], \quad F(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} f_j(C_j(\pi)).$$

a) 如果 $p_x \le p_y$, 且 $f_x(t) - f_y(t)$ 是关于 $t \ge 0$ 非减的, 那么 $EF(\tau) \ge EF(\pi)$.

b) 如果工件按 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n$ 排列, 且对任意的 $i < j$, $f_i(t) - f_j(t)$ 是关于 $t \ge 0$ 非减的, 那么 $\pi^* = (1, 2, \cdots, n)$ 是问题 (1) 的一个最优静态策略.

证明 容易看出, 由引理的 a) 可立即得到 b), 因而, 我们只要证明 a) 即可.

对任意样本 $(S^{(\omega)}, D^{(\omega)})$, 工件 j 在排列 π 下的完工时间是

$$C_j^{(\omega)}(\pi) = \begin{cases} P_j(\pi), & P_j(\pi) \le S^{(\omega)} \\ P_j(\pi) + D^{(\omega)}, & P_j(\pi) > S^{(\omega)} \end{cases} \tag{4}$$

那么, 在排列 π 和 τ 下我们有

$$f_z(C_z^{(\omega)}(\pi)) = f_z(C_z^{(\omega)}(\tau)), \qquad z \ne x, y.$$

令 $F^{(\omega)}(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} f_j(C_j^{(\omega)}(\pi))$, 并注意到 $C_y^{(\omega)}(\pi) = C_x^{(\omega)}(\tau)$, 我们得到

$$\begin{aligned} F^{(\omega)}(\tau) - F^{(\omega)}(\pi) &= f_y(C_y^{(\omega)}(\tau)) + f_x(C_x^{(\omega)}(\tau)) - f_x(C_x^{(\omega)}(\pi)) - f_y(C_y^{(\omega)}(\pi)) \\ &= f_y(C_y^{(\omega)}(\tau)) - f_x(C_x^{(\omega)}(\pi)) + f_x(C_x^{(\omega)}(\tau)) - f_y(C_x^{(\omega)}(\tau)) \end{aligned} \tag{5}$$

在式 (5) 的右边加减一个 $f_x(C_y^{(\omega)}(\tau))$, 我们得到

$$\begin{aligned} F^{(\omega)}(\tau) - F^{(\omega)}(\pi) = {} & [f_x(C_y^{(\omega)}(\tau)) - f_x(C_x^{(\omega)}(\pi))] + \\ & \{[f_x(C_x^{(\omega)}(\tau)) - f_y(C_x^{(\omega)}(\tau))] - [f_x(C_y^{(\omega)}(\tau)) - f_y(C_y^{(\omega)}(\tau))]\} \end{aligned} \tag{6}$$

因为 f_x 是非减的, 且 $C_y^{(\omega)}(\tau) \ge C_x^{(\omega)}(\pi)$, 所以式 (6) 的第一项是非负的. 又因为 $C_x^{(\omega)}(\tau) \ge C_y^{(\omega)}(\tau)$, 且 $f_x - f_y$ 是非减的, 所以式 (6) 的第二项也是非负的. 于是

$$F^{(\omega)}(\tau) \ge F^{(\omega)}(\pi) \tag{7}$$

因为不等式 (7) 对任意样本 $(S^{(\omega)}, D^{(\omega)})$ 都是正确的, 所以 $F(\tau)$ 几乎处处大于 $F(\pi)$. 因为几乎处处大于 $\Longrightarrow$ 数学期望大于, 我们有 $EF(\tau) \ge EF(\pi)$. 这就完成了引理的证明.

3 期望加权完工时间和

本节我们考虑极小化期望加权完工时间和 (SEWCT) 的问题. 定义函数

$$\mathrm{SEWCT}(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} E\left[w_j C_j(\pi)\right].$$

我们把问题表示成

$$1|sto\text{-}disruption, resume|\sum E[w_j C_j] \tag{8}$$

众所周知, 对问题 $1||\sum w_j C_j$, WSPT (Weighted shortest processing time first) 规则 (按 p_j/w_j 非减的顺序排列工件) 是一个静态最优策略. 然而, 对突发事件的开始时间和持续时间是确定的特殊情况, 问题已经是 NP-难了 [13]. 所以问题 (8) 也是 NP-难的.

虽然问题 (8) 确定性的情况已经是 NP-难的, 然而, 下边的定理表明: 当工件的权和加工时间满足一个相融 (Agreeable) 条件, 问题 (8) 可多项式求解. 这个相融条件被广泛使用 [9,11].

定义 如果工件能排成这样一个排列, 使 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n$, 且 $w_1 \ge w_2 \ge \cdots \ge w_n$, 称工件的权与加工时间是相融的.

定理 1 如果工件的权与加工时间是相融的, 那么 $\pi^* = (1, 2, \cdots, n)$ 是问题 (8) 的一个最优静态策略.

证明 对一定的 x 和 y 令 $p_x \le p_y$. 定义 $f_j(t) = w_j t$, $j \in \mathcal{N}$. 那么

$$f_x(t) - f_y(t) = w_x t - w_y t = (w_x - w_y)t.$$

利用相融条件有 $w_x \geq w_y$, 即 $w_x - w_y \geq 0$, 所以 $f_x(t) - f_y(t)$ 是关于 $t \geq 0$ 非减的. 根据引理,π^* 是问题 (8) 的一个最优静态策略. 定理得证.

显然, 当 $w_j = 1, \forall j \in \mathcal{N}$ 时, 工件的权与加工时间是相融的. 于是, 我们立即得到

推论 1 如果 $w_j = 1, \forall j \in \mathcal{N}$, SPT (Shortest processing time first) 规则 (按 p_j 的非减顺序排列工件) 是问题 (8) 的一个最优静态策略.

另一方面, 当 $p_j = 1, \forall j \in \mathcal{N}$ 时, 工件的权与加工时间也是相融的. 我们有

推论 2 如果 $p_j = 1, \forall j \in \mathcal{N}$, 工件按 w_j 的非增顺序排列是问题 (8) 的一个最优静态策略.

问题 (8) 确定性的情况是 NP-难的. 然而, 当突发事件的开始时间是均匀分布时, 问题却是多项式可解的.

定理 2 如果突发事件的开始时间是区间 $[0, b]$ 上的均匀分布, 其中 $b \geq \sum_{j \in \mathcal{N}} p_j$, 那么 WSPT 规则是问题 (8) 的一个最优静态策略.

证明 根据式 (3) 我们有

$$\mathrm{SEWCT}(\pi) = \sum_{j \in \mathcal{N}} w_j \left[P_j(\pi) + Pr(S < P_j(\pi))\psi\right] \tag{9}$$

下边我们通过一个标准的交换法来证明定理的结论. 给定任意一个排列 $\pi = (\cdots, x, y, \cdots)$, 我们交换 π 中相邻的两个工件 x, y 得到排列 $\tau = (\cdots, y, x, \cdots)$. 那么, 在 π 和 τ 下有

$$w_z \left[P_z(\pi) + Pr(S < P_z(\pi))\psi\right] = w_z \left[P_z(\tau) + Pr(S < P_z(\tau))\psi\right], \quad z \neq x, y.$$

设 $\mathcal{B}(\pi\tau) = \mathcal{B}_x(\pi) \backslash \{x\} = \mathcal{B}_y(\tau) \backslash \{y\}$ 是在 π 下排在工件 x 前边 (或在 τ 下排在工件 y 前边) 的工件集. 令 $P(\pi\tau) = \sum_{k \in \mathcal{B}(\pi\tau)} p_k$. 根据式 (9), 我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEWCT}(\tau) - \mathrm{SEWCT}(\pi) \\
=& \Big(w_y P(\pi\tau) + w_y p_y + w_x P(\pi\tau) + w_x p_y + w_x p_x\Big) \\
&- \Big(w_x P(\pi\tau) + w_x p_x + w_y P(\pi\tau) + w_y p_x + w_y p_y\Big) \\
&+ \left[w_y Pr(S < P(\pi\tau) + p_y)\psi + w_x Pr(S < P(\pi\tau) + p_x + p_y)\psi\right] \\
&- \left[w_x Pr(S < P(\pi\tau) + p_x)\psi + w_y Pr(S < P(\pi\tau) + p_x + p_y)\psi\right] \\
=& (w_x p_y - w_y p_x) + \left[w_y F(P(\pi\tau) + p_y) + w_x F(P(\pi\tau) + p_x + p_y)\right]\psi \\
&- \left[w_x F(P(\pi\tau) + p_x) + w_y F(P(\pi\tau) + p_x + p_y)\right]\psi
\end{aligned} \tag{10}$$

注意到

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{t}{b}, & 0 \leq t \leq b, \\ 1, & b < t. \end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEWCT}(\tau) - \mathrm{SEWCT}(\pi) \\
=& (w_x p_y - w_y p_x) + \frac{1}{b}\Big[w_y(P(\pi\tau) + p_y) + w_x(P(\pi\tau) + p_x + p_y) - w_x(P(\pi\tau) + p_x) - w_y(P(\pi\tau) + p_x + p_y)\Big]\psi \\
=& (w_x p_y - w_y p_x) + \frac{1}{b}\Big[w_x p_y - w_y p_x\Big]\psi.
\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{SEWCT}(\pi) \leq \mathrm{SEWCT}(\tau)$ 当且仅当 $p_x/w_x \leq p_y/w_y$. 这就完成了定理的证明.

现在我们考虑突发事件的开始时间是确定的这种特殊情况. 我们能用 Lee[6,13] 给出的动态规划算法求解该类问题. 算法的基础是下边的结论.

定理 3 如果问题 (8) 中的突发事件的开始时间 (记作 s) 是确定的, 那么存在一个最优策略, 在这个策略中, 不晚于 s 完工的工件按 WSPT 顺序排列, 在 s 以后完工的工件也按 WSPT 顺序排列.

证明 当突发事件的开始时间是确定的时, $C_j(\pi)$ 和它的数学期望变成

$$C_j(\pi) = \begin{cases} P_j(\pi), & P_j(\pi) \leq s \\ P_j(\pi) + D, & P_j(\pi) > s \end{cases} \tag{11}$$

和

$$E[C_j(\pi)] = \begin{cases} P_j(\pi), & P_j(\pi) \le s \\ P_j(\pi) + \psi, & P_j(\pi) > s \end{cases} \tag{12}$$

下边我们利用式 (12) 用交换法来证明定理的结论.

对完工不晚于 s 的工件集, 该子问题没有突发事件, 因而这些工件按 WSPT 排列是最优的. 现在我们考虑其余的工件. 这些工件中, 除了第一个工件外, 利用交换法可以证明 WSPT 排列是最优的. 所以, 我们只要证明排在第一和第二个位置上的工件也遵循 WSPT 顺序即可. 设排在第一和第二个位置上的工件是 x 和 y. 如果 x 和 y 不是 WSPT 顺序, 即 $p_x/w_x > p_y/w_y$, 我们证明交换这两个工件的位置能严格减少目标函数的值. 设交换前和交换后的排列分别是 π 和 τ. 交换后有两种情况:

情况 1: 交换后第一个工件不晚于 s 完工. 根据式 (12) 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEWCT}(\tau) - \mathrm{SEWCT}(\pi) \\
&= [w_y(P(\pi\tau) + p_y) + w_x(P(\pi\tau) + p_y + \psi + p_x)] - [w_x(P(\pi\tau) + \psi + p_x) + w_y(P(\pi\tau) + p_x + \psi + p_y)] \\
&= w_x p_y - w_y(\psi + p_x) \le w_x p_y - w_y p_x < 0
\end{aligned}$$

情况 2: 交换后第一个工件在 s 后完工. 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SEWCT}(\tau) - \mathrm{SEWCT}(\pi) \\
&= [w_y(P(\pi\tau) + p_y + \psi) + w_x(P(\pi\tau) + p_y + \psi + p_x)] - [w_x(P(\pi\tau) + \psi + p_x) + w_y(P(\pi\tau) + p_x + \psi + p_y)] \\
&= w_x p_y - w_y p_x < 0
\end{aligned}$$

因而, 新排列 τ 下的目标函数值小于最优排列 π 下的目标函数值. 定理证毕.

在定理 3 的基础上我们给出一个动态规划算法. 根据定理 3, 解决问题的关键是找一个 $\mathcal{N}^{(1)} \subseteq \mathcal{N}$, 使 $\sum\limits_{i \in \mathcal{N}^{(1)}} p_i = t \le s$, $t + p_k > s$, 且目标函数值最小, 其中 k 是 $\mathcal{N}^{(2)} = \mathcal{N} \backslash \mathcal{N}^{(1)}$ 中的第一个工件. 为此我们先按 WSPT 顺序重排工件, 即 $p_1/w_1 \le p_2/w_2 \le \cdots \le p_n/w_n$. 对 $i = 1, 2, \cdots, n$, $p = 0, 1, \cdots, s$ 和 $t = p, p+1, \cdots, s$, 令 $\mathcal{N}_i = \{1, 2, \cdots, i\}$, 把问题

$$\min \sum_{j \in \mathcal{N}_i} E[W_j C_j]$$

记作 $\mathrm{SEWCT}(i, p, t)$, 并且要求:

1) 把 $\mathcal{N}_i$ 的工件分配到两个集合 $\mathcal{N}_i^{(1)}$ 和 $\mathcal{N}_i^{(2)} = \mathcal{N}_i \backslash \mathcal{N}_i^{(1)}$ 中;

2) $\mathcal{N}_i^{(1)}$ 中的工件依此从零时刻不空闲地加工, 不晚于 t 加工完毕, 总加工时间是 p;

3) $\mathcal{N}_i^{(2)}$ 中的工件从 t 时刻开始加工, 被突发事件中断后, 在时刻 $s + D$ 重新恢复加工.

设 $f(i, p, t)$ 是问题 $\mathrm{SEWCT}(i, p, t)$ 的最优目标函数值. 如果问题 $\mathrm{SEWCT}(i, p, t)$ 没有可行解, 置 $f(i, p, t) = \infty$. 我们所讨论的问题的最优目标函数值等于 $\min\{f(n, t, t) : t = 0, 1, \cdots, s\}$.

我们将从工件 1 开始逐个分配工件. 假设我们已经最优地分配了工件 $1, 2, \cdots, i-1$. 根据定理 3, 工件 i 或者排在不晚于 t 加工完的最后一个加工 (即分配到集 $\mathcal{N}_i^{(1)}$ 中), 或者排在整个排列的最后一个加工 (即分配到集 $\mathcal{N}_i^{(2)}$ 中). 如果把工件 i 分配到集 $\mathcal{N}_i^{(1)}$ 中, 那么它在时刻 p 完工, 工件 i 对目标函数的贡献是 $w_i p$, 最优目标函数值将等于 $f(i-1, p-p_i, t) + w_i p$. 如果工件 i 在整个排列的最后一个加工, 那么工件 i 对目标函数的贡献是 $w_i\Big(t + \psi + \sum\limits_{k \in \mathcal{N}_i} p_k - p\Big)$, 最优目标函数将等于 $f(i-1, p, t) + w_i\Big(t + \psi + \sum\limits_{k \in \mathcal{N}_i} p_k - p\Big)$.

根据以上的分析, 我们得到下边求突发事件的开始时间是确定的问题 (8) 的一个动态规划算法. 按惯例, 我们假设问题的所有参数都是整数. 为了方便起见, 令 $p_{\max} = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, $P_i = \sum\limits_{1 \le k \le i} p_k$.

算法

1. 初始化条件:

对 $p = 0, 1, \cdots, s$ 执行

对 $t = \max\{p, s - p_{\max} + 1\}, \cdots, s$ 置

$$f(0, p, t) := \begin{cases} 0, & \text{如果 } p = 0, \\ \infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

2. 递归计算:

对 $i=1,2,\cdots,n$ 执行

对 $p=0,1,\cdots,s$ 执行

对 $t=\max\{p,s-p_{\max}+1\},\cdots,s$ 执行

如果 $t+P_i-p>s$, 置

$f(i,p,t):=\min\{f(i-1,p,t)+w_i(t+P_i+\psi-p),f(i-1,p-p_i,t)+w_ip\}$.

否则置

$f(i,p,t):=f(i-1,p-p_i,t)+w_ip$.

3. 计算

$f(n,k,k)=\min\{f(n,t,t):t=\max\{p,s-p_{\max}+1\},\cdots,s\}$.

4. 利用反向追踪程序计算最优排列 π^*.

算法的复杂性是 $O(nsp_{\max})$. 因为具有项 $p_{\max}$, 它是一个拟多项式算法.

4 期望加权误工时间和与期望加权误工工件数

4.1 期望加权误工时间和

定义函数

$$\mathrm{SEWT}(\pi)=\sum_{j\in\mathcal{N}}E\left[w_j\max\{0,C_j(\pi)-d_j\}\right]=\sum_{j\in\mathcal{N}}E\left[w_jT_j(\pi)\right].$$

其中 $T_j(\pi)=\max\{0,C_j(\pi)-d_j\}$. 极小化期望加权误工时间和的问题可以表示成

$$1|sto\text{-}disruption,resume|\sum E[w_jT_j] \tag{13}$$

即使 $w_j=1,\forall j\in\mathcal{N}$, 没有突发事件的问题 $1||\sum w_jT_j$ 仍然是 NP-难的[14]. 因而, 我们的问题 (13) 也是 NP-难的. 然而, 在一个相融条件下问题是多项式可解的.

定理 4 如果工件能这样的排列: 使 $p_1\le p_2\le\cdots\le p_n$, $d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$, 且 $w_1\ge w_2\ge\cdots\ge w_n$, 那么 $\pi^*=(1,2,\cdots,n)$ 是问题 (13) 的一个最优静态策略.

证明 对给定的 x 和 y, 设 $p_x\le p_y$. 根据定理的相融条件, 我们有 $d_x\le d_y$ 和 $w_x\ge w_y$. 定义 $f_j(t)=w_j\max\{0,t-d_j\}$, $j\in\mathcal{N}$. 那么

$$f_x(t)-f_y(t)=\begin{cases}0, & t\le d_x,\\ w_x(t-d_x), & d_x<t<d_y,\\ w_x(t-d_x)-w_y(t-d_y), & d_y\ge t.\end{cases}$$

于是, $f_x(t)-f_y(t)$ 是关于 $t\ge 0$ 非减的. 根据引理 π^* 是问题 (13) 的一个最优静态策略. 定理证毕.

推论 3 如果 $p_j=1$ 和 $w_j=1$,$\forall j\in\mathcal{N}$, EDD (Earliest due date first) 规则 (按工期非减顺序排列工件) 是问题 (13) 的一个最优静态策略.

推论 4 如果 $w_j=1$ $\forall j\in\mathcal{N}$ 且 $d_1=d_2=\cdots=d_n$, SPT 规则是问题 (13) 的一个最优静态策略.

对没有突发事件的问题 $1||\sum w_jT_j$, Potts 和 van Wassenhove[15] 给出了一个动态规划算法. 对一些特殊情况, 问题 (13) 可以用类似 Potts 和 van Wassenhove 的方法求解.

4.2 期望加权误工工件数

定义函数

$$\mathrm{EWNTJ}(\pi)=\sum_{j\in\mathcal{N}}E\left[w_jI_{(C_j(\pi)>d_j)}\right].$$

令

$$U_j(\pi)=\begin{cases}1, & C_j(\pi)>d_j,\\ 0, & C_j(\pi)\le d_j.\end{cases}$$

极小化期望加权误工工件数的问题可以表示成

$$1|sto\text{-}disruption,resume|\sum E[w_jU_j] \tag{14}$$

即使所有的 d_j 都是相等的, 没有突发事件的问题 $1||\sum w_jU_j$ 仍然是 NP-难的[16]. 因而, 我们的问题 (14) 也是 NP-难的. 然而, 在一个相融条件下问题是多项式可解的.

定理 5 如果工件能这样的排列: 使 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n$, $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$, 且 $w_1 \ge w_2 \ge \cdots \ge w_n$, 那么 $\pi^* = (1, 2, \cdots, n)$ 是问题 (14) 的一个最优静态策略.

证明 对给定的 x 和 y, 设 $p_x \le p_y$. 根据定理的相融条件, 我们有 $d_x \le d_y$ 和 $w_x \ge w_y$. 定义 $f_j(t) = w_j \max\{0, t - d_j\}$, $j \in \mathcal{N}$. 那么

$$f_j(t) = \begin{cases} 1, & t > d_j, \\ 0, & t \le d_j. \end{cases}$$

那么

$$f_x(t) - f_y(t) = \begin{cases} 0, & t \le d_x, \\ 1, & d_x < t < d_y, \\ 2, & d_y \le t. \end{cases}$$

于是, $f_x(t) - f_y(t)$ 是关于 $t \ge 0$ 非减的. 根据引理 π^* 是问题 (14) 的一个最优静态策略. 定理证毕.

推论 5 如果 $p_j = 1$ 和 $w_j = 1, \forall j \in \mathcal{N}$, EDD 规则是问题 (14) 的一个最优静态策略.

推论 6 如果 $w_j = 1\ \forall j \in \mathcal{N}$ 且 $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$, SPT 规则是问题 (14) 的一个最优静态策略.

对一些特殊情况, 问题 (14) 可以用 Moore-Hodgson 算法 [6] 求解.

参考文献

[1] Yu G, Qi X. Disruption Management: Framework, Models and Applications[M]. Singapore: World Scientific Publisher, 2004.

[2] Kouvelis P, Yu G. Robust Discrete Optimization and Its Applications[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[3] 计雷, 池洪, 陈安, 等. 突发事件应急管理 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
Ji L, Chi H, Chen A, et al. Disruption Management[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[4] Adiri Bruno J, Frostig E, Rinnooy Kan A H G. Single machine flow-time scheduling with a single breakdown[J]. Acta Inform, 1989, 26: 679–696.

[5] Lee C Y, Liman S D. Single machine flow-time scheduling with scheduled maintenance[J]. Acta Inform, 1992, 29: 375–382.

[6] Lee C Y, Machine scheduling with an availability constraint[J]. J Global Optim, 1996, 9: 363–384 (Special Issue on Optimization on Scheduling Application).

[7] Lee C Y, Lin C S. Machine scheduling with maintenance and repair rate-modifying activities[J]. European J Oper Res, 2001, 135: 491–513.

[8] Lee C Y. Machine scheduling with availability constraints[M]// Leung J. Handbook of Scheduling, CRC Press, Baca Raton, PL, 2004, 22: 1–22.

[9] Birge J, Frenk J B G, Mittenthal J, et al. Single-machine scheduling subject to stochastic breakdowns[J]. Naval Res Legist, 1990, 37: 661–677.

[10] Cai X, Tu F S. Scheduling jobs with random processing times on a single machine subject to stochastic breakdowns to minimize early-tardy penalties[J]. Naval Res Logist, 1996, 43: 1127–1146.

[11] Zhuo X, Cai X. General stochastic single-machine scheduling with regular cost function[J]. Math Comput, 1997, 26(3): 95–108.

[12] Tang H Y, Zhao C L, Cheng C D. Single machine stochastic JIT scheduling problem subject to machine breakdowns[J]. Science in China, Series A, 2008 ,51(2): 273–292.

[13] Lee C Y, Yu G. Single machine scheduling under potential disruption[J]. Oper Res Lett, doi: 10.1016/j.orl.2006.08.005.

[14] Du J, Leung Y T. Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard[J]. Mathematics of Operations Research, 1990, 15: 483–495.

[15] Potts C N, van Wassenhove L N. Dynamic programming and decomposition approaches for the single machine total tardiness problem[J]. European J Oper Res, 1987, 32: 405–414.

[16] Karp R M. Reducibility among combinatorial problems[M]// Mller R E, Thatcher J W. Complexity of Computer Computations, New York: Plenum Press, 1972: 85–103.