第38卷第9期 中国科学技术大学学报 Vol. 38, No. 9
2008年9月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Sep. 2008

文章编号:0253-2778(2008)09-1036-06

完全 t 部图 $K(n-k,n,\cdots,n)$ 的色唯一性

徐利民

(淮南职业技术学院,安徽淮南 232001)

摘要:设 $P(G,\lambda)$ 是图 G 的色多项式.如果对任意使 $P(G,\lambda)=P(H,\lambda)$ 的图 H 都与 G 同构,则称图 G 是色唯一图.通过比较图的特征子图的个数,讨论了由文献[Koh K M, Teo K L. The search for chromatically unique graphs. Graphs and Combinatorics, 1999,6: 259-285]中提出的猜想(若 $n\geqslant k+2$,则完全三部图 $K(n-k,n,n)$ 是色唯一图);推广了文献[Liu Ru-yin, Zhao Hai-xing, Ye Cheng-fu. A complete solution to a conjecture on chromatic unique of complete tripartite graphs. Discrete Mathematics, 2004, 289: 175-179]中的结果(若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$,则 $K(n-k,n,n)$ 是色唯一图;若 $n\geqslant 2k\geqslant 4$,则 $K(n-k,n-1,n)$ 是色唯一图);证明了若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$,则 $K(n-k,n,\cdots,n)$ 是色唯一图,若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$,则 $K(n-k,n-1,n,\cdots,n)$ 是色唯一图.

关键词:色唯一图;特征子图;完全 t 部图;色等价

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

AMS Subject Classification (2000): 05C15

Chromatic uniqueness of complete t-partite graphs $K(n-k,n,\cdots,n)$

XU Li-min

(*Huainan Vocational and Technical College, Huainan* 232001, *China*)

Abstract: Let $P(G,\lambda)$ be the chromatic polynomial of a graph G. A graph G is chromatically unique if for any graph H, $P(G,\lambda)=P(H,\lambda)$ implies $H\cong G$. By comparing the numbers of the characteristic subgraph of graphs, the conjecture (For $n\geqslant k+2$, the graph $K(n-k,n,n)$ is chromatically unique) brought forward by Koh and Teo in Ref. [Koh K M, Teo K L. The search for chromatically unique graphs. Graphs and Combinatorics, 1999,6: 259-285] was discussed. The result(For $n\geqslant k+2\geqslant 4$, the graph $K(n-k,n,n)$ is chromatically unique; for $n\geqslant 2k\geqslant 4$, the graph $K(n-k,n-1,n)$ is chromatically unique) given in Ref. [Liu Ru-yin, Zhao Hai-xing, Ye Cheng-fu. A complete solution to a conjecture on chromatic unique of complete tripartite graphs. Discrete Mathematics, 2004, 289: 175-179] was generalized. It was proved that $K(n-k,n,\cdots,n)$ is chromatically unique for $n\geqslant k+2\geqslant 4$, and $K(n-k,n-1,n,\cdots,n)$ is chromatically unique for $n\geqslant k+2\geqslant 4$.

Key words: chromatically unique graph; characteristic subgraph; complete t-partite graph; chromatically equivalent

---

收稿日期:2007-05-20;**修回日期**:2007-12-13

作者简介:徐利民,男,1961年生,副教授.研究方向:图论. E-mail: xulimina@126.com

0　引言

设 G_1,G_2 是一个简单无向的标定图，若 G_1,G_2 具有相同的色多项式，称图 G_1 与 G_2 是色等价的，记 $G_1\sim G_2$. 若对任意与 G 色等价的图 G^* 都与图 G 同构($G\cong G^*$)，则称图 G 是色唯一图.

文献[1]提出了下列的问题和猜想：

问题 A　若 $|n_i-n_j|\leqslant 2,1\leqslant i,j\leqslant t$ 且 $\min\{n_1,n_2,\cdots,n_t\}$ 充分大，$K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 是否为色唯一图？

猜想 B　设 n,k 是正整数，当 $n\geqslant k+2$ 时，$K(n-k,n,n)$ 是色唯一图.

文献[2]综述了 1997 年以前的结果. 关于完全 t 部图色唯一性，文献[1～4]指出或证明了下列一些完全 t 部图是色唯一图：$K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$(若 $|n_i-n_j|\leqslant 1,1\leqslant i,j\leqslant t$)；$K(n-1,n,\cdots,n,n+1)$(若 $n\geqslant 3$)；$K(1,n_2,\cdots,n_t)$(当且仅当 $\max\{n_2,n_3,\cdots,n_t\}\leqslant 2$).

文献[5]已完全解答了问题 A 是正确的，并证明了下列定理：

定理 0.1[5]　若 $|n_i-n_j|\leqslant k$ 和

$$\min\{n_1,n_2,\cdots,n_t\}\geqslant tk^2/4+k\sqrt{2(t-1)}/2+1,$$

则 $K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 是色唯一图.

猜想 B 也已在文献[6]中得到解决，有下列定理证明：

定理 0.2[6]　若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$，则 $K(n-k,n,n)$ 是色唯一图.

定理 0.3[6]　若 $n\geqslant 2k\geqslant 4$，则 $K(n-k,n-1,n)$ 是色唯一图.

本文通过比较特征子图的个数，改进了文献[6]中的结果，证明了下列结果：

定理 0.4　设 n,k 是正整数，若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$，则完全 t 部图 $K(n-k,n,\cdots,n)$ 是色唯一图.

定理 0.5　设 n,k 是正整数，若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$，则完全 t 部图 $K(n-k,n-1,n,\cdots,n)$ 是色唯一图.

1　基本引理

引理 1.1[8]　设 $n_i,m_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是正整数，$n_1+n_2+\cdots+n_t=m_1+m_2+\cdots+m_t=p$，则完全 t 部图 $G_1=K(m_1,m_2,\cdots,m_t)$ 与 $G_2=K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 的边数之差

$$I_1=|E(G_1)|-|E(G_2)|=\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^2-m_i^2)/2,\quad(1)$$

三角形子图的个数之差

$$I_2=p\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^2-m_i^2)/2-\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^3-m_i^3)/3.\quad(2)$$

引理 1.2[1]　设 G 是一个有 p 个顶点和 q 条边的简单图，$P(G,\lambda)=\sum_{1\leqslant i\leqslant p}a_i\lambda^i$ 是 G 的色多项式，则①$a_p=1,a_{p-1}=-q$，②$a_{p-2}=C_p^2-t_1(G)$，③$a_{p-3}=-C_p{}^3+(p-2)t_1(G)+t_2(G)-2t_3(G)$. 其中，$t_1(G)$ 是图 G 的三角形子图的个数，$t_2(G)$ 是图 G 的无弦的四边形子图的个数，$t_3(G)$ 是图 G 的 K_4 子图的个数.

设 G 是一个有 p 个顶点和 q 条边的简单图，$m_r(G)$ 是将图的顶点集 $V(G)$ 分成 r 个色类的色划分数目，则 $P(G,\lambda)=\sum_{1\leqslant i\leqslant p}m_i(G)(\lambda)_i$(其中 $(\lambda)_i=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$) 为图 G 的色多项式的另一种形式. $\sigma(G,\lambda)=\sum_{1\leqslant i\leqslant p}m_i(G)\lambda^i$ 称为图 G 的 σ 多项式. 显然 $P(G,\lambda)=P(H,\lambda)$ 当且仅当

$$\sigma(G,\lambda)=\sigma(H,\lambda).$$

设图 G 和 H 有不相交的顶点集，则图 $G+H$ 的顶点集为

$$V(G+H)=V(G)\cup V(H),$$

边集为

$$E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup\{xy\mid x\in V(G),y\in V(H)\}.$$

引理 1.3[7]　设图 G 和 H 有不相交的顶点集，则

$$\sigma(G+H,\lambda)=\sigma(G,\lambda)\sigma(H,\lambda).\quad(3)$$

特别地，有

$$\sigma(K(n_1,n_2,\cdots,n_t),\lambda)=\prod_{1\leqslant i\leqslant t}\sigma(\overline{K_{n_i}},\lambda).\quad(4)$$

引理 1.4[2]　设 $n\geqslant m\geqslant 2$，则 $K(n,m)$ 是色唯一图.

引理 1.5[8]　设 $K(n_1,n_2)$ 是一个完全二部图，V_1 与 V_2 是它的唯一的 2 色类的色划分，并且 $|V_i|=n_i$，X 是它的一个边子集，$v_i(\in V_1)$ 在 X 中关联边的数目为 s_i，且 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_d>0$，$s_1+s_3+\cdots+s_d=|X|$，则从 $K(n_1,n_2)$ 中移去 X 的所有边，至少可移去

$$\sum_{i=1}^{d}(n_1-i)[n_2-(s_i+1)/2]s_i\quad(5)$$

个四边形.

证明　设在 X 中与 v_1 关联的边是 $e_1,e_2,\cdots,e_{s_1}$，从 $K(n_1,n_2)$ 中移去 e_1，可以从 $K(n_1,n_2)$ 中移去 $(n_1-1)(n_2-1)$ 个四边形. 从 $K(n_1,n_2)$ 中移去 e_1 在 V_2 中的端点，得完全二部图 $K(n_1,n_2-1)$.

从 $K(n_1, n_2-1)$ 中移去 e_2，可以从 $K(n_1, n_2-1)$ 中移去 $(n_1-1)(n_2-2)$ 个四边形. 从 $K(n_1, n_2-1)$ 中移去 e_2 在 V_2 中的端点，得完全二部图 $K(n_1, n_2-2)$.

从 $K(n_1, n_2-2)$ 中移去 e_3，可以从 $K(n_1, n_2-2)$ 中移去 $(n_1-1)(n_2-3)$ 个四边形. 从 $K(n_1, n_2-2)$ 中移去 e_3 在 V_2 中的端点，得完全二部图 $K(n_1, n_2-3)$.

显然上述步骤没有移去相同的四边形. 依此类推，从 $K(n_1, n_2)$ 中，移去边 $e_1, e_2, \cdots, e_{s_1}$，至少可移去 $(n_1-1)[(n_2-1)+(n_2-2)+\cdots+(n_2-s_1)]$ 个四边形.

再从 $K(n_1, n_2)$ 中移去 v_1 得完全二部图 $K(n_1-1, n_2)$. 又设 X 中与 v_2 相关联的边为 $x_1, x_2, \cdots, x_{s_2}$，从 $K(n_1-1, n_2)$ 中移去边 $x_1, x_2, \cdots, x_{s_2}$，至少可移去 $(n_1-2)[(n_2-1)+(n_2-2)+\cdots+(n_2-s_2)]$ 个四边形.

再从 $K(n_1-1, n_2)$ 中移去 v_2 得完全二部图 $K(n_1-2, n_2)$. 依此类推，从 $K(n_1, n_2)$ 中，移去 X 的边，至少可移去

$$\sum_{i=1}^{d}(n_1-i)[(n_2-1)+(n_2-2)+\cdots+(n_2-s_i)] = \sum_{i=1}^{d}(n_1-i)[n_2-(s_i+1)/2]s_i$$

个四边形. □

2 定理的证明

定理 0.4 的证明 设

$$G_1 = K(n+r_1, n+r_2, \cdots, n+r_t) - A \sim G_2 = K(n-k, n, \cdots, n),$$

其中，A 是图 $G=K(n+r_1, n+r_2, \cdots, n+r_t)$ 的边子集，$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_t$.

由引理 1.1 和引理 1.2 得

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i - m_i) = 0,$$

$$|A| = \sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^2 - m_i^2)/2.$$

所以

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_t = -k,$$

$$k^2 - (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_t^2) = 2|A| \geqslant 0.$$

因为 $k \geqslant 2$，易得 $r_1 + r_2 < 0$.

因为从图 $G=K(n+r_1, n+r_2, \cdots, n+r_t)$ 中移去一条边，最多可移去 G 中 $(n+r_3)+(n+r_4)+\cdots+(n+r_t)$ 个三角形，所以移去 $|A|$ 条边至多可移去 G 中 $[(n+r_3)+(n+r_4)+\cdots+(n+r_t)]|A|$ 个三角形，以及由引理 1.1，G_1 与 G_2 的 三角形个数之差：

$$\beta \geqslant \frac{p}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^2 - m_i^2) - \frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^3 - m_i^3) - [(n+r_3)+(n+r_4)+\cdots+(n+r_t)]|A| =$$

$$\frac{p}{2}[k^2 - (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_t^2)] - \frac{1}{3}[(n-k)^3 + (t-1)n^3 - \sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n+r_i)^3] - [(n+r_3)+(n+r_4)+\cdots+(n+r_t)] \cdot [k^2 - (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_t^2)]/2 =$$

$$\frac{r_1+r_2}{2}[k^2 - (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_t^2)] + \frac{1}{3}[k^3 + (r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_t^3)] =$$

$$\frac{r_1+r_2}{2}[(r_1+r_2+\cdots+r_t)^2 - (r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_t^2)] - \frac{1}{3}[(r_1+r_2+\cdots+r_t)^3 - (r_1^3 + r_2^3 + \cdots + r_t^3)] =$$

$$\frac{r_1+r_2}{2}[(r_1+r_2)^2 - (r_2^2 + r_2^2) + (r_3+r_4+\cdots+r_t)^2 - (r_3^2 + \cdots + r_t^2) + 2(r_1+r_2)(r_3+\cdots+r_t)] - \frac{1}{3}[(r_1+r_2)^3 - (r_1^3 + r_2^3) + (r_3+\cdots+r_t)^3 - (r_3^3 + \cdots + r_t^3) + 3(r_1+r_2)(r_3+\cdots+r_t)^2 + 3(r_1+r_2)^2(r_3+\cdots+r_t)] =$$

$$-\frac{r_1+r_2}{2}[(r_3+r_4+\cdots+r_t)^2 + (r_3^2 + \cdots + r_t^2)] - \frac{1}{3}[(r_3+\cdots+r_t)^3 - (r_3^3 + \cdots + r_t^3)] =$$

$$-\left[\frac{r_1+r_2}{2} + \frac{1}{3}(r_3+\cdots+r_t)\right](r_3+\cdots+r_t)^2 - \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_3}{3}\right)r_3^2 - \cdots - \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_t}{3}\right)r_t^2.$$

因为

$$\frac{r_1+r_2}{2} + \frac{1}{3}(r_3+\cdots+r_t) = \frac{r_1+r_2}{6} + \frac{1}{3}(r_1+r_2+\cdots+r_t) = \frac{r_1+r_2}{6} - \frac{k}{3} < 0,$$

$$\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_i}{3} = \frac{r_1+r_2}{3} + \frac{(r_1-r_i)+(r_2-r_i)}{6} < 0, i \geqslant 3.$$

所以

$$\beta \geqslant -\left[\frac{r_1+r_2}{2} + \frac{1}{3}(r_3+\cdots+r_t)\right](r_3+\cdots+r_t)^2 - \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_3}{3}\right)r_3^2 - \cdots - \left(\frac{r_1+r_2}{2} - \frac{r_t}{3}\right)r_t^2 \geqslant 0. \tag{6}$$

由引理 1.2 得 $\beta=0$，所以

$$-\left[\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{1}{3}(r_3+\cdots+r_t)\right](r_3+\cdots+r_t)^2-\left(\frac{r_1+r_2}{2}-\frac{r_3}{3}\right)r_3^2-\cdots-\left(\frac{r_1+r_2}{2}-\frac{r_t}{3}\right)r_t^2=0,$$

因此 $r_3=r_4=\cdots=r_t=0$.

现用反证法证明 $r_2=r_3=0$. 假定 $r_2<r_3=0$.

设 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 是图 G 顶点集唯一的一个 t 色类的色划分，并且 $|V_i|=n+r_i(i=1,2,\cdots,t)$. 由上述可知，仅当图 G 移去边的两个顶点分别在 V_1 与 V_2 中时，式(6)的等号成立. 所以由 $\beta=0$ 可知，G 中移去边的两个顶点只能分别在 V_1 和 V_2 中. 所以

$$G_1=K(n+r_1,n+r_2,\cdots,n+r_t)-A=H+\overline{K_n}+\cdots+\overline{K_n}.$$

其中，$H=K(n+r_1,n+r_2)-A$.

$$G_2=K(n-k,n,\cdots,n)=K(n-k,n)+\overline{K_n}+\cdots+\overline{K_n}.$$

由 $G_1\sim G_2$ 以及引理 1.3 得

$$\sigma(H,\lambda)\sigma(\overline{K_n},\lambda)^{t-2}=\sigma(K(n-k,n),\lambda)\sigma(\overline{K_n},\lambda)^{t-2}.$$

所以

$$\sigma(H,\lambda)=\sigma(K(n-k,n),\lambda).$$

由引理 1.4，$H\cong K(n-k,n)$，所以 $r_2=r_3=0$，与假设 $r_2<r_3$ 相矛盾. 所以 $r_2=r_3=0$，即 $G_1\cong G_2$，所以 G_2 是色唯一图.

定理 0.5 的证明　设

$$G_1=K(n-k,n-1,n,\cdots,n)\sim G_2=K(n+r_1,n+r_2,\cdots,n+r_t)-A,$$

其中，A 是 $K(n+r_1,n+r_2,\cdots,n+r_t)$ 的边子集，$r_1\leqslant r_2\leqslant\cdots\leqslant r_t$. 所以

$$|A|=\frac{1}{2}(k^2+1-(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_t^2)),$$
$$r_1+r_2+\cdots+r_t=-k-1,$$

显然 $r_1+r_2<0$. 所以 G_2 与 G_1 的三角形子图的个数之差：

$$\begin{aligned}
\beta\geqslant{}&\frac{p}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant t}({n_i}^2-{m_i}^2)-\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i\leqslant t}(n_i^3-m_i^3)-\\
&[(n+r_3)+(n+r_4)+\cdots+(n+r_t)]\,|A|=\\
&(r_1+r_2)[(k^2+1)-(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_t^2)]/2-\\
&[(-k^3-1)-(r_1^3+r_2^3+\cdots+r_t^3)]/3=\\
&(r_1+r_2)[(k+1)^2-(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_t^2)-2k]/2-\\
&[(-k-1)^3-(r_1^3+r_2^3+\cdots+r_t^3)+3k^2+3k]/3=\\
&(r_1+r_2)[(r_1+r_2+\cdots+r_t)^2-\\
&(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_t^2)]/2-\\
&k(r_1+r_2)-[(r_1+r_2+\cdots+r_t)^3-\\
&(r_1^3+r_2^3+\cdots+r_t^3)]/3-k^2-k=\\
&-\left[\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{1}{3}(r_3+r_4+\cdots+r_t)\right]\cdot\\
&(r_3+r_4+\cdots+r_t)^2-k(r_1+r_2)-\\
&\left(\frac{r_1+r_2}{2}-\frac{r_3}{3}\right)r_3^2-\left(\frac{r_1+r_2}{2}-\frac{r_4}{3}\right)r_4^2-\cdots-\\
&\left(\frac{r_1+r_2}{2}-\frac{r_t}{3}\right)r_t^2-k^2-k=\\
&-\left[\frac{r_1+r_2}{6}+\frac{1}{3}(r_1+r_2+\cdots+r_t)\right]\cdot\\
&(r_3+r_4+\cdots+r_t)^2-k(r_1+r_2)-\\
&\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_3}{3}\right)r_3^2-\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_4}{3}\right)r_4^2-\cdots-\\
&\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_t}{3}\right)r_t^2+\\
&k(r_1+r_2+\cdots+r_t)-\frac{r_1+r_2}{3}(r_3^2+r_4^2+\cdots+r_t^2)=\\
&-\left[\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{1}{3}(k+1)\right](r_3+r_4+\cdots+r_t)^2+\\
&k(r_3+r_4+\cdots+r_t)-\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_3}{3}\right)r_3^2-\\
&\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_4}{3}\right)r_4^2-\cdots-\left(\frac{r_1+r_2}{6}-\frac{r_t}{3}\right)r_t^2-\\
&\frac{r_1+r_2}{3}(r_3^2+r_4^2+\cdots+r_t^2).
\end{aligned}\tag{7}$$

（Ⅰ）当 $r_3+r_4+\cdots+r_t\leqslant-3$ 时，

$$\begin{aligned}
\beta\geqslant{}&\frac{1}{3}(k+1)(r_3+r_4+\cdots+r_t)^2+\\
&k(r_3+r_4+\cdots+r_t)\geqslant\\
&(k+1)\,|r_3+r_4+\cdots+r_t|-\\
&k\,|r_3+r_4+\cdots+r_t|\geqslant3>0,
\end{aligned}$$

与 $\beta=0$ 相矛盾.

（Ⅱ）当 $r_3+r_4+\cdots+r_t=-2$ 时，

$$r_1+r_2=-k-1+2=-(k-1),$$
$$r_3^2+r_4^2+\cdots+r_t^2\geqslant2.$$

所以

$$\begin{aligned}
\beta\geqslant{}&-\left[\frac{-4(k-1)}{6}-\frac{4}{3}(k+1)\right]-\\
&\frac{-2(k-1)}{3}-2k=\\
&\frac{4(k+1)}{3}+\frac{4(k-1)}{3}-2k=\\
&\frac{2k}{3}>0,
\end{aligned}$$

与 $\beta=0$ 相矛盾.

（Ⅲ）当 $r_3+r_4+\cdots+r_t=-1$ 时，$r_1+r_2=-k-1+1=-k$.

① 若 $r_3^2+r_4^2+\cdots+r_t^2\geqslant2$，所以

$$\beta \geqslant -[-k/6-(k+1)/3]+2k/3-k = k/6+1/3>0,$$

与 $\beta=0$ 相矛盾.

② 若 $r_3^2+r_4^2+\cdots+r_t^2=1$，即 $r_3=-1, r_4=\cdots=r_t=0$，所以

$$\beta \geqslant -\left[-k/6-(k+1)/3\right]-(-k)/3-[-k/6+1/3]-k=[k/6+k/3+k/3+k/6+1/3-1/3]-k=0.$$

设 $V_1V_2\cdots V_t$ 是 $K(n+r_1, n+r_2, \cdots, n+r_t)$ 的唯一 t 色类的色划分，并且 $|V_i|=n+r_i(i=1,2,\cdots,t)$.

若 $r_2<r_3=-1$ 时，移去边的两个端点仅在 V_1 与 V_2 中时，$\beta=0$，否则 $\beta>0$. 所以由定理 0.4 的证明可知 $K(n-k,n)\sim K(n+r_1,n+r_2)-A$，由 $K(n-k,n)$ 的色唯一性，得 $r_1=-k, r_2=0$，与 $r_2<r_3$ 相矛盾. 若 $r_2=r_3=-1$ 时，移去边的端点仅在 V_1，V_2，V_3 时，能有 $\beta=0$. 所以由定理 0.4 的证明可知

$$K(n-k,n-1,n)\sim K(n+r_1,n+r_2,n+r_3)-A=K(n-k+1,n-1,n-1)-A.$$

因为当 $k=2$ 时，由定理 0.3 知 $K(n-k,n-1,n)$ 是色唯一的，所以此时 $k>2$.

由上述从 $K(n-k+1,n-1,n-1)$ 中移去 $|A|$ 条边，所能移去的三角形的最大数目可知，移去边的两个端点分别在两个最小的孤立点集中，并且移去的两条边不能在同一个三角形中，否则 $\beta>0$，与 $\beta=0$ 相矛盾. 所以，若移去边的两个端点分别仅在 V_1 与 V_2 或分别仅在 V_1 与 V_3 中时，由定理 0.4 的证明可知 $K(n-k,n)\sim K(n-k+1,n-1)-A$，与引理 1.4 相矛盾. 若移去边的两个端点有分别在 V_1 与 V_2 中的，又有分别在 V_1 与 V_3 中时，设 A_1 是 A 中边的端点在 V_1 与 V_2 中的边集，A_2 是 A 中边的端点在 V_1 与 V_3 中的边集，并且 A_1 与 A_2 中的边不相邻接，即移去的边不在同一个三角形中.

又设 $v_i(\in V_1)$ 与 A_1 中关联边的数目为 s_i，并且 $s_1+s_2+\cdots+s_{d_1}=f_1, s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_{d_1}>0$，$u_i(u_i\in V_1)$ 与 A_2 中关联边的数目为 w_i. 并且 $w_1+w_2+\cdots+w_{d_2}=f_2, w_1\geqslant w_2\geqslant\cdots\geqslant w_{d_2}>0$，所以

$$f_1+f_2=|A|=k-1, d_1<n-k+1, d_2<n-k+1.$$

因为 $|A|$ 的两个端点与第三个孤立点集（V_2 或 V_3）的两个点构成一个 K_4-e 子图（e 是 K_4 的一条边），从 $K(n-k+1,n-1,n-1)$ 中移去 $|A|$ 的 $k-1$ 条边，至多可增加 $(k-1)C_{n-1}^2$ 个无弦的四边形，并且由引理 1.5，$K(n-k+1,n-1,n-1)-A$ 与 $K(n-k,n-1,n)$ 的无弦的四边形之差：

$$\gamma\leqslant C_{n-k+1}^2C_{n-1}^2+C_{n-k+1}^2C_{n-1}^2+C_{n-1}^2C_{n-1}^2+(k-1)C_{n-1}^2-C_{n-k}^2C_{n-1}^2-C_{n-k}^2C_n^2-C_{n-1}^2C_n^2-$$
$$\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(s_i+1)\right)s_i-\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(w_i+1)\right)w_i=$$
$$C_{n-1}^2[C_{n-k+1}^2+C_{n-1}^2-C_{n-k}^2-C_n^2]+C_{n-k+1}^2C_{n-1}^2-C_{n-k}^2C_n^2+(k-1)C_{n-1}^2-$$
$$\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(s_i+1)\right)s_i-\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(w_i+1)\right)w_i=$$
$$C_{n-1}^2[(n-k+1)(n-k)+(n-1)(n-2)-(n-k)(n-k-1)-n(n-1)]/2+[(n-k+1)(n-k)(n-1)(n-2)-(n-k)(n-k-1)n(n-1)]/4+(k-1)C_{n-1}^2-$$
$$\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(s_i+1)\right)s_i-\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(w_i+1)\right)w_i=$$
$$C_{n-1}^2[(n-k)-(n-1)]+\frac{1}{2}(n-k)(n-1)(k-1)+(k-1)C_{n-1}^2-$$
$$\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(s_i+1)\right)s_i-\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)\left(n-1-\frac{1}{2}(w_i+1)\right)w_i=$$
$$\frac{1}{2}(n-k)(n-1)(k-1)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)[2(n-1)-(s_i+1)]s_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)(2(n-1)-(w_i+1))w_i=$$
$$\frac{1}{2}(n-k)(n-1)f_1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)[2(n-1)-(s_i+1)]s_i+\frac{1}{2}(n-k)(n-1)f_2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_2}(n-k+1-i)[2(n-1)-(w_i+1)]w_i=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

因为

$$\Sigma_1=\frac{1}{2}(n-k)(n-1)f_1-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)[2(n-1)-(s_i+1)]s_i=$$

$$\frac{1}{2}(n-k)(n-1)\sum_{i=1}^{d_1}s_i-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}(n-k+1-i)(2(n-1)-(s_i+1))s_i=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}[(n-k)(n-1)s_i-(n-k-(i-1))\cdot$$

$$(2(n-1)-(s_i+1))s_i]=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1}[-(n-k)(n-1-(s_i+1))s_i+$$

$$(i-1)(2(n-1)-(s_i+1))s_i]=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{d_1}[(i-1)(2(n-1)-(s_i+1))s_i-$$

$$(n-k)(n-2)s_i]-\frac{1}{2}(n-k)(n-1-(s_1+1))s_1+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{d_1}(n-k)s_i^2\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{d_1}[(i-1)(2(n-1)-(s_i+1))s_i-$$

$$(n-k)(2n-4)s_i/2]-$$

$$\frac{1}{2}(n-k)[n-(s_1+s_2+\cdots+s_{p_1})-2]s_1\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{d_1}[(i-1)(2n-4)s_i-(n-k)(2n-4)s_i/2]-$$

$$\frac{1}{2}(n-k)[n-(k-1)-2]s_1<$$

$$(n-2)\sum_{i=2}^{d_1}[(i-1)s_i-(n-k)s_i/2].$$

当 $d_1\leqslant(n-k)/2+1$ 时，显然

$$\Sigma_1<0.$$

当 $d_1>(n-k)/2+1$ 时，若 $n-k=2h$ 为偶数，因为 $d_1\leqslant(n-k)=2h$，

$$\Sigma=\sum_{2\leqslant i\leqslant d_1}[(i-1)-(n-k)/2]s_i\leqslant$$

$$\sum_{2\leqslant i\leqslant h+1}[(i-1)-(n-k)/2]s_i+$$

$$\sum_{h+2\leqslant i\leqslant 2h}[(i-1)-(n-k)/2]s_i=$$

$$(1-h)s_2+(2-h)s_3+\cdots+(-1)s_h+$$

$$(h-1)s_{2h}+(h-2)s_{2h-1}+\cdots+s_{h+2}=$$

$$(h-1)(s_{2h}-s_2)+(h-2)(s_{2h-1}-s_3)+\cdots+$$

$$(s_{h+2}-s_h)\leqslant 0,$$

所以 $\Sigma_1<0$.

若 $(n-k)=2h+1$ 为奇数时，$d_1\leqslant 2h+1$，同理可得 $\Sigma_1<0$.

同理可证 $\Sigma_2<0$，所以 $\gamma<0$. 因为三部图的 K_4 子图的个数为零，所以由引理 1.2 得 $\gamma=0$，所以此时与 $\gamma<0$ 相矛盾.

(Ⅳ) 当 $r_3+r_4+\cdots+r_t\geqslant 0$ 时，式(7)的每一项非负. 由 $\beta=0$ 得 $r_3=r_4=\cdots=r_t=0$.

由 $|A|=\frac{1}{2}[(k^2+1)-(r_1^2+r_2^2)]\geqslant 0$ 以及 $r_1+r_2=-k-1$，可得 $r_2<r_3=0$. 所以移去边的端点仅能在 V_1 与 V_2 中，所以

$$K(n-k,n-1)\sim K(n+r_1,n+r_2)-A,$$

因为 $K(n-k,n-1)$ 是色唯一的，有 $r_1=-k,r_2=-1$，所以 $K(n-k,n-1,n,\cdots,n)$ 是色唯一的.

致谢 徐俊明教授在研究过程中给予了帮助和鼓励，并提出许多宝贵意见，在此表示感谢.

参考文献(References)

[1] Koh K M, Teo K L. The search for chromatically unique graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1999, 6: 259-285.

[2] Koh K M, Teo K L. The search for chromatically unique graphs-Ⅱ[J]. Discrete Mathematics, 1997, 172: 59-78.

[3] Chia G L, Goh B H, Koh T M. The chromaticity of some families of complete tripartite graphs[J]. Scientia, Series A: Mathematical Sciences, 1988, 2: 27-37.

[4] Li Nian-zu, Liu Ru-ying. The chromaticity of the complete t-partite graph $K(1,p,\cdots,p)$[J]. Journal of Xinjiang University, 1990, 7(3): 95-96.

[5] Zhao Hai-xing, Li Xue-liang, Liu Ru-ying, et al. The chromaticity of certain complete multipartite graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 2004, 20: 423-434.

[6] Liu Ru-yin, Zhao Hai-xing, Ye Cheng-fu. A complete solution to a conjecture on chromatic unique of complete tripartite graphs[J]. Discrete Mathematics, 2004, 289: 175-179.

[7] Brenti F. Expansions of chromatic polynomial and log-concavity[J]. Trans Amer Math Soc, 1992, 332: 729-756.

[8] 徐利民. 完全三部图 $K(n-k,n,n)$ 的色唯一性[J]. 大学数学, 2003, 22(3): 78-84.