顾及参考点点位误差的八方向模糊不均匀划分模型 *

郭继发[1,2], 王瑞芳[3], 彭光雄[2]
(1. 中国科学院 研究生院, 北京 100049; 2. 中国科学院 遥感应用研究所, 北京 100101; 3. 郑州测绘学校, 郑州 450005)

摘　要：基于经典模糊集建立了模糊方向模型,在四方向模型中各方向是等角划分;在八方向模型中四个主要方向各占 60°,四次要方向各占 30°。提出建立模糊方向区间来描述目标地物与参考点之间的方向关系,用一对带有符号的隶属度来表示目标在原子方向的隶属关系,使方向关系的描述更精细。利用二型模糊集理论建立了顾及参考点点位误差的八方向模糊不均匀划分模型,讨论了方向主隶属度成员函数和隶属度的不确定性。由于参考点点位误差引起方向隶属度误差,增加了方向关系的不确定性。该模型充分考虑了参考点点位误差、认知习惯和目标对象在参考点各原子方向的权重,顾及了多方面确定或不确定的信息,在方向关系近似描述中有较大的应用前景。

关键词：八方向不均匀模糊划分模型; 二型模糊集; 模糊方向区间; 位置误差; 方向隶属度误差
中图分类号：TP208　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2010)02-0479-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.02.020

8-direction asymmetry fuzzy model considering reference point's location error

GUO Ji-fa[1,2], WANG Rui-fang[3], PENG Guang-xiong[2]
(1. *Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*; 2. *Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100101, *China*; 3. *Zhengzhou Technical School for Surveying & Mapping, Zhengzhou* 450005, *China*)

Abstract: In 4 fuzzy directions model the space was divided into four equal angle partitions, each main direction has 60 degrees and each secondary direction has 30 degrees in 8 fuzzy directions model. This paper proposed a new method for describing the cardinal directions between reference point and target object through constructing fuzzy direction interval value, used a couple of membership grade values with sign for describing direction to describe the membership in an atom-direction, this method was more elaborate than others. Introduced an 8-direction asymmetry fuzzy model based on type-2 fuzzy sets which took the location error of reference point into account, discussed the primary membership function and the uncertainty of primary membership grade too. The uncertainty of cardinal direction increase because of the direction membership grade error conduced by location error of reference point. This model took the location error of reference point, considered cognize habit and ratio about object in each direction into account, certain and uncertain information in this model, and it should have wonderful application potential in spatial relationship description and reasoning.

Key words: 8-direction asymmetry fuzzy model; type-2 fuzzy sets; fuzzy direction interval value; location error; direction membership grade error

0　引言

由于地理信息固有的不确定性,人们在日常生活中表征空间方向的“东”“南”“西”“北”等方向概念的模糊性,要求空方向关系表达和推理也是模糊的。文献[1,2]总结比较了目前用于描述空间方向关系的各种模型,包括锥形模型、最小外切矩形模型、2D-String 等投影模型、Freksa-Zimmermann 模型、方向关系矩阵模型和方向 Voronio 图模型。文献[3]基于锥形的方法,利用梯形隶属函数建立空间方向关系的模糊表达。杜世宏等人[4,5]对方向关系矩阵模型中原子方向分界线进行模糊化来对空间进行模糊划分,对于同一区域,建立细节方向关系描述模型。文献[6]利用目标对象与方向关系矩阵模型中原子方向分界线的拓扑关系,对方向关系矩阵模型进一步细化。文献[7]利用目标对象在原子方向区域的面积比进行模糊化。文献[8]用等宽度带划分空间的方法讨论了多尺度下的空间方向问题。

根据文献[1,9]和笔者的研究认为,目前在空间方向关系描述中存在以下问题:

a)目前常用的模型如锥形模型、MBR 模型均是对空间的硬性划分;一些文献采用的以一定宽度的区间作为主方向的过渡带或者作为模糊区间,而这一做法带有主观性。

b)对于原子方向内部目标实体的方向隶属程度不能很好地表达。

收稿日期：2009-06-15; **修回日期**：2009-08-06　**基金项目**：中国博士后科学基金资助项目(20080430586);国家科技支撑计划资助项目(2008BAK50B01)

作者简介:郭继发(1981-),男,湖南宜章人,博士研究生,主要研究方向为时空数据库及其不确定性(guojfx2004@163.com);王瑞芳(1981-),女,讲师,硕士,主要研究方向为空间数据不确定性;彭光雄(1978-),博士后,主要研究方向为空间分析.

c)没有为各原子方向建立一套有效的模糊隶属函数。由于空间数据位置误差，由此建立的原子方向隶属度也应有误差，但是目前的研究没有对模糊方向隶属度的不确定性进行讨论。

d)地理实体的方向关系的表达与自然语言描述不符。

空间方向关系框架模型需要考虑参考对象、目标对象、观测者的位置、框架模型对空间的划分，还需要研究各方向片之间的关系。笔者首先利用模糊理论建立了参考点无误差的八方向模糊不均匀划分模型。由于空间数据固有的不确定性，利用二型模糊集能够顾及隶属度误差的优势，建立了考虑模糊方向隶属度误差的八方向模糊不均匀划分模型，详细讨论了主隶属函数的建立方法，并对模糊方向隶属度的不确定性进行了评定，笔者认为利用二型模糊理论分析空间对象间的方向关系更合理。

1 八方向不均匀模糊划分模型

1.1 四方向模糊划分

空间四方向模糊划分指过参考点的左斜线、右斜线，将空间分为东、南、西、北四块区域，如图 1(a)所示。各方向的隶属函数如图 1(b)所示，其中方向北的隶属函数可以用式(1)表示。类似地通过四方向的隶属函数可解得东、南、西、北四方向的模糊划分角度分别为$\frac{\pi}{4}$、$\frac{3}{4}\pi$、$\frac{5}{4}\pi$、$\frac{7}{4}\pi$，分界处的隶属度均为 0.5。任意方位角在$[0,\frac{\pi}{4}]$、$[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]$、$[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]$、$[\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$、$[\frac{7}{4}\pi,2\pi]$的隶属度可通过方向隶属函数求得，主要属于某方向由式(2)确定。

$$\mu_N(\theta)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}(\theta-\frac{\pi}{2}) & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi\\ \frac{2}{\pi}(\theta-\frac{3}{2}\pi) & \frac{3}{2}\pi<\theta\leqslant2\pi\end{cases}\tag{1}$$

$$\mu_\theta=\max(\mu_A(\theta),\mu_B(\theta))\tag{2}$$

式(2)中，$A,B\in\{N,E,S,W\}$，$A\neq B$。

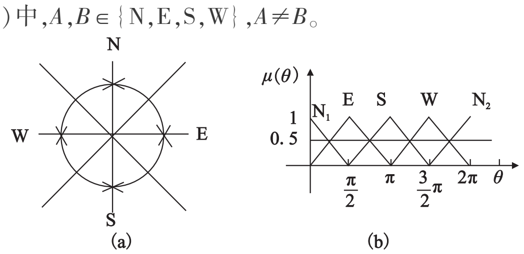

图1 空间4元方向模糊划分

1.2 八方向不均匀模糊划分模型

空间八方向模糊划分可以认为是四方向模糊划分的细化，也可以认为是突出图 1(a)中隶属度为 0.5 附近的角度区间。取 $\mu_{NE}(\theta)=2\times\wedge(\mu_N,\mu_E)$，$\mu_{SE}(\theta)=2\times\wedge(\mu_S,\mu_E)$，$\mu_{SW}(\theta)=2\times\wedge(\mu_S,\mu_W)$，$\mu_{NW}(\theta)=2\times\wedge(\mu_N,\mu_W)$，得到 NE、SE、SW、NW 四个方向的隶属函数，其中东北方向的隶属函数可用式(3)描述。

$$\mu_{NE}(\theta)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}\theta & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\\ -\frac{4}{\pi}(\theta-\frac{\pi}{2}) & \frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}<\theta\leqslant2\pi\end{cases}\tag{3}$$

通过联立北和东北方向隶属函数，可求得北和东北方向的模糊划分，类似地可求八元方向的模糊划分，如表 1 所示。在各分界点的隶属度均为 0.67，八方向对空间的划分如图 2 所示。

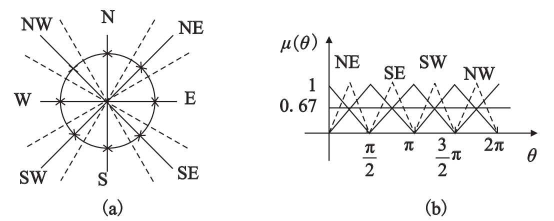

图2 空间八元方向模糊划分

表 1 八方向模糊区间划分

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
区间	[0,π/6]、[(11/6)π,2π]	[π/6, π/3]	[π/3, (2/3)π]	[(2/3)π, (5/6)π]	[(5/6)π, (7/6)π]	[(7/6)π, (4/3)π]	[(4/3)π, (5/3)π]	[(5/3)π, (11/6)π]
夹角	60°	30°	60°	30°	60°	30°	60°	30°

要确定某方位角属于某方向，首先用各原子方向的隶属函数求得任意方位角在八区间的隶属度，然后利用式(4)确定属于某方向。

$$\mu_\theta=\max(\mu_A(\theta),\mu_B(\theta),\mu_C(\theta))\tag{4}$$

式(4)中，$A,B,C\in\{N,NE,E,SE,S,SW,W,NW\}$，$A\neq B\neq C$，$\mu_\theta\in[0.67\quad1]$。

这种划分是基于隶属度的模糊划分，各原子方向所占的角度不一样。其中 N、E、S、W 各占 60°，而 NE、SE、SW、NW 各占 30°。所以该模型不是空间方向的硬性划分，突出了东、南、西、北四方向的主要地位，符合人们的习惯。

1.3 以点为参考的模糊方向关系细节描述

点与点的方向关系较容易。对于点与线和面的方向关系，文献[8]用方向关系矩阵来描述方向关系，显然，当两个目标有相同的面积，在某原子方向上也有相同的面积时，两个目标的方向将不能很好地区分。而在日常生活中，人们通常以“北偏东”的语句来描述近似方向关系。由上文可知，当直线位于方向轴线上时隶属度为 1；当直线不在方向轴线上时，点线方向关系的隶属度是一个区间。

定义 1 在点线方向关系中，除了直线在 N、NE、E、SE、S、SW、W、NW 各方向轴上，在其他区域均为一个模糊区间，这个区间为模糊方向区间。模糊方向区间表示为

$$[a*\quad b*],0.67\leqslant a\leqslant1,0.67\leqslant b\leqslant1,*\in\{+\quad-\}$$

其中：“+”“-”表示方向轴的顺时针方向和逆时针方向。

以参考点为中心作一参考圆，参考圆的半径视地图尺度而定。直线在参考圆上的投影构成了直线方向范围，如图 3(a)所示。通过参考圆求得直线在参考圆上投影的起止角 θ_1 和 θ_2，通过八原子方向的隶属函数确定起止角在各方向的隶属度，然后利用式(4)确定直线各部分所处的方向，如图 3(b)所示。

通过模糊方向区间数，不同的地理实体在原子方向内的方向关系可以很好地区分。点面方向关系的确定与点线方向关系确定方法类似。

2 扩展的八方向模糊不均匀划分模型

由于参考点不可避免地存在点位误差，那么在参考点的各方向均存在一定的偏差。在 GIS 的矢量数据中，二维随机点的位置不确定性常用误差椭圆来度量，参考点在任意方向 θ 上的位置偏差可用误差椭圆在 θ 方向上两条切线之间的范围表示，

如图 4(a)所示。为了求得方向偏差,两条方向切线与参考圆相交,得到一段圆弧,该圆弧对应的夹角即为方向偏差,图 4(a)中的 θ_N、θ_{NE}、θ_E 就是参考点在 N、NE、E 三个方向上的方向偏差。

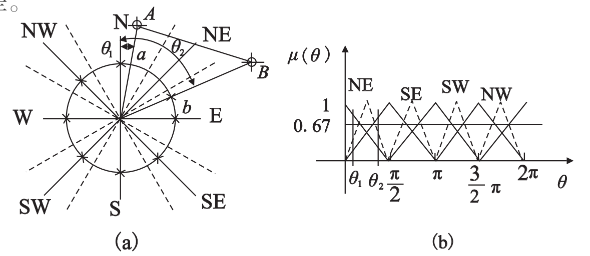

图3　点线模糊方向关系

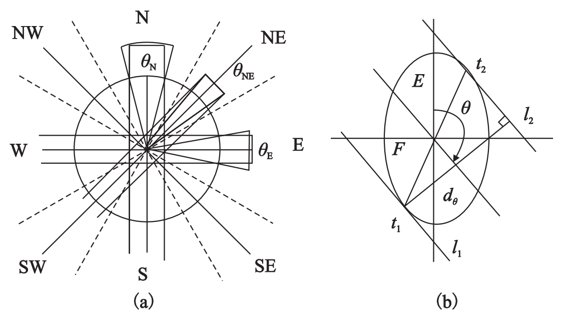

图4　参考点的方向误差

2.1　任意方向角偏差的计算

以(x_0,y_0)为圆心、椭圆倾斜角的负值$(-\theta_0)$旋转误差椭圆,得到标准误差,如图 4(b)所示。相应的任意方向角为 $\theta' = \theta - \theta_0$,该方向上切线斜率为 $K=\tan(\theta')$。该点对应的误差椭圆方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{E^2} + \frac{(y-y_0)^2}{F^2} = 1 \tag{5}$$

该误差椭圆上任意点的斜率为

$$K = \frac{F^2}{E^2} \times \frac{x-x_0}{y-y_0} \tag{6}$$

取 $K=K'$,联立方程式(5)和(6),即可求得椭圆上两个与圆曲线斜率相等的点:

$$x = \pm \frac{E^2K'}{\sqrt{(EK')^2+F^2}} + x_0 \tag{7}$$

$$y = \pm \frac{F^2}{\sqrt{(EK')^2+F^2}} + y_0 \tag{8}$$

求得两点 t_1、t_2,由 K' 和 t_1、t_2 得到一组平行线 l_1、l_2:

$$\begin{cases} l_1: y = K' \times (x - x_{t_1}) + y_{t_1} \\ l_2: y = K' \times (x - x_{t_2}) + y_{t_2} \end{cases} \tag{9}$$

两平行线的距离为 $d_\theta = \dfrac{\left|K' \times (x_{t_2}-x_{t_1}) + y_{t_2} - y_{t_1}\right|}{\sqrt{1+(K')^2}}$。将点 t_1、t_2 投影到单位圆,可以得到圆弧$\overline{t_1t_2}$,因为弧$\overline{t_1t_2}$很短,可用 d_θ 代替弧$\overline{t_1t_2}$的长度;因为圆为单位圆,那么$\overline{t_1t_2}$的弧长可表示为$\overline{t_1t_2}$的圆心角。d_θ 即是参考点在任意方向 θ 上的方向偏差 τ_θ。

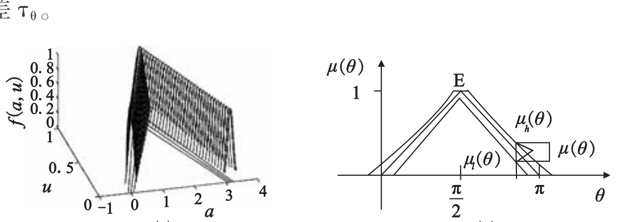

图5　东方向二型模糊集

2.2　方向隶属函数的不确定性分析

参考点的点位误差在任意方向轴上均服从正态分布,且方差为 $d_\theta/2$。投影到参考圆上后得到的方向偏差也服从正态分布,且方差为 $\tau_\theta/2$。图 5(a)为模糊方向东的隶属度概率分布。那么对于任意方位角 θ,在$[\theta-\tau_\theta/2, \theta+\tau_\theta/2]$,均有相同的隶属度 μ_θ。在图 5(a)中将该区间投影到水平面上,即可得到如图 5(b)所示的图形。

从图 5(b)可以看出,任意方位角对模糊方向东的隶属度 $\mu(\theta)$不是惟一值,而是一个隶属区间$[\mu_l(\theta), \mu_h(\theta)]$,说明隶属度存在误差。

经典模糊数学不能处理这种隶属度带有误差的模糊集。针对这一缺陷,美国控制论专家 L. A. Zadeh 针对数据的不确定性,于 1976 年再次提出了模糊二型理论,经过数十年的研究,二型模糊理论已成功应用于生物、通信、金融和自动控制等领域。文献[10]给出了二型模糊集的定义和主隶属度不确定性的度量方法。二型模糊集可分为二型一般模糊集合和二型区间模糊集。其中二型一般模糊集是指二型模糊集中次隶属成员函数为一般函数的模糊集;当次隶属函数是一型区间模糊集时成为二型区间模糊集[11]。在图 5(a)中以垂直 x 轴作一竖直面与曲面相交,其交线是一任意曲线,该曲线即为二型模糊集的次隶属函数,显然,该方向模糊集是二型一般模糊集;图 5(b)中多边形所围的区域即为该二型模糊集的主隶属函数的不确定性区域。

1)确定不确定多边形的上边界和下边界

多边形的上边界通过式(10)和(11)确定。多边形的下边界通过式(12)和(13)确定。当$\frac{\pi}{2} - \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2}$时,隶属度为 1,称为左、右肩;当$-\frac{d_0}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{d_0}{2}$,$\pi - \frac{d_\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi + \frac{d_\pi}{2}$时,隶属度为 0,称为左、右底。

$$\mu_{LT}(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(\theta + \frac{d_\theta}{2}\right), -\frac{d_0}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2} \tag{10}$$

$$\mu_{RT}(\theta) = -\frac{2}{\pi}\left(\theta - \pi - \frac{d_\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2} + \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi + \frac{d_\pi}{2} \tag{11}$$

$$\mu_{LB}(\theta) = \frac{2}{\pi}\left(\theta - \frac{d_\theta}{2}\right), \frac{d_0}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2} \tag{12}$$

$$\mu_{RB}(\theta) = -\frac{2}{\pi}\left(\theta - \pi + \frac{d_\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2} - \frac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{d_\pi}{2} \tag{13}$$

2)隶属函数的简化

从上面分析可以看出,任意方位角的次隶属函数是一复杂曲线,难以用数学公式表示,在实际应用中,须对其简化。目前对一般二型模糊集的求解是其研究的一个难点,尚未有一种公认的合理方法。对于一般二型模糊集的简化通常有两种方法[12]:a)将一般二型模糊集简化为二型区间模糊集,然后对主隶属函数离散化;b)将一般二型模糊集离散化,包括对主隶属函数和次隶属函数的离散化。在此关心的是方向隶属度的误差,因此,可以采用第一种方法。

3)方位隶属度的不确定性的度量

显然,对于任意角 θ 属于北的隶属度的不确定性,可用上边界与下边界的差值来度量,可用式(14)计算。

将该方法扩展到 N、NE、E、SE、S、SW、W、NW 八个模糊方向,确定各模糊方向隶属度的上边界、下边界、左右肩和左右底,各方向的模糊隶属度分布如图 6 所示。图中粗线即为隶属度上界,细线即为隶属度下界,通过两条曲线可确定参考点在任意方向上的方向隶属度误差。

$$U=\begin{cases}\mu_{LT}(\theta) & -\dfrac{d_0}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{d_0}{2}\\ \mu_{LT}(\theta)-\mu_{LB}(\theta) & \dfrac{d_0}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2}\\ 1-\mu_{LB}(\theta) & \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 1-\mu_{RB}(\theta) & \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2}\\ \mu_{RT}(\theta)-\mu_{RB}(\theta) & \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{d_{\frac{\pi}{2}}}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\dfrac{d_{\pi}}{2}\\ \mu_{RT}(\theta) & \pi-\dfrac{d_{\pi}}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi+\dfrac{d_{\pi}}{2}\end{cases}\tag{14}$$

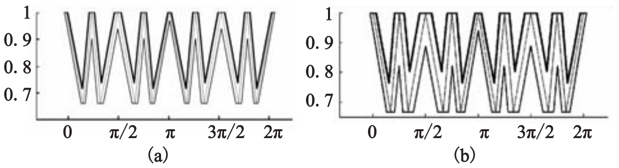

图6 方向隶属度误差对比

3 实例分析

在图 3 中，若不考虑参考点点位误差，那么直线 *AB* 在 N、NE、E 方向的隶属度如表 2 所示，在其他方向的隶属度为 0。

表 2 点线八方向关系模糊区间

	N	NE	E
区间	[0.17, π/6]	[π/6, π/3]	[π/3, 1.16]
隶属度	[0.89⁺, 0.67⁺]	[0.67⁻, 0.67⁺]	[0.67⁻, 0.74⁻]

现考虑参考点点位误差，参考圆半径为 20，当参考点协方差阵分别为 $D_1=\begin{bmatrix}2.91 & 1.25\\1.25 & 1.71\end{bmatrix}$ 和 $D_2=\begin{bmatrix}10.91 & 3.25\\3.25 & 4.71\end{bmatrix}$ 时，直线和参考点的方向关系分别如图 6(a)(b)所示。

在图 6 中，虚线表示不考虑参考点点位误差时的隶属度分布，粗实线表示方向关系隶属度下界，细实线表示方向关系隶属度上界，由上界和下界围成的区域描述了参考点的方向隶属度误差分布。直线 *AB* 上五个点的方向隶属度及误差如表 3 所示。

表 3 直线的方向隶属度误差对比分析

参考点误差	角度	0.17	0.52	0.79	1.05	1.16
	隶属方向	N	分界点	NE	分界点	E
$\begin{bmatrix}2.91 & 1.25\\1.25 & 1.71\end{bmatrix}$	隶属度下界	0.8440	0.6668	0.9323	0.6668	0.7074
	隶属度上界	0.9439	0.7419	1.0000	0.7279	0.7709
	隶属度误差	0.0999	0.0751	0.0677	0.0610	0.0634
$\begin{bmatrix}10.91 & 3.25\\3.25 & 4.71\end{bmatrix}$	隶属度下界	0.7995	0.6668	0.8526	0.6668	0.6797
	隶属度上界	0.9968	0.8169	1.0000	0.7896	0.7970
	隶属度误差	0.1972	0.1501	0.1471	0.1228	0.1173

当参考点协方差从 D_1 增加到 D_2 时，隶属于 N 方向的端点 *A* 的隶属度误差从 0.099 9 增大到 0.197 2，增量为 0.097 3；隶属于 NE 方向上内点的隶属度误差从 0.067 7 增大到 0.147 4，增量为 0.079 7；隶属于 E 方向的端点 *B* 的隶属度误差从 0.063 4增大到 0.117 3，增量为 0.053 9。

从上面的分析可以看出，当考虑参考点点位误差时，次方向的隶属度误差比主方向的隶属度误差大，说明作为主方向过渡方向的次方向有比主方向更大的模糊性，这一分析结果与基于模糊熵的分析结果是一致的；同时可看出，当参考点误差增大时方向隶属度误差增大，但是次方向隶属度误差增大更明显，特别地，当参考点误差为 0 时，方向隶属度误差为 0，此时为八方向模糊不均匀划分模型。

4 结束语

方向关系是重要的模糊空间关系。本文首先建立了八方向模糊划分模型，通过定义模糊方向区间来详细表达目标地物与参考点之间的方向关系。由于空间数据固有的不确定性，由此确立的空间目标间的方向关系也具有不确定性[13]，在进行空间关系模糊描述和推理时需要考虑参考点和目标点的不确定性。利用模糊二型理论建立了考虑参考点点位误差的八方向模糊划分模型，并对方向隶属度的不确定性进行了估计。与其他模型相比，该模型具有如下特点：

a)基于隶属度的八元模糊方向划分不是等角划分，其中 N、E、S、W 四个主要方向各占 60°，而 NE、SE、SW、NW 次要方向各占 30°，因此避免了其他模型中硬性划分的缺陷，符合人们的习惯。

b)通过参考点的点位误差可以求解模糊方向隶属度的误差，构建了考虑参考点点位误差的八方向模糊划分模型。

c)由于参考点点位误差引起方向隶属度误差，增加了方向关系的不确定性，但这种增加的不确定性客观存在，说明模糊方向的二型模糊集描述模型能客观地描述模糊方向关系。

利用模糊数学给模糊对象建模时通常带有一定的主观性。模糊二型理论能够描述主隶属度的不确定性，增强了模型的客观性。笔者认为利用模糊二型理论来进行模糊对象和方向关系的表示更符合实际情况。本文提出的扩展八方向模糊不均匀划分模型为研究空间方向关系提供了一种新的思路，该模型较好地顾及了人们方向概念的模糊性、参考点点位误差，符合人们的认知习惯。

参考文献：

[1] 杜世宏，王桥，秦其明. 空间关系模糊描述与组合推理[M]. 北京：科学出版社，2007.

[2] 郭庆胜，杜晓初，闫卫阳. 地理空间推理[M]. 北京：科学出版社，2006.

[3] PAPADIAS D, KARACAPILIDIS N, ARKOUMANIS D. Processing fuzzy spatial queries: a conjuration similarity approach [J]. International Journal of Geographical Information Science, 1999, 13(2): 93-118.

[4] 杜世宏，王桥，杨一鹏. 一种定性细节方向关系的表达模型[J]. 中国图象图形学报，2004, 9(12): 1497-1503.

[5] 杜世宏，王桥，杨一鹏，等. 空间方向关系模糊描述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2005, 17(8): 1745-1751.

[6] 曹菡，陈军，杜道生. 空间目标方向关系的定性扩展描述[J]. 测绘学报，2001, 30(2): 162-167.

[7] GOYAL R. Similarity assessment for cardinal directions between extended spatial objects[D]. Maine: University of Maine, 2000.

[8] 蔡剑红，李德仁. 多尺度下的不确定性空间方向锥形模型研究[J]. 武汉大学学报：信息科学版，2007, 32(8): 735-739.

[9] 杜世宏，王桥. 不确定性空间关系[J]. 中国图象图形学报，2004, 9(5): 539-546.

[10] MENDEL J M, JOHN R I. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2002, 10(2): 117-127.

[11] 陈薇，孙增圻. 二型模糊系统研究与应用[J]. 模糊系统与数学，2005, 19(1): 126-135.

[12] COUPLAND S, JOHN R. A fast geometric method for defuzzification of type-2 fuzzy sets [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2008, 16(4): 929-941.

[13] 史文中. 空间数据与空间分析不确定性原理[M]. 北京：科学出版社，2005.