

一种基于灰色关联分析和超效率 DEA 的 MCDM 模型

李 凌¹, 刘建永¹, 付成群¹, 伍中军^{1,2}

(1. 解放军理工大学 工程兵工程学院, 南京 210007; 2. 防化指挥工程学院, 北京 102205)

摘要: 针对多属性决策问题(MCDM)权重难以客观确定的缺陷,提出一种基于灰色关联分析和超效率数据包络分析(DEA)的混合算法研究 MCDM。对 MCDM 进行建模,利用灰色关联分析计算各属性的点关联度,为了得到各属性的相对最优灰关联度并将其充分排序,利用超效率 DEA 改进灰色关联分析模型。该混合算法能够更加客观地确定权重向量,并且突破权重和为 1 的限制,使得均一的权重更加灵活;同时,可以得到各属性的相对最优灰色关联度,超效率 DEA 能够增强模型对灰关联度的分辨能力。通过北京市商品房空置影响因素的实例分析验证了该混合算法的有效性。

关键词: 灰色关联分析; 超效率数据包络分析; 权重; 多属性决策; 空置商品房

中图分类号: TP39 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2010)02-0526-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.02.034

MCDM model based on gray correlation analysis and super-efficiency DEA

LI Ling¹, LIU Jian-yong¹, FU Cheng-qun¹, WU Zhong-jun^{1,2}

(1. Engineering Institute of Engineering Corps, PLA University of Science & Technology, Nanjing 210007, China; 2. Command & Engineering Institute of Chemical Defense, Beijing 102205, China)

Abstract: In view of the defect that the weights of multiple criteria decision making (MCDM) are hard to determine objectively, this paper proposed a hybrid model combined gray correlation analysis with super-efficiency DEA (data envelopment analysis). On the basis of gray correlation analysis, it calculated the point correlation degree of each criterion. In order to obtain relative optimal gray correlation degree of each criterion and rank them completely, suggested the super-efficiency DEA method. The hybrid model could ascertain the weight vector more objectively. It broke through the constraint that the sum of each weight vector was equal to 1, thus the homogeneous weight could be more flexible. The improved model could lead to relative optimal gray correlation degree of each criterion. Super-efficiency DEA could enhance the discernment ability as well. It studied the influence factors of vacant commercial housing in Beijing city. The results show that the correlation order of influence factors. The numerical example illustrates the availability and efficiency of the hybrid model.

Key words: gray correlation analysis; super-efficiency DEA; weight; MCDM; vacant commercial housing

0 引言

MCDM 广泛应用于生产计划制定、生产效率分析、影响因素决策等多种问题。在 MCDM 问题中,决策者通过分析比较不同性质的属性对相似决策单元进行评估及排序^[1,2]。灰色关联分析方法是一种典型的属性辨识和解析工具,它根据分析对象的取值频率与常见分布取值频率的相似程度来判断评价对象的分布规律。它具有所要求的试验数据少、易于流程化、计算过程简单等特点^[3,4]。然而,传统的灰色关联分析方法在解决 MCDM 时常常出现属性权重难以客观确定的问题,而且权重系数一旦被确定则用于所有决策单元的灰关联度计算,这种均一性的权重往往不能得到最优结果。

DEA 是一种评价决策制定单元(DMU)相对有效性的非参

数方法,是一种常用且重要的分析工具和研究手段^[5,6]。它能够与灰色关联分析很好地结合,通过求解各 DMU 和数据有效前沿面的相对距离确定各灰关联属性的相对最优权重系数及关联度。然而,传统的 CCR (charnes, cooper and rhodes) 模型得到的相对最优关联度可能存在同时有效的情况,即效率值都为 1。在这种情况下,对 DMU 的比较不能将其充分排序,本文利用一种改进的 DEA 模型,即超效率 DEA 模型解决这一问题^[7-9]。与一般的 DEA 模型不同,超效率 DEA 将评价单元的参考集去除被评价单元本身,将评价单元与其他所有评价单元的线性组合作比较,其得到的超效率值能够将相对最优灰关联度进行充分排序,具有更好的分辨能力。本文还通过北京市商品房空置影响因素的实例分析验证了该混合算法的有效性。

收稿日期: 2009-06-17; 修回日期: 2009-07-20

作者简介: 李凌(1982-),男,江苏南京人,博士研究生,主要研究方向为系统工程、决策分析(08liling@sohu.com);刘建永(1961-),男,江苏南京人,教授,博士,主要研究方向为系统工程、决策分析等;付成群(1975-),男,河南新乡人,讲师,博士后,主要研究方向为指挥自动化、运筹与优化;伍中军(1977-),男,湖南祁阳人,博士研究生,主要研究方向为系统工程、决策分析。

1 基于灰色关联分析的 MCDM 模型

1.1 MCDM 问题

对于 MCDM 问题,通过分析比较不同属性对决策单元进行评估研究,其数学模型表示如下:

$$D = \begin{matrix} & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \hat{u} & \hat{u} & \hat{u} & \hat{u} \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n] \quad (2)$$

$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n] \quad (3)$$

其中: A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个观察点; C_1, C_2, \dots, C_m 为 m 个属性; x_{ij} 为第 i 个属性、第 j 个观察点的值; ω 为权重向量, ω_k 为第 k 个观察点的权重。

1.2 基于灰色关联分析的 MCDM 建模

由上述定义,将数据进行如下处理:

$$x_1^{(0)}(k) = x_{1k}/x_{11}; k = 1, 2, \dots, n$$

$$x_2^{(0)}(k) = x_{2k}/x_{21}; k = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{u} \\ x_m^{(0)}(k) = x_{mk}/x_{m1}; k = 1, 2, \dots, n$$

其中: \hat{u} 为第 i 个属性的 n 个观察点的平均值,得到 m 个新的序列

$$X_1 = \{x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n)\}$$

$$X_2 = \{x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \dots, x_2^{(0)}(n)\}$$

$$\hat{u} \\ X_m = \{x_m^{(0)}(1), x_m^{(0)}(2), \dots, x_m^{(0)}(n)\}$$

上述均值化过程能够消除不同属性量纲的影响,同样对母属性进行均值化得到:

$$X_0 = \{x_0^{(0)}(1), x_0^{(0)}(2), \dots, x_0^{(0)}(n)\}$$

其中: $x_0^{(0)}(k) = y_k/Y(k = 1, 2, \dots, n)$, Y 为母属性的 n 个观察点的平均值。

令 $M = \{1, 2, \dots, m\}, N = \{1, 2, \dots, n\}$, 得到

$$\Delta_1 = \min_{i \in M} \{ \min_{k \in N} |x_0^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)| \}$$

$$\Delta_2 = \max_{i \in M} \{ \max_{k \in N} |x_0^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)| \}$$

$$\Delta_3 = |x_0^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)|$$

$$d_{0i}(k) = \frac{\Delta_1 + \lambda \Delta_2}{\Delta_3 + \lambda \Delta_2}; k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

其中: $d_{0i}(k)$ 为 X_i 和 X_0 在第 k 个观察点的相对距离,称其为 X_i 和 X_0 在第 k 个观察点的关联度; λ 为分辨系数,通常取 $0 \leq \lambda \leq 1$,一般取 $\lambda = 0.5$ 。由权重 $\omega_k \geq 0, k \in N$, 令 $r_{0i} = \sum_{k=1}^n \omega_k d_{0i}(k)$, $i \in M$, r_{0i} 即为 X_i 和 X_0 的关联度,它反映了第 i 个属性和母属性之间的关联程度,通过比较 r_{0i} 可以对各子属性与母属性之间的关联程度进行排序,为决策者提供所需信息。

为了计算 r_{0i} ,需要确定灰关联度权重向量 ω_k 。在确定权重向量时主要存在以下问题:

a) 通常的方法是采用专家打分、经验取值及 AHP 方法,然而这些方法人为因素较大,得到的结果往往过于“主观性”。

b) 一旦权重系数被确定,则将其用于每个属性的关联度计算,这种均一性的方法使得权重系数对某些属性有利,而对其他属性不利,因此所得关联度缺乏公正性。

c) 传统的方法要求权重和为 1,这一方法是基于统一权重

的思想,各属性的关联度不一定最优。

利用 DEA 方法,将其与灰色关联分析结合,可以解决以上问题。

2 基于超效率 DEA 的灰关联分析模型

2.1 超效率 DEA

传统的 CCR 模型中,当多个 DMU 为有效时,则会出现这些 DMU 之间无法比较的问题。超效率 DEA 模型的参考集不包括被评价的伪装方案 DMU_0 本身,将评价单元与其他所有评价单元的线性组合作比较。将某个 DMU 能增加其投入而保持相对有效性的最大比例值称为超效率值,该值显然可能大于 1。在 CCR 模型中结果为有效的 DMU,通过比较超效率化得到的超效率值可解决 DMU 充分比较的问题。

设有 n 个 DMU,输入指标数为 m ,输出指标数为 s 。 $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$ 为输入数据集, $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^T$ 为输出数据集,其中 $j = 1, 2, \dots, n$ 。评价单元第 j_0 (下标为 0,下同) 决策单元 DMU_0 的超效率 DEA 模型(相对于 DEA(CCR)模型而言):

$$\begin{aligned} \max \quad & h_0 = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m \omega_i x_{i0} = 1 \\ & \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \geq 0 \\ & j = 1, 2, \dots, n (j \neq 0) \\ & \omega_i, \mu_r \geq 0, \forall i, r \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 超效率 DEA 改进灰色关联分析

为计算 r_{0i} ,利用上述超效率 DEA 模型对灰色关联分析进行改进。构造输入值均为 1 的 m 维输入向量,将 MCDM 中的每一个属性看做一个 DMU,其相应输出值为该点的点关联度值。输入/输出结构如图 1 所示。

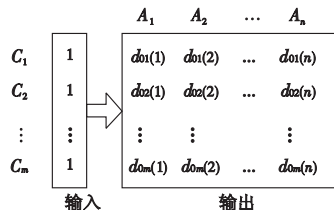


图1 基于超效率DEA灰色关联分析模型输入/输出结构

基于超效率 DEA 模型改进灰色关联分析,得到以下混合模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & r_{0i} = \sum_{k=1}^n \omega_k d_{0i_0}(k) \\ \text{s. t.} \quad & \omega_0 \times 1 = 1 \\ & \omega_0 \times 1 - \sum_{k=1}^n \omega_k d_{0i}(k) \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m (i \neq i_0) \\ & \omega_k, \omega_0 \geq 0, \forall k \end{aligned} \quad (6)$$

其中: ω_0 为输入值权重, $\omega_k(k = 1, 2, \dots, n)$ 为输出值权重,即为灰色关联度中各属性点的权重,每一属性分别对应 n 个权重值。式(6)可以简化为以下模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & r_{0i} = \sum_{k=1}^n \omega_k d_{0i_0}(k) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{k=1}^n \omega_k d_{0i}(k) \leq 1 \\ & i = 1, 2, \dots, m (i \neq i_0) \\ & \omega_k \geq 0, \forall k \end{aligned} \quad (7)$$

求解式(7)得到最优解为 ω_k^* 及 r_{0i}^* ,分别为第 i_0 个属性的权重和相对最优灰色关联度。在传统的灰色关联分析中,要求权重和为 1,当权重被确定后,用于每一属性的关联度计算,这

样导致了无法得到每一属性的相对最优关联度。式(7)克服了以上缺点,对于每一属性,模型给出相应的权重向量及相对最优灰色关联度,结果更加客观、合理。对 m 个属性计算 m 次式(7),对得到的 r_{0i}^* 值进行排序,可以得到该 m 个属性与母属性的关联度排序,即 r_{0i}^* 值越大则子属性与母属性越相关。

通过对 MCDM 问题进行数学描述,提出利用灰色关联分析方法对其进行建模,进而利用超效率 DEA 方法对灰关联模型进行改进优化。这样两阶段建模改进 MCDM 得到的混合模型不但发挥了灰色系统所需数据少、计算简单的优点,还利用超效率 DEA 克服了权重的弊端。同时,混合模型在最优关联度及其分辨与排序上更具优势,是一种较好的解决 MCDM 问题的方法。

3 实例分析

商品房空置面积的影响因素是复杂的,它受经济、社会、人口、环境、政策等因素的影响,其主要影响因素如图 2 所示。

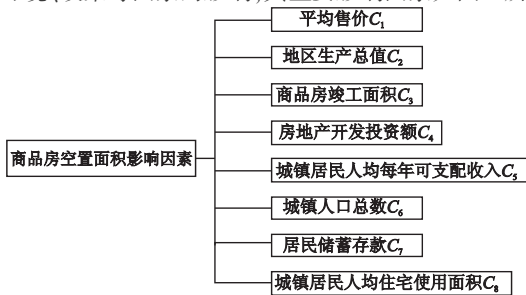


图2 商品房空置面积影响因素

根据北京市 2007 年国民经济和社会发展统计公报及北京市统计年鉴,2000—2007 年北京市空置商品房影响因素如表 1 所示。属性 $C_1 \sim C_8$ 为影响因素子属性,最后一行为商品房空置面积数据,作为灰色关联分析的母属性。

表 1 2000—2007 年北京市商品房空置面积及影响因素

影响因素	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
C_1 /元/平方米	4919.0	5062.0	4764.0	4737.0	5052.9	6274.0	8280.0	12436.0
C_2 /亿元	3161.0	3710.5	4330.4	5023.8	6060.3	6886.3	7870.3	9006.2
C_3 /万平方米	1365.6	1707.4	2384.4	2593.7	3067.0	3770.9	3193.9	2891.7
C_4 /亿元	522.1	783.8	989.4	1202.5	1473.3	1525.0	1719.9	1995.8
C_5 /元	10349.7	11577.8	12463.9	13882.6	15637.8	17653.0	19978.0	21989.0
C_6 /万人	1058	1080	1118	1151	1187	1286	1333.3	1379.9
C_7 /亿元	2923.2	3536.3	4389.7	5293.5	6122.3	8315.8	9515.0	9155.3
C_8 /平方米/人	16.75	17.62	18.20	18.67	19.09	19.45	20.06	20.30
商品房空置面积 /万平方米	627.4	774.0	919.0	1123.4	1044.1	1374.2	1039.7	1136.2

对表 1 数据进行灰色关联分析,得到各属性的点关联度,分别利用传统灰关联分析方法、CCR 模型和本文提出的混合模型进行权重的优化和关联度计算,结果及对比如表 2 所示。对于灰关联分析,基于传统权重确定方法,八个影响因素的排序为

$$C_2 > C_5 > C_3 > C_7 > C_1 > C_6 > C_8 > C_4$$

其中:“>”表示优于,即子属性与母属性的关联程度更接近。可以看出,商品房平均售价 C_1 的关联度过小,不符合市场实际情况。对于 CCR 模型, C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_5 及 C_7 的关联度均为 1,因此无法将其充分排序。利用超效率 DEA 模型对其进行优化,可以将其区分开来,该八个影响因素的排序为

$$C_2 > C_1 > C_5 > C_3 > C_7 > C_6 > C_4 > C_8$$

可知,地区生产总值、商品房售价及城镇居民人均每年可支配收入为影响商品房空置面积最主要的因素,城镇人口总数、房地产开发投资额及城镇居民人均住宅使用面积对商品房

空置面积的影响较小。

表 2 超效率 DEA 改进灰色关联分析及比较

影响因素	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	灰色 关联度	基于 CCR 的灰 关联度	基于超 效率 DEA 的灰关联度
C_1	1	0.831	0.670	0.549	0.612	0.524	0.975	0.584	0.718	1	1.241
C_2	1	0.944	0.914	0.833	0.799	0.988	0.547	0.492	0.815	1	1.464
C_3	1	0.984	0.781	0.902	0.634	0.638	0.596	0.766	0.788	1	1.158
C_4	1	0.790	0.700	0.662	0.465	0.579	0.381	0.333	0.614	0.812	0.812
C_5	1	0.897	0.794	0.691	0.868	0.675	0.786	0.762	0.809	1	1.236
C_6	1	0.825	0.711	0.589	0.650	0.508	0.717	0.665	0.708	0.916	0.916
C_7	1	0.977	0.965	0.980	0.700	0.606	0.386	0.432	0.756	1	1.133
C_8	1	0.847	0.727	0.598	0.667	0.494	0.686	0.627	0.705	0.462	0.462

4 结束语

本文研究了 MCDM 问题,利用灰色关联分析求解各属性的点关联度,并用超效率 DEA 模型对灰色关联分析算法进行改进,优化了权重向量及灰色关联度,得到的混合模型具有以下优点:

- a) 它克服了 MCDM 权重向量难以客观确定的问题,利用 DEA 这一非参数估计方法改进模型使得权重更加客观。
- b) 传统算法中不同观察点的所有属性对应同一权重,且同一属性在各观察点的权重和为 1,文中混合算法所得权重突破了权重和为 1 的限制且更加灵活,能够得到各属性的相对最优灰色关联度。

c) 超效率 DEA 能够提高传统 DEA 模型的分辨能力,将同为 DEA 有效的关联度值进行充分排序区分。

进一步研究方向可以将灰色关联分析扩展到模糊数范围,对于观察点的关联度分析也可以考虑利用超效率 DEA 进行优化。

参考文献:

- [1] YUN Y B, NAKAYAMA H, ARAKAWA M. Multiple criteria decision making with generalized DEA and an aspiration level method [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 158(3):697-706.
- [2] MAVROTAS G, TRIFILLIS P. Multicriteria decision analysis with minimum information: combining DEA with MAVT [J]. *Computers & Operational Research*, 2006, 33(8):2083-2098.
- [3] LIU Gou-sheng, YU Jian-guo. Gray correlation analysis and prediction models of living refuse generation in Shanghai city [J]. *Waste Management*, 2007, 27(3):345-351.
- [4] GUAN Xin, HE You, YI Xiao. Gray track-to-track correlation algorithm for distributed multitarget tracking system [J]. *Signal Processing*, 2006, 86(11):3448-3455.
- [5] LIU Wen-bin, SHARP J, WU Zhong-min. Preference, production and performance in data envelopment analysis [J]. *Annals of Operation Research*, 2006, 145(1):105-127.
- [6] LIANG Liang, YANG Feng, COOK W D, et al. DEA models for supply chain efficiency evaluation [J]. *Annals of Operation Research*, 2006, 145(1):35-49.
- [7] LI Ling, LIU Jian-yong, FU Cheng-qun, et al. The camouflage evaluation model based on slack-based measure of super-efficiency DEA [C]//Proc of the 2nd International Symposium on Intelligent Information Technology Application. Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2008:181-185.
- [8] LIU Jian-yong, LI Ling, WU Zhong-jun, et al. The assessment model of service performance for the third party logistics based on imprecise super-efficiency DEA [C]//Proc of the 8th International Conference of Chinese Logistics and Transportation Professionals. Virginia: ASCE Press, 2008:3603-3608.
- [9] YAO Chen. Ranking efficient units in DEA [J]. *Omega*, 2004, 32(3):213-219.