系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(4) (2010, 4), 458–467

N 维多重非齐次调和方程及其边界积分方程*

谈 骏 渝
(重庆大学数理学院，重庆 400044)
张 林 华
(重庆师范大学数学与计算机学院，重庆 400047)
吴 永
(重庆理工大学数理学院，重庆 400050)

摘要 对 n 维多重非齐次调和方程 $\Delta^{(k)}u=f(x),x\in\boldsymbol{R}^n$, 给出了基本解的递推公式以及多重调和函数的积分关系式．在非齐次项 $f(x)$ 为 m 次调和的情形下将域上的积分转化为沿边界的积分，进而应用直接法给出了基本边界积分方程．对 $f(x)$ 为一般光滑函数的情形，给出了用泰勒多项式逼近时相应的误差估计并证明了含误差项的积分是收敛的．

关键词 多重调和方程，边界积分方程，基本解， k- 次调和函数，弱解．

MR(2000) 主题分类号 35A08, 45L10

1 引言和问题

大家知道对二维和三维的 Laplace 方程及重调和方程已有较好的研究，并有着广泛的应用．文 [1–4] 分别用区域分裂法和边界积分方程法讨论了 Laplace 方程和 Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题． Jeon Y[5−8] 和 Fuglede B[9] 对重调和方程给出了边界积分方程式．然而，对于多重非齐次调和方程，还很少被研究． Sobolev[10] 应用变分方法在空间 $W_2^{(m)}$ 中讨论了多重调和方程．文 [11–13] 还讨论了二维非齐次调和方程以及应用．

本文讨论 n 维多重非齐次方程

$$\Delta^{(k)}u=f(x),\quad x\in\Omega\subset\boldsymbol{R}^n, \tag{1}$$

其中 $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n);\Omega\in\boldsymbol{R}^n$ 是具有光滑的 $n-1$ 维流形边界 Γ 的有界单连通区域， $f(x)$ 是已知的足够光滑的函数．

* 国家自然科学基金 (50573095) 资助课题．
收稿日期：2008-04-11, 收到修改稿日期：2009-04-20.

首先，给出了方程 (1) 的基本解及其递推公式，然后利用基本解及 Green 公式给出了多重调和函数的基本积分关系式．在非齐次项为 m 次调和的情形下，将其域内积分转化边界积分，进而给出了方程 (1) 的基本边界积分方程．对非齐次项为一般光滑函数的情形，讨论了用 Taylor 多项式逼近时相应的误差估计并证明其是收敛的．

2　基本结果

命题　2.1 已知函数 $g(x,y)=Ar^l(\ln r+a)$, $r=|x-y|$, $x,y\in \boldsymbol{R}^n$, A,a 为常数， $l\geq 0$ 为正整数．若函数 F_m 满足方程

$$\Delta^{(m)}F_m=g(x,y),\quad x,y\in\Omega, \tag{2}$$

则有

$$F_i=A_ir^{l_i}(\ln r+a_i),\quad i=0,1,\cdots,m, \tag{3}$$

且

$$l_{i+1}=l_i+2,\quad A_{i+1}=\frac{A_i}{l_{i+1}^2},\quad a_{i+1}=a_i-\frac{2}{l_{i+1}},\quad i=0,1,\cdots,m-1. \tag{4}$$

当 $i=0$ 时，有 $F_0=g(x,y)$ 及 $A=A_0$, $a=a_0$, $l=l_0\geq 0$.

命题　2.2 已知函数 $F_0(x,y)=Ar^l, r=|x-y|\neq 0, x,y\in\boldsymbol{R}^n$, A,l 为非零常数．若函数 F_m 满足方程

$$\Delta^{(m)}F_m=F_0(x,y),\quad x,y\in\Omega,$$

则有

$$F_i=A_ir^{l_i},\quad i=0,1,\cdots,m, \tag{5}$$

且

$$l_{i+1}=l_i+2,\quad A_{i+1}=\frac{A_i}{l_{i+1}(l_{i+1}-2+n)},\quad i=0,1,\cdots,m-1. \tag{6}$$

当 $i=0$ 时，有 $A=A_0$, $l=l_0$.

命题　2.3 设 F_i 如式 (3) 及 (5) 所示，则

$$\Delta^{(m)}F_k=F_{k-m},\quad k\geq m,\ m,k\in\boldsymbol{N}. \tag{7}$$

当 F_i 如式 (3) 所示，由文 [11] 可得命题 2.1 和 2.3. 当 F_i 如式 (5) 所示，通过计算有 $\Delta F_k=F_{k-1}$ 和 $A_{k-1}=A_kl_k(n+l_k-2), l_{k-1}=l_k-2$, 即有 (6) 成立．进一步我们有 $\Delta^{(l)}F_k=F_{k-1}(l>1)$, 即可得到式 (7).

定义　2.4 称 $\Delta^{(k)}u=0$ 为 k 重 Laplace 方程或 k 重调和方程，相应地称函数 $u\in C^{2k}(\Omega)\cap C^{2k-1}(\overline{\Omega})$ 为 (n 维)k 次调和函数．若 $u_1=F_0$ 是 n 维 Laplace 方程的基本解，则称由式 (3) 或 (5) 确定的函数 $u_k=F_{k-1}(k\geq 1)$ 为 k 次调和方程或方程 (1) 的基本解，即有 $\Delta^{(k)}u_k=\Delta u_1=-\delta(x,y)$.

命题　2.5 对 n 维 k 次调和方程

$$\Delta_x^{(k)}u(x,y)=0,\quad x,y\in\Omega, \tag{8}$$

a) 当 $l_k = 2k - n = 2\sigma \geq 0$ 时有基本解

$$u_k = A_k r^{l_k}(\ln r + a_k), \tag{9}$$

且有

$$u_i = A_i r^{l_i}(\ln r + a_i), \quad i = k, k-1, \cdots, k-\sigma; \tag{10}$$

$$u_i = A_i r^{l_i}, \quad i = k-\sigma-1, k-\sigma-2, \cdots, 1, \tag{11}$$

式中当 $i = k, k-1, \cdots, k-\sigma$ 时，有式 (4) 成立；当 $i = k-\sigma-1, k-\sigma-2, \cdots, 1$ 时，有式 (6) 成立.

b) 当 $n > 2$ 且 $l_k = 2k - n = \sigma < 0$ 或 $l_k = 2k - n = \sigma > 0$ 且 $n > 2$ 为奇数时有基本解

$$u_k = A_k r^{l_k}, \tag{12}$$

且 $u_i = A_i r^{l_i}$，$i = k, k-1, \cdots, 1$, 并有 (6) 成立.

证 a) 由条件知 n 为偶数. 又由命题 2.1 知，只需证明有式 (11) 成立. 若 $n \neq 2$ 及 $2k - n \neq 0$, 由命题 2.1 有 $l_{k-\sigma} = l_k - 2\sigma = 0$ 及 $u_{k-\sigma} = A_{k-\sigma}(\ln r + a_{k-\sigma})$. 因此 $u_{k-\sigma-1} = \varDelta u_{k-\sigma} = A_{k-\sigma}(-2+n)r^{-2} = A_{k-\sigma-1}r^{-2}$. 又由命题 2.2 知有式 (11) 成立，且 $u_1 = A_1 r^{-2(k-\sigma-1)} = A_1 r^{-n+2}$. 另知 $\varDelta u_1 = -\delta(x-y)$, 即 $\varDelta^{(k)} u_k = -\delta(x-y)$.

当 $n = 2$, 有 $\sigma = k - 1 \geq 0$, 其 $u_i (i = k, k-1, \cdots, k-\sigma)$ 如式 (10) 所示，且 $u_{k-\sigma} = u_1 = A_1(\ln r + a_1)$ 及 $\varDelta u_1 = -\delta(x-y)$.

当 $2k - n = 0$, 有 $u_k = A_k(\ln r + a_k)$ 及 $u_i = A_i r^{l_i} (i = k-1, \cdots, 1)$. 此处 $l_{k-1} = -2$ 及有式 (6) 成立，且有 $u_1 = A_1 r^{-2(k-1)} = A_1 r^{-n+2}$ 及 $\varDelta u_1 = 0 (r \neq 0)$.

b) 当 $n > 2$ 及 $l_k = 2k - n = \sigma < 0$ 时，由命题 2.2 知，$l_i \neq 0 (i = k, k-1, \cdots, 1)$ 及 $l_1 = l_k - 2(k-1) = -n + 2 < 0$, 同理即知 u_k 是基本解.

又若 $l_k = 2k - n = \sigma > 0$ 且 $n > 2$ 为奇数，有 $l_i \neq 0 (i = k, k-1, \cdots, 1)$ 为奇数及 $l_1 = l_k - 2(k-1) = -n + 2$. 同理，即知有式 (12) 及 (6) 成立且 u_k 是基本解，命题得证.

3 主要结果

定理 3.1 设 $u \in C^{2k}(\varOmega) \cap C^{2k-1}(\overline{\varOmega})$, $\varOmega \subset \boldsymbol{R}^n$, 则有

$$\sum_{i=1}^{s} \int_{\varGamma} \Big(\varDelta^{(i-1)} u_s \frac{\partial \varDelta^{(k-i)} u}{\partial n} - \varDelta^{(k-i)} u \frac{\partial \varDelta^{(i-1)} u_s}{\partial n} \Big) \mathrm{d}s - \int_{\varOmega} u_s \varDelta^{(k)} u \mathrm{d}\varOmega$$
$$= \alpha(y) \varDelta^{(k-s)} u(y), \quad k \geq s, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\varGamma} \Big(u_{s-i+1} \frac{\partial \varDelta^{(k-i)} u}{\partial n} - \varDelta^{(k-i)} u \frac{\partial \varDelta u_{s-i+1}}{\partial n} \Big) \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{\varOmega} (u \varDelta^{(k)} u_s - u_s \varDelta^{(k)} u) \mathrm{d}\varOmega = 0, \quad k < s, \tag{14}$$

其中

$$\alpha(y) = \begin{cases} 1, & y \in \varOmega; \\ \dfrac{\theta_n(y)}{\theta_n}, & y \in \varGamma; \\ 0, & y \notin \overline{\varOmega}. \end{cases} \tag{15}$$

而 n 为沿边界 Γ 的外法向， u_s 是 $\Delta^{(s)}u=0$ 的基本解， σ_n 是单位超球面的面积， $\theta_n(y)$ 是以点 $y\in\Gamma$ 为球心的单位超球面含于 Ω 内部分的面积.

证 先考虑 $y\in\Omega$ 的情形. 以 y 为球心作一半径为 ε 的超球 $B_\varepsilon\subset\Omega$. 在区域 $\Omega\setminus B_\varepsilon$ 中对 u 和 u_s 应用 Green 公式，于是

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon}u_s\Delta^{(k)}u\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon}\Delta u_s\Delta^{(k-1)}u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma\cup\Gamma_\varepsilon}\Big(u_s\frac{\Delta^{(k-1)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-1)}u\frac{\partial u_s}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s.\qquad(16)$$

为简便计，这里省去了微分和积分变量 x(下同). 对等式右端第一个积分反复应用 Green 公式，可以得到

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon}u_s\Delta^{(k)}u\mathrm{d}\Omega=&\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon}\Delta^{(q)}u_s\Delta^{(k-q)}u\mathrm{d}\Omega\\&+\sum_{i=1}^{q}\int_{\Gamma\cup\Gamma_\varepsilon}\Big(\Delta^{(i-1)}u_s\frac{\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial\Delta^{(i-1)}u_s}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s.\end{aligned}\qquad(17)$$

式中 $q=\min\{k,s\}$, Γ_ε 为 B_ε 的 $n-1$ 维超球面.

(A)　若 $u_s=A_sr^{l_s}$, 则在 Γ_ε 上

$$\Delta^{(i-1)}u_s=u_{s-i+1}=A_{s-i+1}r^{l_{s-i+1}}=A_{s-i+1}\varepsilon^{2(s-i+1)-n},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta^{(i-1)}u_s}{\partial n}&=-\frac{\partial u_{s-i+1}}{\partial r}=-A_{s-i+1}l_{s-i+1}r^{l_{s-i+1}-1}\\&=-A_{s-i+1}[2(s-i+1)-n]\varepsilon^{2(s-i)-n+1},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\Delta^{(i-1)}u_s\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}\mathrm{d}s\\&=A_{s-i+1}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{2(s-i+1)-n}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}\mathrm{d}s=0,\quad i=1,2,\cdots,q,\end{aligned}\qquad(18)$$

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial\Delta^{(i-1)}u_s}{\partial n}\mathrm{d}s\\&=-A_{s-i+1}[2(s-i+1)-n]\lim_{\varepsilon\to0}\{\varepsilon^{2(s-i)-n+1}\varepsilon^{n-1}\sigma_n\overline{\Delta^{(k-i)}u}\}\\&=\begin{cases}A_1(n-2)\Delta^{(k-s)}u,&i{=}s\le k;\\0,&i\ne s.\end{cases}\end{aligned}\qquad(19)$$

式中 $\overline{\Delta^{(k-i)}u}$ 为 $\Delta^{(k-s)}u$ 在球面 Γ_ε 上的平均， σ_n 为单位超球面 Γ_ε 的面积. 注意到，当 $q=s<k$ 时在 $\Omega\setminus B_\varepsilon$ 中有 $\Delta^{(s)}u_s=0$; 当 $k<s$ 时 $q=k$. 令 $\varepsilon\to0$ 对式 (15) 两端取极限，取 $A_1(n-2)\sigma_n=1(n\ne2)$, 即知式 (13) 和式 (14) 成立.

(B)　若取 $u_s=A_sr^{l_s}(\ln r+a_s)$, 由命题 2.4, 在 Γ_ε 上有

$$\Delta^{(i-1)}u_s=u_{s-(i-1)}=A_{s-i+1}r^{l_{s-i+1}}(\ln r+a_{s-i+1}),\quad i=1,2,\cdots,\sigma+1;\qquad(20)$$

$$u_{s-(i-1)}=A_{s-i+1}r^{l_{s-i+1}},\quad i=\sigma+2,\sigma+3,\cdots,s;\qquad(21)$$

$$\frac{\partial \Delta^{(i-1)} u_s}{\partial n} = -\frac{\partial u_{s-(i-1)}}{\partial r} = -A_{s-i+1} l_{s-i+1} r^{l_{s-i+1}-1} (\ln r + \overline{a_{s-i+1}}), \quad i = 1, 2, \cdots, \sigma; \tag{22}$$

$$-\frac{\partial u_{s-(i-1)}}{\partial r} = -A_{s-i+1} l_{s-i+1} r^{l_{s-i+1}-1}, \quad i = \sigma+1, \sigma+2, \cdots, s, \tag{23}$$

式中 $\overline{a_{s-i+1}} = a_{s-i+1} + \frac{1}{l_{s-i+1}}$.

(a) 若 $k \le \sigma (< s)$, 此时 $q = k$, 有

$$\Delta^{(i-1)} u_s = u_{s-(i-1)} = A_{s-i+1} r^{l_{s-i+1}} (\ln r + a_{s-i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots, k;$$

$$\frac{\partial \Delta^{(i-1)} u_s}{\partial n} = -\frac{\partial u_{s-(i-1)}}{\partial r} = -A_{s-i+1} l_{s-i+1} r^{l_{s-i+1}-1} (\ln r + \overline{a_{s-i+1}}), \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

又由式 (4), $l_s > l_{s-1} > \cdots > l_{s-(k-1)} = 2\sigma - 2(k-1) = 2(\sigma - k) + 2 \ge 2$. 由式 (18), (19) 知式 (17) 中所有沿 Γ_ε 的积分当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零，故有式 (14) 成立.

(b) 若 $\sigma < k < s$, 此时 $q = k$, 有 $u_i (i = s, s-1, \cdots, s-\sigma)$ 如式 (20) 所示，且 $l_s > l_{s-1} > \cdots > l_{s-\sigma} = 0$. 又 $u_{s-\sigma-1}, \cdots, u_{s-k-1}$ 如式 (21) 所示，且 $l_{s-\sigma-1} > \cdots > l_{s-k+1} = 2s - n - 2(k-1) = 2(s-k) - n + 2 > -n + 2$. 注意到 (22), (23) 及 (18), (19), 知式 (17) 中所有沿 Γ_ε 的积分当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零，故仍有式 (14) 成立.

(c) 若 $k \ge s$, 此时 $q = s$. 当 $i \le s-1$ 时，其 $u_s, u_{s-1}, \cdots, u_{s-\sigma}$ 及 $u_{s-\sigma-1}, \cdots, u_2$, 同 (b) 讨论. 当 $i = s$ 时，有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^{(s-1)} u_s \frac{\partial \Delta^{(k-s)} u}{\partial n} \mathrm{d}s = A_1 \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n+2} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Delta^{(k-s)} u}{\partial n} \mathrm{d}s = 0,$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^{(k-s)} u \frac{\partial \Delta^{(s-1)} u_s}{\partial n} \mathrm{d}s \\ = &-A_1(-n+2) \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n+1} \cdot \varepsilon^{n-1} \sigma_n \overline{\Delta^{(k-s)} u} = A_1 (n-2) \sigma_n \Delta^{(k-s)} u(y). \end{aligned}$$

因在 $\Omega \setminus B_\varepsilon$ 中 $\Delta^{(s)} u_s = 0$, 由式 (17) 取极限即得式 (13).

(d) 当 $n = 2$, 此时 $\sigma = s - 1 > 0$, $u_i (i = s, s-1, \cdots, 1)$ 如式 (10) 所示，且 $l_s > l_{s-1} > \cdots > l_1 = 0$ 及 $u_1 = u_{s-\sigma} = A_1 (\ln r + a_1)$. 若 $k < s$, 同 (a), (b) 可证得式 (14) 成立. 若 $k \ge s$, 同 (c) 证明，当 $i = 1, 2, \cdots, s-1$ 时，式 (17) 中在 Γ_ε 上积分当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于零. 当 $i = s$ 时

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^{(s-1)} u_s \frac{\partial \Delta^{(k-s)} u}{\partial n} \mathrm{d}s = A_1 \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln \varepsilon + a_1) \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Delta^{(k-s)} u}{\partial n} \mathrm{d}s = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^{(k-s)} u \frac{\partial \Delta^{(s-1)} u_s}{\partial n} \mathrm{d}s = -A_1 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta^{(k-s)} u \mathrm{d}s = -2A_1 \pi \Delta^{(k-s)} u(y).$$

取 $-2A_1 \pi = 1$, 同理即知式 (13) 成立.

当 $y \in \Gamma$ 时，在 $\Omega \setminus (\Omega \cap B_\varepsilon)$ 中重复前面的讨论，注意到

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \cap \Gamma_\varepsilon} \Delta^{(k-s)} u \frac{\partial u_1}{\partial n} \mathrm{d}s &= A_1 (n-2) \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n+1} \int_{\Omega \cap \Gamma_\varepsilon} \Delta^{(k-s)} u \mathrm{d}s \\ &= A_1 (n-2) \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-n+1} \varepsilon^{n-1} \theta(y) \overline{\Delta^{(k-s)} u} \\ &= \alpha(y) \Delta^{(k-s)} u(y), \quad y \in \Gamma. \end{aligned}$$

式中 $\alpha(y)=\frac{\theta_n(y)}{\sigma_n}$, $A_1(n-2)\sigma_n=1(n\neq 2)$, $\theta_n(y)$ 为以点 $y\in\Gamma$ 为球心的单位超球面含于 Ω 内部分的面积. 当 $n=2$ 时仍有上式成立，且 $-A_1\sigma_n=1,\sigma_n=2\pi$. 当 Γ 在点 y 是充分光滑时，有 $\alpha(y)=\frac{1}{2}$. 当 $y\notin\overline{\Omega}$, 直接在 Ω 中进行讨论，即知有 $\alpha(y)=0$. 定理证毕.

定义 3.2 若 $u\in H^m(\Omega),\Delta^{(m-1)}u\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),(\Delta^{(m-1)}u)_n\in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$, 以及对任意的 $\nu\in H^2(\Gamma)$ 有下式成立

$$\int_\Omega \Delta^{(m-1)}u\Delta\nu\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma \Delta^{(m-1)}u\nu_n\mathrm{d}s-\int_\Gamma(\Delta^{(m-1)}u)_n\nu\mathrm{d}s$$

则称 u 是 m 次弱调和的，其中 $(\cdot)_n$ 表示沿边界 Γ 的外法向导数.

定义 3.3 若 $u(x)\in H^k(\Omega)\cap H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 且有下式成立

$$\int_\Omega u\Delta^{(k)}\varphi\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega f\varphi\mathrm{d}\Omega,\quad \forall\varphi\in H_0^k(\Omega),$$

则称 u 是方程 (1) 的弱解.

定理 3.4 设 $u(x)\in H^k(\Omega)\cap H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 则我们有式 (13) 和式 (14) 成立.

推论 3.5 设 $u(x)\in H^k(\Omega)\cap H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是 k 次弱调和函数，则我们有

$$\sum_{i=1}^{s}\int_\Gamma\Big(u_{s-i+1}\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial u_{s-i+1}}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s=\alpha(y)\Delta^{(k-i)}u(y),\quad k\geq s;\tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\int_\Gamma\Big(u_{s-i+1}\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial u_{s-i+1}}{\partial u}\Big)\mathrm{d}s+\int_\Omega u\cdot u_{s-k}\mathrm{d}\Omega=0,\quad k<s.\tag{25}$$

推论 3.6 设 u 是 Ω 内的 k 次弱调和函数， ν 是 Ω 内的 s 次弱调和函数，且 $k\geq s$, 则有

$$\sum_{i=1}^{s}\int_\Gamma\Big(\Delta^{(i-1)}\nu\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial\Delta^{(i-1)}\nu}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s=0,\tag{26}$$

定理 3.7 设 $f(x)\in \boldsymbol{C}^{2m}(\Omega)\cap\boldsymbol{C}^{2m-1}(\overline{\Gamma})$ 是 m 次弱调和的，则有

$$I_l(y)=\int_\Omega f(x)u_l(x,y)\mathrm{d}\Omega=\sum_{i=1}^{m}\int_\Gamma\Big(\Delta^{(i-1)}f\frac{\partial u_{l+i}}{\partial n}-u_{l+i}\frac{\partial\Delta^{(i-1)}f}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s=0,\tag{27}$$

式中 $u_l(l\geq 1)$ 如式 (3)–(6) 所示.

证 类似于定理 3.1 的证明，可以证得式 (27) 成立. 事实上，在式 (25) 中，令 $u=f,k=m,s-k=l$ 及 $j=k-i+1$, 即得式 (27), 证毕.

定理 3.8 设 $u(x)\in H^k(\Omega)\cap H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是方程 (1) 的弱解， $f(x)\in H^m(\Omega)\cap H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是 m 次弱调和函数，则有

$$\begin{aligned}\alpha(y)\Delta^{(k-l)}u(y)=&\sum_{i=1}^{l}\Big(u_{l-i+1}\frac{\partial\Delta^{(k-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(k-i)}u\frac{\partial u_{l-i+1}}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s\\&+\sum_{j=1}^{m}\Big(u_{l+j}\frac{\partial\Delta^{(j-1)}f}{\partial n}-\Delta^{(j-1)}f\frac{\partial u_{l+j}}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s,\quad l=1,2,\cdots,k,\end{aligned}\tag{28}$$

式中 $\alpha(y)$ 如式 (15) 所示.

证 因为 u 是 $\Delta^{(k)}u=f(x),x\in\Omega$ 的弱解，在式 (13) 中，令 $s=l$, 将式 (27) 代入式 (13) 即得到式 (28), 证毕.

4 误差分析

设 $f(x)\in\boldsymbol{C}^{2m}(\overline{\Omega}),x,y\in\Omega$, 且 $x_i=y_i+h_i,i=1,2,\cdots,n$. 以 y 为原点，其边界 Γ : $r(x,y)=\{r=|x-y||x\in\Gamma,y\in\Omega\}$. 若对方程 (1) 的非齐次项 $f(x)$, 以 Taylor 逼近的 $2m-1$ 次多项式 N_{2m-1} 近似 $f(x)$, 其余项为 R_{2m-1}, 则有 $\Delta^{(m)}N_{2m-1}=0$, 类似前面讨论，相应地有余项为 $R_{m,k}(f)=\int_\Omega R_{2m-1}F_k\mathrm{d}\Omega$. 我们有

定理 4.1 设 $f(x)$ 是 $x\in\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的充分光滑的函数，又 $N_{2m-1}(x,y)$ 是 $f(x)$ 在 $y\in\Omega$ 的 $2m-1$ 次 Taylor 逼近多项式，则对余项 $R_{m,k}(f)$, 有

$$||R_{m,k}(f)||_\infty\le C(n,k)\frac{(\sqrt{n}R)^{2m}}{[2(m+1)]!},\tag{29}$$

且当 $m\to\infty$ 时，式 (29) 右端趋于零. 其中 $C(n,k)$ 对 F_k 分别如式 (3) 和式 (5) 所示时表示不同的与区域及 n,k 有关的常数， $R=\max\{r=|x-y||x\in\Gamma,y\in\Omega\}$, $||g||_\infty=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|g(x)|$.

证 a) 当 F_k 如式 (3) 所示时，有

$$\begin{aligned}|R_{m,k}(f)|=\left|\int_\Omega R_{2m-1}F_k(x,y)\mathrm{d}\Omega\right|&\le\frac{1}{(2m)!}\int_\Omega\left|\left(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{2m}f(\zeta)\cdot F_k\right|\mathrm{d}\Omega\\&\le\frac{M}{(2m)!}\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n|h_i|\right)^{2m}|F_k|\mathrm{d}\Omega\\&\le\frac{n^mM|A_k|}{(2m)!}\int_\Omega r^{2m+2k-n}|\ln r+a_k|r^n\mathrm{d}r\mathrm{d}\varpi,\\&\le\frac{n^mM\sigma_n|A_k|}{(2m)!(2m+2k+1)}(|\ln R|+|B_{m,k}|)R^{2m+2k+1},\end{aligned}$$

式中

$$\zeta=y+\theta h,\quad h=(h_1,h_2,\cdots,h_n),0<\theta<1,\quad M=\max_{\sum k_i}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left\{\left|\frac{\partial^{2m}f(x)}{\partial^{k_1}x_1\partial^{k_2}x_2\cdots\partial^{k_n}x_n}\right|\right\},$$

$$2m=\sum_{i=1}^n k_i,\ k_i\ge0,\quad B_{m,k}=|a_k|+\frac{1}{2m+2k+1},$$

σ_n 是单位超球面的面积， $\mathrm{d}\varpi$ 是单位超球面的面元.

进一步，上式最后一项

$$\le M\sigma_n|A_k|\frac{n^m(|\ln R|+|a_k|+1)}{(2m)!(2m+2k+1)}R^{2m+2k+1}\le C_1(n,k)\frac{(\sqrt{n}R)^{2m}}{[2(m+1)]!}.$$

易知，当 $m\to\infty$ 时，其右端趋于零，即 $R_{m,k}$ 是收敛的且有式 (29) 成立.

b)　当 F_k 如式 (5) 所示时，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega R_{2m-1}F_k\mathrm{d}\Omega\right|\\ \le&\frac{n^mM|A_k|}{(2m)!}\int_\Omega r^{2m+2k-n}\cdot r^n\mathrm{d}r\mathrm{d}\varpi=\frac{n^mM\sigma_n|A_k|}{(2m)!}\int_0^R r^{2m+2k}\mathrm{d}r\\ =&\frac{n^mM\sigma_n|A_k|}{(2m)!(2m+2k+1)}R^{2m+2k+1}\le M\sigma_n|A_k|R^{2k+1}\frac{(\sqrt{n}R)^{2m}}{[2(m+1)]!}\\ =&C_2(n,k)\frac{(\sqrt{n}R)^{2m}}{[2(m+1)]!}.\end{aligned}$$

同理，上式右端当 $m\to\infty$ 时趋于零，即 $R_{m,k}$ 收敛，且式 (29) 成立．证毕．

5　结论及应用

由本文的讨论，我们有以下几点结论．

1)　命题 2.1–2.2 给出了 n 维方程 $\Delta^{(m)}F_m=F_0$ 中 F_m 的递推公式．若 $u_1=F_0$ 是 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的基本解，则由命题 2.5, 可以得到方程 (1) 或 (8) 的基本解．对任意给定的正整数 $m,k(m\ge k)$,, 命题 2.3 给出了 F_m 与 F_k 之间的关系且 $\Delta^{(s)}F_m=F_k, s=m-k$.

2)　对于函数 $u(x)\in\boldsymbol{C}^{2m}(\Omega)\cap\boldsymbol{C}^{2m-1}(\overline{\Omega})$ 或者 $u(x)\in H^k(\Omega)\cap H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 定理 3.1 和定理 3.4 给出了函数 u 的基本积分关系式．特别地，可以得到由式 (24) – (26) 给出的 m 次调和函数的积分表达式．进而，若函数 $f(x)$ 满足方程 $\Delta^{(m)}f=0$, 由式 (27) 可将域上的积分 $I(y)$ 转化为边界积分．需指出的是，式 (27) 是一组表达式，可根据问题的不同情形选择 u_l, 从而将含有非齐次项的积分转化为不同的边界积分．

定理 3.8 给出了方程 (1) 相应的边界积分方程．根据问题给在以 $n-1$ 维流形 Γ 上的不同的边界量，可以给出或得到相应的边界积分方程，故式 (28) 被称为基本边界积分方程．

3)　对于非齐次项 $f(x)$ 为一般光滑函数的情形，本文讨论了用 Taylor 多项式逼近的误差分析，从理论上证明了含有余项的积分是收敛的．由于多项式总是某次调和的，因此在实际应用中可用多项式逼近函数 $f(x)$, 从而可以应用本文的方法来处理．

4)　考虑非齐次重调和方程 $\Delta^{(2)}u=f(x), x\in\Omega$. 取 $k=2$, 则由式 (28) 可得边界积分方程

$$\alpha(y)\Delta^{(2-l)}u(y)+I_l(y)=\sum_{i=1}^{l}\int_\Gamma\Big(u_{l-i+1}\frac{\partial\Delta^{(2-i)}u}{\partial n}-\Delta^{(2-i)}u\frac{\partial u_{l-i+1}}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s,\quad l=1,2.$$

对二维的情形可取基本解 $u_1=-\frac{1}{2\pi}\ln r$ 或 $u_1=-\frac{1}{2\pi}(\ln r+1)$ 及 $u_2=-\frac{1}{8\pi}r^2(\ln r-1)$ 或 $u_2=-\frac{1}{8\pi}r^2\ln r$; 对三维的情形可取 $u_1=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$ 及 $u_2=\frac{r}{8\pi}$.

若边界条件是

$$u|_\Gamma=\varphi(x),\quad\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma=\psi(x),\quad x\in\Gamma,$$

则有边界积分方程

$$\int_\Gamma\Big(u_2\frac{\partial\Delta u}{\partial n_x}-\Delta u\frac{\partial u_2}{\partial n_x}\Big)\mathrm{d}s=\alpha(y)u(y)+\int_\Gamma\Big(\varphi(x)\frac{\partial u_1}{\partial n_x}-\psi(x)u_1\Big)\mathrm{d}s+I_2(y);$$

$$\int_\Gamma \Big(u_1\frac{\partial \Delta u}{\partial n_x}-\Delta u\frac{\partial u_1}{\partial n_x}\Big)\mathrm{d}s=\alpha(y)\Delta u(y)+I_1(y).$$

最后，若 $f(x)\equiv 0$ 以及 ν 在 Ω 中是弱调和的，由式 (26) 及 $q=s=1,k=2$, 我们有

$$\int_\Gamma \Big(\nu\frac{\partial \Delta u}{\partial n}-\Delta u\frac{\partial \nu}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s=0.$$

特别地，取 $\nu=c$, 有

$$\int_\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial n}\mathrm{d}s=0. \tag{30}$$

其次，如 ν 在 Ω 中是弱重调和的，我们有 $q=s=k=2$, 以及

$$\int_\Gamma \Big(\nu\frac{\partial \Delta u}{\partial n}-\Delta u\frac{\partial \nu}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s+\int_\Gamma \Big(\psi(x)\Delta\nu-\varphi(x)\frac{\partial \Delta \nu}{\partial n}\Big)\mathrm{d}s=0. \tag{31}$$

若取 $\nu=c$,, 则仍有式 (30) 成立.

特别地，若 $\overline{\Omega}=\{x||x|\leq R\}$, 取 $\nu=\frac{c}{2R}(r^2-R^2)$, 则在 Ω 中有 $\Delta^{(2)}\nu=0$ 且有 $\nu|_R=0,\frac{\partial\nu}{\partial n}|_R=c$ 及 $\Delta\nu=\frac{2c}{R}$. 由式 (31), 我们有

$$\int_\Gamma \Delta u\mathrm{d}s=\frac{2}{R}\int_\Gamma \psi\mathrm{d}s=4\pi\overline{\psi}.$$

参 考 文 献

[1] Keyes D E, Xu J. Domain Decomposition Methods in Scientific and Engineering Computing. Providence: American Mathematical Society, 1994.

[2] Paris F, Canas J. Boundary Element Method: Fundamentals and Applications. Oxford: Oxford University Press, 1997.

[3] Jaswon M, Symm G. Integral Equation in Potential Theory and Elastostatics. New York: Academic Press, 1997.

[4] Gunzburger M D, Heinkenschloss M, Lee H K. Solution of elliptic partial differential equations by an optimization-based domain decomposition method. *J. Appl. Math. Comp.*, 2000, **113**: 111–139.

[5] Jeon Y. New indirect boundary integral equation formulas for the biharmonic equation. *J. Comp. Appl. Math.*, 2001, **132**: 341–356.

[6] Jeon Y. New boundary element formulas for the biharmonic equation. *Adv. Comp. Math.*, 1998, **9**: 97–115.

[7] Jeon Y. Scalar boundary integral equation formulas for the biharmonic equation-numerical experiments. *J. Comp. Appl. Math.*, 2000, **115**: 269–282.

[8] Jeon Y. New indirect scalar boundary integral formulas for the biharmonic equation. *J. Comp. Appl. Math.*, 2001, **135**: 313–324.

[9] Fuglede B. On a direct method of integral equation for solving the biharmonic direct problem. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1981, **61**: 449–459.

[10] Sobolev S L. Applications of Functional Analysis in Mathematical and Physics. Providence: American Mathematical Society, 1950.

[11] Tan J, Zhang L, Wu Y. Two-dimensional multiple non-homogeneous harmonic equation and its boundary integral equations. *J. Appl. Math. Comp.*, 2007, **187**: 893–901.

[12] Tan J. Boundary element analysis of general elastic plane problem. Proc. Inter. Conf. Scientific Commutation, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1991.

[13] Zhou S, Cao Z, Sun S. Boundary integral equations of unique solutions in elasticity. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **10**: 1051–1056.

N-DIMENSIONAL MULTIPLE NON-HOMOGENEOUS HARMONIC EQUATION AND ITS BOUNDARY INTEGRAL EQUATION

TAN Junyu

(*College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing* 400044)

ZHANG Linhua

(*College of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University, Chongqing* 400047)

WU Yong

(*College of Mathematics, Chongqing Institute of Technology University, Chongqing* 400050)

Abstract In this paper, the n-dimensional multiple non-homogeneous harmonic equation $\Delta^{(k)}u = f(x), x \in \boldsymbol{R}^n$, is considered. Firstly, the fundamental solution and its recurrence formulae are given. Then some fundamental integral relations are presented, specially, for multiple harmonic function. Under the assumption that non-homogeneous term $f(x)$ is m-degree harmonic, the integral term in domain is shifted boundary integral, and hence the boundary integral equation without integral in domain is obtained. Finally, the error and convergence analysis is discussed by Taylor polynomial approximation of non-homogeneous term $f(x)$.

Key words Multiple harmonic equation, boundary integral equation, fundamental solution, k-degree harmonic function, weak solution.