系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(4) (2010, 4), 468–475

Banach 空间中一类变分不等式的强收敛定理*

刘 英 佟 慧

(河北大学数学与计算机学院，保定 071002)

摘要 应用广义投影算子引入了一类新的 CQ 迭代方法，并用此方法在 Banach 空间的非紧子集上证明了一个关于变分不等式的强收敛定理；这一定理所用的迭代方法不同于最近的一些相关定理，而且所得结论更加具体；最后，又用这一结果，考虑了在 Banach 空间，算子 T 的零点问题.

关键词 变分不等式， CQ 迭代法，广义投影算子，紧算子.

MR(2000) 主题分类号 47H09, 47H05

1 引 言

设 B 是一个 Banach 空间， B^* 是它的对偶空间， $\langle x,f\rangle$ 表示 $f\in B^*$ 在 $x\in B$ 点的函数值. 我们考虑下面的变分不等式

$$\text{求 } x\in K,\quad \text{使得 } \langle Tx,y-x\rangle\geq 0, \text{ 对所有的 } y\in K \text{ 成立}, \tag{1.1}$$

其中 K 是 B 的非空、闭、凸子集， $T:K\to B^*$ 是一算子. 称点 $x_0\in K$ 是变分不等式 (1.1) 的解, 如果对每一个 $y\in K, \langle Tx_0,y-x_0\rangle\geq 0$ 成立, 变分不等式 (1.1) 的解集表示为 $VI(K,T)$.

由于变分不等式 (1.1) 在经济均衡、工程设计等领域的许多应用，它已经被广泛研究；当算子 T 具有单调性时，解决变分不等式 (1.1) 的许多迭代方法已经被发展；参见文献 [1–7].

最近，在一致凸和一致光滑的 Banach 空间应用广义投影算子， Li[8] 在 Banach 空间的紧子集上用 Mann 迭代序列建立了变分不等式 (1.1) 的强收敛定理； Fan[9] 在 Banach 空间的非紧子集上用 Mann 迭代方法讨论了变分不等式 (1.1) 的解的存在性和收敛性.

另外， Carlos Martinez-Yanes 和 Hong-Kun Xu[10] 在 Hilbert 空间对非扩张映射 T 建立了如下的迭代序列

$$\begin{cases} x_0\in K, \quad \text{任意}, \\ y_n=t_nx_0+(1-t_n)Tx_n, \\ C_n=\{z\in K:\|y_n-z\|^2\leq\|x_n-z\|^2+t_n(\|x_0\|^2+2\langle x_n-x_0,z\rangle)\}, \\ Q_n=\{z\in K:\langle x_n-z,x_0-x_n\rangle\geq 0\}, \\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

* 河北省教育厅 (Z2009111) 资助项目和保定市科技局 (09ZG008, 09ZR008) 指导项目.
收稿日期：2008-02-27, 收到修改稿日期：2009-12-31.

其中 K 为 H 的非空、闭、凸子集， P_K 表示 H 到 K 的度量投影. 文 [10] 证明了如果 $\{\alpha_n\}$ 满足 $0 \le \alpha_n \le 1$, 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, 那么序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $P_{F(T)}x_0$. 其中 $F(T)$ 表示 T 的不动点集合. 我们称序列 (1.2) 为一类 CQ 迭代方法.

受文献 [9,10] 的启发，本文的目的是把 CQ 迭代方法发展到变分不等式 (1.1) 上，所得结论推广了文献 [8,9] 的相应结果.

2 预备知识

设 X, Y 是 Banach 空间， $T : D(T) \subset X \to Y$, 称算子 T 是紧的，如果它是连续的和映 $D(T)$ 的有界集到 Y 的相对紧集.

我们用 $J : B \to 2^{B^*}$ 表示从 B 到 2^{B^*} 的正规对偶映射，定义为

$$J(x) := \{v \in B^* : \langle v, x\rangle = \|v\|^2 = \|x\|^2\}, \quad \forall x \in B.$$

对偶映射 J 有下面的性质.

如果 B 是自反的、严格凸的、光滑的 Banach 空间，那么 J 是 1-1 映射，这时 J^{-1} 是从 B^* 到 B 的正规对偶映射，而且也是 1-1 映射.

设 $\{x_n\}$ 是 B 中的一序列，我们用 $x_n \to x$ 表示 $\{x_n\}$ 强收敛到 x .

称 Banach 空间 B 是严格凸的，如果 $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$ 对 $x, y \in B$ 且 $\|x\| = \|y\| = 1$ 和 $x \neq y$. 称 Banach 空间 B 是一致凸的，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ 对 B 中的任意两个序列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足 $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\frac{x_n+y_n}{2}\| = 1$. 设 $U = \{x \in B : \|x\| = 1\}$ 是 B 中一单位球，那么称 Banach 空间 B 是光滑的，如果

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

存在，对每一个 $x, y \in U$. 称 B 是一致光滑的，如果上述极限不依赖于 $x, y \in U$.

在文献 [2,4] 中， Alber 引进这样一个函数 $V : B^* \times B \to R$, 定义为

$$V(\phi, x) = \|\phi\|^2 - 2\langle \phi, x\rangle + \|x\|^2,$$

其中 $\phi \in B^*$ 和 $x \in B$.

容易看到

$$V(\phi, x) \ge (\|\phi\| - \|x\|)^2. \tag{2.1}$$

这样，函数 $V : B^* \times B \to R^+$ 是非负的.

定义 2.1[9] 如果 B 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间，广义投影 $\pi_K : B^* \to K$ 是一映射，对任意点 $\phi \in B^*$, $\pi_K\phi$ 是下述最小值问题的一个解，即

$$V(\phi, \pi_K(\phi)) = \inf_{y\in K} V(\phi, y).$$

Li[11] 证明了如果 B 是自反的、严格凸、光滑的 Banach 空间，那么广义投影算子 $\pi_K : B^* \to K$ 是连续的.

在下面，除非特别声明，我们总是设 B 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间，那么 B 是自反的、严格凸的、光滑的 Banach 空间.

函数 $V_2: B\times B\to R$ 定义为

$$V_2(x,y)=V(Jx,y),\quad \forall x,y\in B.$$

下面关于算子 π_K, V 的一些性质对这篇论文是有用的 (参见文献 [1,11]).

i) $V: B^*\times B\to R$ 是连续的.

ii) $V(\phi,x)=0$ 的充要条件是 $\phi=J(x)$.

iii) $V(J\pi_K\phi,x)\le V(\phi,x)$ 对所有的 $\phi\in B^*$ 和 $x\in B$.

iv) 如果 B 是光滑的, 那么对任意给定点 $\phi\in B^*, x\in\pi_K\phi$ 的充要条件是 $\langle\phi-Jx, x-y\rangle\ge 0$, 对所有的 $y\in K$.

v) 算子 $\pi_K: B^*\to K$ 是单值的充要条件是 B 是严格凸的.

vi) 如果 B 是光滑的, 那么对任意给定点 $\phi\in B^*, x\in\pi_K\phi$, 下面的不等式成立

$$V(Jx,y)\le V(\phi,y)-V(\phi,x),\quad \forall y\in K.$$

注 1 容易看到, 如果 B 是严格凸、光滑的 Banach 空间, 那么对任意 $x,y\in B, V_2(x,y)=0$(即 $V(Jx,y)=0$) 的充要条件是 $x=y$. 显然, 如果 $x=y$, 那么 $V_2(x,y)=0$; 反过来, 如果 $V_2(x,y)=0$, 那么根据算子 V 的性质 ii), 我们有 $Jx=Jy$, 又因为 J 是 1-1 的, 故 $x=y$.

用广义投影算子 π_K 的性质, 在 [1] 中 Alber 证明了下面的定理.

定理 2.2 设 B 是自反、严格凸、光滑的 Banach 空间, B^* 是其对偶空间, 设 $T: B\to B^*$ 是任一算子, α 是任一固定的正数, 那么点 $x\in K\subset B$ 是变分不等式 (1.1) 的解的充要条件是 x 是算子方程 $x=\pi_K(Jx-\alpha Tx)$ 的解.

3 主要结果

对任意的 $x_0\in K$, 我们定义如下的 CQ 方法迭代序列

$$\begin{cases} x_0\in K,\\ y_n=\alpha_n x_0+(1-\alpha_n)\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n),\\ C_n=\{z\in K: V_2(y_n,z)\le\alpha_n V_2(x_0,z)+(1-\alpha_n)V_2(x_n,z)\},\\ Q_n=\{z\in K:\langle x_n-z, Jx_0-Jx_n\rangle\ge 0\},\\ x_{n+1}=\pi_{C_n\cap Q_n}Jx_0. \end{cases}\tag{3.1}$$

其中 $\pi_{C_n\cap Q_n}Jx_0$ 是 Jx_0 到 $C_n\bigcap Q_n$ 上的广义投影, $\{\alpha_n\}$ 满足

$$0\le\alpha_n\le 1,\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.\tag{3.2}$$

下面是对本文起着重要作用的一些引理.

引理 3.1[6] 设 B 是一致凸的 Banach 空间, 那么对任意的 $r>0$, 存在连续、严格增的凸函数 $g: R^+\to R^+, g(0)=0$, 使得对所有 $x_1,x_2\in B$ 和 $y\in B_r(0):=\{x\in B:\|x\|\le r\}$ 和对任意 $\alpha\in[0,1]$, 有下面的不等式成立

$$V_2(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,y)\le\alpha V_2(x_1,y)+(1-\alpha)V_2(x_2,y)-\alpha(1-\alpha)g(\|x_1-x_2\|).\tag{3.3}$$

引理 3.2[12] 设 B 是一致凸、光滑的 Banach 空间, 设 $\{y_n\},\{z_n\}$ 是 B 中的两个序列, 如果 $V_2(z_n,y_n)\to 0$, 且 $\{y_n\}$ 或 $\{z_n\}$ 是有界的, 那么 $z_n-y_n\to 0$.

引理 3.3 [5] 设 B 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间，我们有

$$\|\phi+\Phi\|^2 \le \|\phi\|^2 + 2\langle \Phi, J^{-1}(\phi+\Phi)\rangle, \quad \forall \phi, \Phi \in B^*.$$

引理 3.4 设 B 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间，设 K 是 B 的非空、闭、凸子集，假定存在一正数 β, 使得

$$\langle Tx, J^{-1}(Jx-\beta Tx)\rangle \ge 0, \quad \forall x \in K, \tag{3.4}$$

且

$$\langle Tx, y\rangle \le 0, \quad \forall x \in K, y \in VI(K,T), \tag{3.5}$$

那么 $VI(K,T)$ 是闭、凸的.

证　我们首先表明 $VI(K,T)$ 是闭的. 设 $\{x_n\}$ 是 $VI(K,T)$ 中的一序列，且 $x_n \to \widehat{x} \in K$, 由 V_2 的定义，V 的性质，引理 3.3 和条件 (3.4), (3.5), 我们有

$$\begin{aligned}
&V_2(\pi_K(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}), x_n)\\
&= V(J\pi_K(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}), x_n)\\
&\le V(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}, x_n)\\
&= \|J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}\|^2 - 2\langle J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}, x_n\rangle + \|x_n\|^2\\
&\le \|J\widehat{x}\|^2 - 2\beta\langle T\widehat{x}, J^{-1}(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x})\rangle - 2\langle J\widehat{x}, x_n\rangle\\
&\quad +2\beta\langle T\widehat{x}, x_n\rangle + \|x_n\|^2\\
&\le \|J\widehat{x}\|^2 - 2\langle J\widehat{x}, x_n\rangle + \|x_n\|^2\\
&= V_2(\widehat{x}, x_n).
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
0 &\le V_2(\pi_K(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}), \widehat{x}) = \lim_{n\to\infty} V_2(\pi_K(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x}), x_n)\\
&\le \lim_{n\to\infty} V_2(\widehat{x}, x_n) = V_2(\widehat{x}, \widehat{x}) = 0.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\widehat{x} = \pi_K(J\widehat{x}-\beta T\widehat{x})$. 即 $\widehat{x} \in VI(K,T)$. 下一步，我们表明 $VI(K,T)$ 是凸的，设 $x, y \in VI(K,T)$, 和 $t \in (0,1)$, 令 $z = tx+(1-t)y$. 只须表明 $z = \pi_K(Jz-\beta Tz)$. 事实上，我们有

$$\begin{aligned}
0 &\le V_2(\pi_K(Jz-\beta Tz), z) = V(J\pi_K(Jz-\beta Tz), z)\\
&\le V(Jz-\beta Tz, z)\\
&= \|Jz-\beta Tz\|^2 - 2\langle Jz-\beta Tz, z\rangle + \|z\|^2\\
&\le \|Jz\|^2 - 2\beta\langle Tz, J^{-1}(Jz-\beta Tz)\rangle - 2\langle Jz, z\rangle + 2\beta\langle Tz, z\rangle + \|z\|^2\\
&\le 2\beta\langle Tz, z\rangle = 2\beta\langle Tz, tx+(1-t)y\rangle\\
&= 2\beta t\langle Tz, x\rangle + 2\beta(1-t)\langle Tz, y\rangle \le 0.
\end{aligned}$$

这就意味着 $z = \pi_K(Jz-\beta Tz)$, 即 $z \in VI(K,T)$. 因此 $VI(K,T)$ 是闭、凸的.

引理 3.5 如果 B 是自反的、严格凸的、光滑的 Banach 空间，那么 $\pi_B = J^{-1}$.

证　$\forall \phi \in B^*$, 根据函数 V 的定义和 (2.1) 式，我们有

$$0 \le V(\phi, J^{-1}\phi) = \|\phi\|^2 - 2\langle \phi, J^{-1}\phi\rangle + \|J^{-1}\phi\|^2 = 0.$$

根据算子 π_B 的定义，我们有 $J^{-1}\phi \in \pi_B\phi$. 既然 π_B 是单值的，我们得到 $\pi_B\phi = J^{-1}\phi$.

定理 3.6 设 B 是一致凸和一致光滑的 Banach 空间, K 是 B 的非空、闭凸子集, 设 $T: K\to B^*$ 是一算子满足条件 (3.4), (3.5), 而且 $J-\beta T: K\to B^*$ 是紧的, 假定 $VI(K,T)\neq\emptyset$, 那么由 (3.1) 定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\pi_{VI(K,T)}Jx_0$, 其中 $\pi_{VI(K,T)}Jx_0$ 是 Jx_0 到 $VI(K,T)$ 上的广义投影.

证 我们首先表明对每一个 $n\in N\bigcup\{0\}$, C_n 和 Q_n 是闭、凸的. 从 C_n 和 Q_n 的定义, 很明显, C_n 是闭的, Q_n 是闭、凸的. 下面我们说明 C_n 是凸的. 因为 $V_2(y_n,z)\leq\alpha_nV_2(x_0,z)+(1-\alpha_n)V_2(x_n,z)$ 等价于

$$2\alpha_n\langle Jx_0,z\rangle+2(1-\alpha_n)\langle Jx_n,z\rangle-2\langle Jy_n,z\rangle\leq\alpha_n\|x_0\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n\|^2-\|y_n\|^2.$$

所以 C_n 是凸的. 下一步, 我们表明对所有的 $n\in N\bigcup\{0\}, VI(K,T)\subset C_n\bigcap Q_n$. 设 $p\in VI(K,T)$, 那么, 从引理 3.1, 我们有

$$\begin{aligned}V_2(y_n,p)&=V_2(\alpha_nx_0+(1-\alpha_n)\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n),p)\\&\leq\alpha_nV_2(x_0,p)+(1-\alpha_n)V_2(\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n),p)\\&\quad-\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)-x_0\|).\end{aligned}\tag{3.6}$$

由 V_2 的定义、 V 的性质、引理 3.3 和条件 (3.4), (3.5), 我们得到

$$\begin{aligned}&V_2(\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n),p)\\=&V(J\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n),p)\\\leq&V(Jx_n-\beta Tx_n,p)\\=&\|Jx_n-\beta Tx_n\|^2-2\langle Jx_n-\beta Tx_n,p\rangle+\|p\|^2\\\leq&\|Jx_n\|^2-2\beta\langle Tx_n,J^{-1}(Jx_n-\beta Tx_n)\rangle-2\langle Jx_n-\beta Tx_n,p\rangle+\|p\|^2\\\leq&\|x_n\|^2-2\langle Jx_n,p\rangle+\|p\|^2+2\beta\langle Tx_n,p\rangle\leq V_2(x_n,p).\end{aligned}\tag{3.7}$$

从 (3.6) 和 (3.7), 我们得到 $V_2(y_n,p)\leq\alpha_nV_2(x_0,p)+(1-\alpha_n)V_2(x_n,p)$. 我们有 $p\in C_n$. 因此, 对每一个 $n\in N\bigcup\{0\}$, $VI(K,T)\subset C_n$. 另一方面, 我们很明显看到 $VI(K,T)\subset C_0\bigcap Q_0$, 假定对某一 $k\in N$, $VI(K,T)\subset C_k\bigcap Q_k$. 因为存在 $x_{k+1}\in C_k\bigcap Q_k$ 使得 $x_{k+1}=\pi_{C_k\cap Q_k}Jx_0$, 那么根据 π_K 的性质, 对每一个 $z\in C_k\bigcap Q_k$, 我们有

$$\langle x_{k+1}-z,Jx_0-Jx_{k+1}\rangle\geq0.$$

因为 $VI(K,T)\subset C_k\bigcap Q_k$, 我们有 $\langle x_{k+1}-p,Jx_0-Jx_{k+1}\rangle\geq0$ 对每一个 $p\in VI(K,T)$ 成立. 因此 $VI(K,T)\subset Q_{k+1}$. 这样, 我们有 $VI(K,T)\subset C_{k+1}\bigcap Q_{k+1}$. 根据数学归纳法, 对每一个 $n\in N\bigcup\{0\}, VI(K,T)\subset C_n\bigcap Q_n$. 这就意味着 $\{x_n\}$ 被很好的定义. 从 Q_n 的定义, 我们有 $x_n=\pi_{Q_n}Jx_0$. 由 $x_n=\pi_{Q_n}Jx_0$ 和 $VI(K,T)\subset Q_n$, 我们得到 $V(Jx_0,x_n)\leq V(Jx_0,p)$ 对每一个 $p\in VI(K,T)$. 因此, $\{V(Jx_0,x_n)\}$ 是有界的. 而且, 由 V 的定义, 有 $\{x_n\}$ 是有界的. 既然 $x_{n+1}=\pi_{C_n\cap Q_n}Jx_0\in Q_n$ 且 $x_n=\pi_{Q_n}Jx_0$, 那么对每一个 $n\in N\bigcup\{0\}$, 我们有 $V(Jx_0,x_n)\leq V(Jx_0,x_{n+1})$. 即 $\{V(Jx_0,x_n)\}$ 是不减的. 因此 $V(Jx_0,x_n)$ 存在极限. 由 V 的性质, 对每一个 $n\in N\bigcup\{0\}$, 有

$$V(Jx_n,x_{n+1})\leq V(Jx_0,x_{n+1})-V(Jx_0,x_n).$$

这意味着

$$\lim_{n\to\infty}V_2(x_{n+1},x_n)=0.\tag{3.8}$$

由 $x_{n+1}=\pi_{C_n\cap Q_n}Jx_0\in C_n$, 从 C_n 的定义，我们有

$$V_2(y_n,x_{n+1})\le\alpha_nV_2(x_0,x_{n+1})+(1-\alpha_n)V_2(x_n,x_{n+1}),$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 和 (3.8) 式，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}V_2(y_n,x_{n+1})=0$. 用引理 3.2, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0. \tag{3.9}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-y_n\|&=\|x_{n+1}-\alpha_nx_0-(1-\alpha_n)\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|\\&=\|\alpha_n(x_{n+1}-x_0)+(1-\alpha_n)(x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n))\|\\&=\|(1-\alpha_n)(x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)-\alpha_n(x_0-x_{n+1})\|\\&\ge(1-\alpha_n)\|x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|-\alpha_n\|x_0-x_{n+1}\|.\end{aligned}$$

因此

$$\|x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\| \quad\le\quad \frac{1}{(1-\alpha_n)}\big(\|x_{n+1}-y_n\|+\alpha_n\|x_0-x_{n+1}\|\big). \tag{3.10}$$

从 (3.9) 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 我们得到

$$\|x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|\to 0. \tag{3.11}$$

又因为

$$\|x_n-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|\le\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|,$$

因此，从 (3.9) 和 (3.11), 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-\pi_K(Jx_n-\beta Tx_n)\|=0. \tag{3.12}$$

因为序列 $\{x_n\}$ 是有界的，$J-\beta T$ 是紧的, 那么序列 $\{Jx_n-\beta Tx_n\}$ 一定有子列 $\{Jx_{n_i}-\beta Tx_{n_i}\}$ 收敛到一点 $f\in B^*$. 根据 π_K 的连续性，我们有

$$\lim_{i\to\infty}\pi_K(Jx_{n_i}-\beta Tx_{n_i})=\pi_Kf. \tag{3.13}$$

令 $x^*=\pi_Kf$, 由

$$\|x_{n_i}-x^*\|\le\|x_{n_i}-\pi_K(Jx_{n_i}-\beta Tx_{n_i})\|+\|\pi_K(Jx_{n_i}-\beta Tx_{n_i})-x^*\|, \tag{3.14}$$

联合 (3.12) 和 (3.13), 我们有

$$\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=x^*. \tag{3.15}$$

根据算子 π_K 和 $J-\beta T$ 的连续性，及 (3.13) 和 (3.15), 我们有

$$\pi_K(Jx^*-\beta Tx^*)=x^*.$$

由定理 2.1, 我们有 $x^*\in VI(K,T)$.

最后，我们表明 $x_n\to\pi_{VI(K,T)}Jx_0$. 设 $w=\pi_{VI(K,T)}Jx_0$. 对任意的 $n\in N$, 由 $x_{n+1}=\pi_{C_n\cap Q_n}Jx_0$ 和 $w\in VI(K,T)\subset C_n\bigcap Q_n$, 我们有

$$V(Jx_0,x_{n+1})\le V(Jx_0,w).$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
V(Jx_0, x^*) &= \|Jx_0\|^2 - 2\langle Jx_0, x^*\rangle + \|x^*\|^2 \\
&= \lim_{i\to\infty} (\|Jx_0\|^2 - 2\langle Jx_0, x_{n_i}\rangle + \|x_{n_i}\|^2) \\
&= \lim_{i\to\infty} V(Jx_0, x_{n_i}) \le V(Jx_0, w).
\end{aligned}
$$

由 $\pi_{VI(K,T)}Jx_0$ 的定义和 $x^* \in VI(K,T)$, 我们有 $x^* = w$. 因此, $x_{n_i} \to \pi_{VI(K,T)}Jx_0$. 既然 x_{n_i} 是有界序列 $\{x_n\}$ 的任一收敛子列, 我们得到 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\pi_{VI(K,T)}Jx_0$.

注 2 如果 B 是 Hilbert 空间, 那么条件 (3.4) 成为 $\langle Tx, x\rangle \ge \beta\langle Tx, Tx\rangle = \beta\|Tx\|^2$, 也就是说, 映射 T 是强制的.

下面利用定理 3.1, 讨论算子 $T: B \to B^*$ 的零点问题.

定理 3.7 设 B 是一致凸、一致光滑的 Banach 空间, 设 T 是一个从 B 到 B^* 的算子, 满足下面的条件: 存在一个正数 β, 使得

$$
\langle Tx, J^{-1}(Jx - \beta Tx)\rangle \ge 0, \quad \forall x \in B \tag{3.16}
$$

和

$$
\langle Tx, y\rangle \le 0, \quad \forall x \in B,\ y \in T^{-1}0 = \{u \in B : Tu = 0\}. \tag{3.17}
$$

假定 $J - \beta T : B \to B^*$ 是紧的, $T^{-1}0 \ne \emptyset$, 那么由下面的迭代方法定义的序列 $\{x_n\}$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_0 \in B, \\
y_n = \alpha_n x_0 + (1-\alpha_n)J^{-1}(Jx_n - \beta Tx_n), \\
C_n = \{z \in K : V_2(y_n, z) \le \alpha_n V_2(x_0, z) + (1-\alpha_n)V_2(x_n, z)\}, \\
Q_n = \{z \in K : \langle x_n - z, Jx_0 - Jx_n\rangle \ge 0\}, \\
x_{n+1} = \pi_{C_n \cap Q_n} Jx_0.
\end{array}
\right. \tag{3.18}
$$

其中 $\{\alpha_n\}$ 满足

$$
0 \le \alpha_n \le 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{3.19}
$$

强收敛到 $\pi_{T^{-1}0}Jx_0$, 其中 $\pi_{T^{-1}0}$ 是从 B^* 到 $T^{-1}0$ 上的广义投影.

证 在定理 3.6 中, 令 $K = B$, 根据引理 3.5 和定理 2.2, 我们有 $VI(B,T) = T^{-1}0$. 因此, 用定理 3.6, 我们很容易得到想要的结论.

参 考 文 献

[1] Alber Ya. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: Properties and applications. Theory and Applications of Nonlinear Operators of Monotonic and Accretive Type, Marcel Dekker, New York, 1996.

[2] Alber Ya, GuerreDelabriere S. On the projection methods for fixed point problems. *Analysis*, 2001, **21**: 17–39.

[3] Alber Ya, Notik A. On some estimates for projection operator in Banach space. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 1995, **2**: 47–56.

[4] Alber Ya, Reich S. An iterative method for solving a class of nonlinear operator equations in Banach spaces. *Panamer. Math. J.*, 1994, **4**: 39–54.
[5] Chang Shihsen. On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **216**: 94–111.
[6] Chidume C E, Li Jinlu. Projection methods for approximating fixed points of Lipschitz suppressive operators. *Panamer. Math. J.*, 2005, **15**: 29–40.
[7] Chidume C E. Iterative solutions of nonlinear equations in smooth Banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 1996, **26**: 1823–1834.
[8] Li J. On the existence of solutions of variational inequalities in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **295**: 115–126.
[9] Fan Jianghua. A Mann type iterative scheme for variational inequalities in noncompact subsets of Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **337**: 1041–1047.
[10] Carlos M Y, Xu H K. Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes. *Nonlinear Anal.*, 2006, **64**: 2400–2411.
[11] Li J. The generalized projection operator on reflexive Banach spaces and its applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, **306**: 55–71.
[12] Kamimura S, Takahashi W. Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space. *SIAM J. Optim.*, 2002, **13**: 938–945.

STRONG CONVERGENCE THEOREMS FOR VARIATIONAL INEQUALITIES IN A BANACH SPACE

LIU Ying TONG Hui

(*College of Mathematics and Computer, Hebei University, Baoding* 071002)

Abstract In this paper, a new CQ iterative method is introduced by using the generalized projection operator, and then a strong convergence theorem for variational inequality in noncompact subset of Banach space is proved by the method. This theorem is more concrete than previous related results. Finally, the problem of zero point for an operator in Banach space is investigated by the resultant theorem.

Key words Variational inequality, CQ iterative method, generalized projection operator, compact operator.