系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(4) (2010, 4), 556–576

基于 L^*- 格值逻辑上的 BCK- 代数中直觉不分明化理想*

彭 家 寅

(四川省高等学校数值仿真重点实验室，内江师范学院数学与信息科学学院，内江 641100)

摘要 在 L^*- 格值逻辑的语义框架下，以 L^*- 格值上的 Łukasiewicz 蕴涵算子为工具定义了 L^*- 格值逻辑上的直觉不分明化 BCK- 代数的概念，将用集论所刻画的 BCK- 代数中理想、正定蕴涵理想和蕴涵理想等概念在 L^*- 格值谓词演算下给予了新的刻画，讨论了它们的性质及其关系，研究了这些理想与其同态象、同态原象之间关系，获得了同类理想之积仍为该类理想.

关键词 L^*- 格值， Łukasiewicz 蕴涵算子，直觉不分明化 BCK- 代数，直觉不分明化理想，直觉不分明化正定蕴涵理想，直觉不分明化蕴涵理想.

MR(2000) 主题分类号 03B52

1 引言与预备

1966 年 Imai Y 和 Iseki K[1] 提出了 BCK- 代数的概念， Xi O G[2] 应用了 Zadeh L A 提出的模糊集概念研究了模糊 BCK- 代数，然而这只是对经典 BCK- 代数初步的、简单的模糊化，因而缺乏层次结构. 1952 年 Rosser 和 Turquette[3] 指出：如果谓词演算可以推广到多值逻辑理论中去，那么如何建立这种理论体系呢？应明生 [4–6] 在连续值逻辑语义的框架下，以 Łukasiewicz 蕴涵算子为工具，将用集论刻画的点集拓扑的有关性质用谓词演算的方法予以重新刻画，这就从一个侧面回答了上述问题. 其后，沈继忠、张广济、邹祥福等 [7,8] 在不分明化拓扑中进一步地对一些拓扑性质进行了推广. 1993 年，沈继忠 [7] 在完全剩余格值谓词演算下，刻画了不分明化群的理论，将连续值逻辑的谓词演算推广到完全剩余格值逻辑的谓词演算.

本文在 [4–6] 的基础上，仍以 L^*- 格值上的 Łukasiewicz 蕴涵算子为工具在 L^*- 格值逻辑的语义框架下，对 BCK- 代数的理论在 L^*- 格值谓词演算下给予了重新刻画. 由于 Cantor 集合论只能描述非此即彼的分明概念. Zadeh 模糊集理论描述外延不分明的亦此亦彼的模糊概念. Antanassov 直觉模糊集 [9] 增加了一个新的属性参数 – 非隶属度函数，进而可以描述非此非彼的模糊概念，更细腻地刻画了客观世界的模糊性本质，因此本研究不仅克服 Xi

四川省科技厅科技重点项目 (2006J13-035) 和四川省教育厅重点实验室专项 (2006ZD050) 资助.
收稿日期：2009-01-19, 收到修改稿日期：2010-01-14.

O G 讨论的模糊 BCK- 代数的缺陷，而且是对该模糊 BCK- 代数理论的一种扩充和发展．我们还从一个完全不同的方向建立起称之为直觉不分明 BCK- 代数而与先前模糊 BCK- 代数不同的理论，进而从又一个新侧面回答了 Rosser 等人提出的问题．本文建立了直觉不分明 BCK- 代数、直觉不分明化理想、直觉不分明化正定蕴涵理想、直觉不分明化蕴涵理想等概念和基本关系，不但为进一步研究直觉不分明 BCK- 代数理论奠定基础，而且使多值逻辑谓词演算理论得到了进一步的推广．

为了讨论方便，我们引用一些概念和结论如下．

定义 1.1[9] 设 X 是一个非空集合， X 上的一个直觉模糊集 A 定义为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\},$$

其中函数 $\mu_A:X\to I$, $\nu_A:X\to I$ 分别表示每个 $x\in X, x$ 隶属于 A 的程度 (记为 $\mu_A(x)$) 和 x 非隶属于 A 的程度 (记为 $\nu_A(x)$), 并且对每个 $x\in X$, 有 $0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$.

注 (1) X 的一个直觉模糊集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\}$ 可以定义为 $I^X\times I^X$ 中的一个有序对 $\langle\mu_A,\nu_A\rangle$, 或者是 $(I\times I)^X$ 中的一个元素．为了简化起见，我们将用符号 $A=\langle x,\mu_A,\nu_A\rangle$ 来表示直觉模糊集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\}$. 即

$$A:X\to I^2,\quad A(x)=(\mu_A(x),\nu_A(x))(0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1);$$

(2) 非空集合 X 内的每一个模糊集 A 都是一个直觉模糊集，因为 A 可以表示为

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle : x\in X\}.$$

定义 1.2[9] 设 $X\ne\emptyset$, $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\}$, $B=\{\langle x,\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle : x\in X\}$ 为 X 上的直觉模糊集，则

(1) $A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle : x\in X\}$;

(2) $A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle : x\in X\}$;

(3) $A^c=\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle : x\in X\}$;

(4) $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in X,\mu_A(x)\le\mu_B(x)$ 且 $\nu_A(x)\ge\nu_B(x)$.

若 $A_\lambda:\lambda\in\Lambda$ 是一簇直觉模糊集，则

(5) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{\langle x,\wedge_{\lambda\in\Lambda}\mu_{A_\lambda}(x),\vee_{\lambda\in\Lambda}\nu_{A_\lambda}(x)\rangle : x\in X\}$;

(6) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{\langle x,\vee_{\lambda\in\Lambda}\mu_{A_\lambda}(x),\wedge_{\lambda\in\Lambda}\nu_{A_\lambda}(x)\rangle : x\in X\}$.

若 $f:X\to Y$ 是非空集合 X 到 Y 的映射， $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\}$, $B=\{\langle y,\mu_B(y),\nu_B(y)\rangle : y\in Y\}$ 分别为 X,Y 中的直觉模糊集，则

$$f^{-1}(B)=\{\langle x,f^{-1}(\mu_B)(x),f^{-1}(\nu_B)(x)\rangle : x\in X\},\quad f(A)=\{\langle y,f(\mu_A)(x),f(\nu_A)(x)\rangle : x\in X\},$$

其中 $f(\mu_A)(y)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A(x), & f^{-1}(y)\ne\emptyset,\\ 0, & f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases}$ 且

$$(1-f(1-\nu_A))(y)=\begin{cases}\inf\limits_{x\in f^{-1}(y)}\nu_A(x), & f^{-1}(y)\ne\emptyset,\\ 0, & f^{-1}(y)=\emptyset.\end{cases}$$

若 X 是线性空间，$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle : x\in X\}$, $B=\{\langle x,\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle : x\in X\}$ 为 X 中的两个直觉模糊集，则 $\forall x\in X$,

$$(A+B)(x)=\Big(\sup_{x_1+x_2}\min(\mu_A(x_1),\mu_B(x_2)),\inf_{x_1+x_2}\max(\nu_A(x_1),\nu_B(x_2))\Big).$$

定义 1.3[10,11] 设 $L^*=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2 : x_1+x_2\le 1\}$, 如果 $(x_1,x_2)\le_{L^*}(y_1,y_2)\Leftrightarrow x_1\le y_1$ 且 $x_2\ge y_2$, 则称 $(L^*,\le_{L^*})$ 为 L^*- 格.

格 $(L^*,\le_{L^*})$ 中的最小元是 $0_{L^*}=(0,1)$, 最大元是 $1_{L^*}=(1,1)$. $D=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2 : x_1+x_2=1\}$ 是 $L*$ 的一个特殊的子集，称为对角线. 格 $(L^*,\le_{L^*})$ 是一个完备格：对 $A\subseteq L^*$, 有

$$\sup A=(\sup\{x\in[0,1]\mid(\exists y\in[0,1])((x,y)\in A)\},\inf\{y\in[0,1]\mid(\exists x\in[0,1])((x,y)\in A)\}$$

且

$$\inf A=(\inf\{x\in[0,1]\mid(\exists y\in[0,1])((x,y)\in A)\},\sup\{y\in[0,1]\mid(\exists x\in[0,1])((x,y)\in A)\}.$$

众所周知，每个格 $(L,\le)$ 都与一个代数结构 $(L,\vee,\wedge)$ 等价，其中对 $\forall a,b\in L$, $a\le b\Leftrightarrow a\vee b=b\Leftrightarrow a\wedge b=a$. 以下提到的 $x,y,z\in L^*$ 都表示 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2),z=(z_1,z_2)$. L^*- 格值上的 Łukasiewicz 蕴涵算子 [8] 定义为 $\forall x,y\in L^*$,

$$IR(x,y)=(\min(1,y_1+1-x_1,x_2+1-y_2),\max(0,y_2+x_1-1)).$$

Łukasiewicz 蕴涵算子 IR 满足如下性质

(A.1) $(\forall y\in L^*)(IR(\cdot,y)$ 在 L^* 上是单调减的) 且 $(\forall x\in L^*)(IR(x,\cdot)$ 在 L^* 上是单调增的);

(A.2) $(\forall x\in L^*)(IR(1_{L^*},x)=x)$;

(A.3) $(\forall(x,y)\in(L^*)^2)(IR(x,y)=IR(IR(y,0_{L^*}),IR(x,0_{L^*})))$;

(A.4) $(\forall(x,y,z)\in(L^*)^3)(IR(x,IR(y,z))=IR(y,IR(x,z)))$;

(A.5) $(\forall(x,y)\in(L^*)^2)(x\le_{L^*}y\Leftrightarrow IR(x,y)=1_{L^*})$.

设 α 是论域 X 下的一个谓词，我们用记号 $[\alpha]$ 表示 α 的 L^*- 格值，$[\cdot]$ 是一个同态映射. 我们有如下一些的赋值公式：记 $[\alpha]=(x_1,x_2),[\beta]=(y_1,y_2)\in L^*$, 则

1) $[\neg\alpha]=(x_2,x_1)$;

2) $[\alpha\wedge\beta]=[\alpha]\wedge[\beta]=(\min(x_1,y_1),\max(x_2,y_2))$;

3) $[\alpha\to\beta]=[\alpha]\propto[\beta]=IR([\alpha],[\beta])$;

4) $[(\forall x)(\alpha(x))]=\inf\limits_{x\in X}[\alpha(x)],[x\in A]=A(x)$.

相应的导出公式有

5) $[\alpha\vee\beta]=[\alpha]\vee[\beta]=(\max(x_1,y_1),\min(x_2,y_2))$;

6) $[(\exists x)(\alpha(x))]=\sup\limits_{x\in X}[\alpha(x)]$;

7) $\alpha\leftrightarrow\beta=(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$, 即 $[\alpha\leftrightarrow\beta]=IR([\alpha],[\beta])\wedge IR([\beta],[\alpha])$;

8) $\alpha\asymp\beta:=\neg(\alpha\to\neg\beta)$, 即 $[\alpha\asymp\beta]=[\alpha]\otimes[\beta]$, 其中 $\otimes$ 为 Łukasiewicz 蕴涵算子的伴随：$x\otimes y=(\max(0,x_1+y_1-1),\min(1,x_2+1-y_1,y_2+1-x_1))$.

若 A,B 是论域 X 的两个直觉模糊集，则

$$A\subseteq B:=(\forall x)(x\in A\to x\in B),\quad A\equiv B:=(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A).$$

命题 1 $[x \leftrightarrow y] = (\min(1, 1-|x_1-y_1|, 1-|x_2-y_2|), \max(0, y_2+x_1-1, x_2+y_1-1))$.

证

$$\begin{aligned}
&IR(x,y) \wedge IR(y,x)\\
&\quad= (\min(1, 1+y_1-x_1, 1+x_2-y_2), \max(0, y_2+x_1-1))\\
&\quad\wedge (\min(1, 1+x_1-y_1, 1+y_2-x_2), \max(0, x_2+y_1-1))\\
&\quad= (\min(1, 1+y_1-x_1, 1+x_2-y_2, 1+x_1-y_1, 1+y_2-x_2),\\
&\qquad \max(0, y_2+x_1-1, x_2+y_1-1))\\
&\quad= (\min(1, 1-|x_1-y_1|, 1-|x_1-y_2|), \max(0, y_2+x_1-1, x_2+y_1-1)).
\end{aligned}$$

命题 2 $(x \to y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$.

证

$$\begin{aligned}
&(x \to y) \wedge (x \to z)\\
&\quad= (\min(1, 1+y_1-x_1, 1+x_2-y_2), \max(0, y_2+x_1-1))\\
&\quad\wedge (\min(1, 1+z_1-x_1, 1+x_2-z_2), \max(0, z_2+x_1-1))\\
&\quad= (\min(1, 1+y_1-x_1, 1+z_1-x_1, 1+x_2-y_2, 1+x_2-z_2),\\
&\qquad \max(0, y_2+x_1-1, z_2+x_1-1))\\
&\quad= (\min(1, \min(y_1,z_1)+1-x_1, x_2+1-\max(y_2,z_2)),\\
&\qquad \max(0, \max(y_2,z_2)+x_1-1))\\
&\quad= IR((x_1,x_2),(\min(y_1,z_1),\max(y_2,z_2)))\\
&\quad= (x \to y \wedge z).
\end{aligned}$$

类似可得命题 3 和命题 4 如下

命题 3 $(x \to (y \to z)) = (x \asymp y) \to z$, $x \otimes y \le_{L^*} z \Leftrightarrow x \le_{L^*} y \to z$.

推论 $(x \to y) \asymp x \le_{L^*} y$.

证

$$\begin{aligned}
&(\min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2), \max(0, y_2+x_1-1)) \otimes (x_1,x_2)\\
&= (\max(0, \min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2)+x_1-1),\\
&\quad \min(1, \max(0, y_2+x_1-1)+1-x_1, x_2+1-\min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2))).
\end{aligned}$$

而 $y_1+1-x_1+x_1-1 = y_1 \le 1-y_2$, $x_2+1-y_2+x_1-1 \le 1-y_2$, 故 $\max(0, \min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2)+x_1-1) \le y_1$. 又 $y_2+x_1-1+1-x_1 = y_2 \le 1-y_1$, $x_2+1-y_1-1+x_1 \le 1-y_1$, $x_2+1-x_2-1+y_2 = y_2$, 故 $\min(1, \max(0, y_2+x_1-1)+1-x_1, x_2+1-\min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2)) \ge y_2$, 从而 $(\min(1, y_1+1-x_1, x_2+1-y_2), \max(0, y_2+x_1-1)) \otimes (x_1,x_2) \le_{L^*} (y_1,y_2)$.

命题 4 若 $x \le_{L^*} y$, 则 $[y \to z] \le_{L^*} [x \to z]$ 且 $[x \otimes z] \le_{L^*} [y \otimes z]$.

我们也用记号 $\models \alpha$ 表示对于任意赋值，总成立 $[\alpha] = 1_{L^*}$.

定义 1.4[1] 称一个 $(2,0)$ 型代数 $(X; *, 0)$ 为 BCK- 代数，如果它满足 $\forall x,y,z \in X$, 有

(1) $((x*y)*(x*z))*(z*y) = 0$;

(2) $(x*(x*y))*y = 0$;

(3) $x*x = 0$, $0*x = 0$;

(4) $x*y = 0 = y*x \Rightarrow x = y$.

在 BCK- 代数 X 中，可以如下定义偏序 $\le$: $x \le y \Leftrightarrow x*y = 0$. 任何 BCK- 代数 X 都满足下述等式

(6) $x*0=x,\ x\le y\wedge y\le z\Rightarrow x\le z$;
(7) $x\le y\Rightarrow x*z\le y*z\wedge z*y\le z*x$;
(8) $(x*y)*z=(x*z)*y,\ x*(x*x*y))=x*y$;
(9) $x*y\le z\Rightarrow x*z\le y,\ (x*z)*(y*z)\le x*y$.

设 X 是 BCK- 代数，若 $\forall x,y\in X$, 有 $x*(y*y)=(x*y)*y$, 则称 X 是拟右交错 BCK- 代数 [12]; 若 $\forall x,y,z\in X$, 有 $(x*z)*(y*z)=(x*y)*z$, 则称 X 是正定蕴涵 BCK- 代数 [12]; 若 $\forall x,y\in X$, 有 $x=x*(y*x)$, 则称 X 是蕴涵 BCK- 代数 [13].

设 X,Y 都是 BCK- 代数，映射 $f:X\to Y$ 称为是同态的，若 $\forall x,y\in X$, 有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$.

2 BCK- 代数中的直觉不分明化理想

定义 2.1 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集．一元直觉模糊谓词 $sa\in\mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ 称为直觉不分明化子代数，定义为

$$A\in sa:=(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge(y\in A)\to x*y\in A).$$

即

$$\begin{aligned}sa(A)&=(\mu_{sa}(A),\nu_{sa}(A))\\&=\inf_{x,y\in X}IR(A(x)\wedge A(y),A(x*y))\\&=\inf_{x,y\in X}IR((\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),\nu_A(x)\vee\nu_A(y)),(\mu_A(x*y),\nu_A(x*y)))\\&=\big(\inf_{x,y\in X}\min(1,1+\mu_A(x*y)-\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),1+\nu_A(x)\vee\nu_A(y)-\nu_A(x*y)),\\&\qquad\sup_{x,y\in X}\max(0,\nu_A(x*y)+\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)-1)\big).\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\mu_{sa}(A)&=\inf_{x,y\in X}\min(1,1+\mu_A(x*y)-\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),1+\nu_A(x)\vee\nu_A(y)-\nu_A(x*y)),\\\nu_{sa}(A)&=\sup_{x,y\in X}\max(0,\nu_A(x*y)+\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)-1).\end{aligned}$$

定理 2.1 对 BCK- 代数 X 中的任意直觉模糊集 A, 有 $\models A\in sa\to(\forall x)(x\in A\to 0\in A)$.

证

$$\begin{aligned}sa(A)&=(\mu_{sa}(A),\nu_{sa}(A))\\&=\big(\inf_{x,y\in X}\min(1,1+\mu_A(x*y)-\mu_A(x)\wedge\mu_A(y),1+\nu_A(x)\vee\nu_A(y)-\nu_A(x*y)),\\&\qquad\sup_{x,y\in X}\max(0,\nu_A(x*y)+\mu_A(x)\wedge\mu_A(y)-1)\big)\\&\le\big(\inf_{x\in X}\min(1,1+\mu_A(x*x)-\mu_A(x)\wedge\mu_A(x),1+\nu_A(x)\vee\nu_A(x)-\nu_A(x*x)),\\&\qquad\sup_{x\in X}\max(0,\nu_A(x*x)+\mu_A(x)\wedge\mu_A(x)-1)\big)\\&=\big(\inf_{x\in X}\min(1,1+\mu_A(0)-\mu_A(x),1+\nu_A(x)-\nu_A(0)),\\&\qquad\sup_{x\in X}\max(0,\nu_A(0)+\mu_A(x)-1)\big)\\&=[(\forall x)(x\in A\to 0\in A)].\end{aligned}$$

定理 2.2 对 BCK- 代数 X 中的任意直觉模糊集 A, 有

1) $\models A\in sa\rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow\underbrace{(x*(\cdots(x*x)}_{2k}\cdots))\in A), k=1,2,\cdots;$

2) $\models A\in sa\leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow\underbrace{(x*(\cdots(x*x)}_{2k+1}\cdots))\in A), k=0,1,2,\cdots;$

3) $\models A\in sa\leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow((\cdots(\underbrace{(x*x)*x)\cdots)*x}_{n}\in A), n=1,2,\cdots.$

证 因为在 BCK- 代数中, $x*x=0$ 且 $x*0=x$, 于是 $\forall x\in X$, 有

$$\begin{aligned}
&\min(1,\mu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k}\cdots))+1-\mu_A(x),\nu_A(x)+1-\nu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k}\cdots)))\\
=&\min(1,\mu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k-2}\cdots))+1-\mu_A(x),\nu_A(x)+1-\nu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k-2}\cdots)))\\
=&\cdots\\
=&\min(1,\mu_A(x*x)+1-\mu_A(x),\nu_A(x)+1-\nu_A(x*x))\\
=&\min(1,\mu_A(0)+1-\mu_A(x),\nu_A(x)+1-\nu_A(0)),
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
&\max(0,\nu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k}\cdots))+\mu_A(x)-1)\\
=&\max(0,\nu_A(\underbrace{x*(\cdots(x*(x*x))}_{2k-2}\cdots))+\mu_A(x)-1)\\
=&\cdots\\
=&\max(0,\nu_A(0)+\mu_A(x)-1).
\end{aligned}$$

由定理 2.1 知 1) 式子得证. 用 $x*x=0$, $x*0=x$ 可类似地证明 2) 与 3) 式.

从定理 2.2 的证明过程可得如下结论

推论 2.3 对 BCK- 代数 X 中的任意直觉模糊集 A, 有

1) $\models(\forall x)(x\in A\rightarrow 0\in A)\leftrightarrow\underbrace{(x*(\cdots(x*x)}_{2k}\cdots))\in A), k=1,2,\cdots;$

2) $\models(\forall x)(x\in A\rightarrow 0\in A)\leftrightarrow((\cdots\underbrace{((x*x)*x)\cdots)*x)}_{n}\in A), n=1,2,\cdots.$

定理 2.4 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 BCK- 代数 X 中的任意 n 个元素，若在这 n 个元中至少有一个元 x_k 等于 x_1, 则对于 X 中的任意直觉模糊集 A, 有

$$\models A\in sa\rightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow((\cdots\underbrace{((x_1*x_2)*x_3)\cdots)*x_n)}\in A).$$

证 对任意 $\forall x,y,z\in X$, 有 $(x*y)*z=(x*z)*y$. 因此，我们可以把 x_k 交换到 x_2 的位置，再注意到 $x_1*x_1=0$, $0*x_i=0$, 有

$$\begin{aligned}
&\min(1,\mu_A((\cdots((x_1*x_2)*x_3)\cdots)*x_n)+1-\mu_A(x),\\
&\quad\nu_A(x)+1-\nu_A((\cdots((x_1*x_2)*x_3)\cdots)*x_n))\\
=&\min(1,\mu_A((\cdots((x_1*x_1)*x_3)\cdots)*x_n)+1-\mu_A(x),\\
&\quad\nu_A(x)+1-\nu_A((\cdots((x_1*x_1)*x_3)\cdots)*x_n))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots \\
&= \min(1, \mu_A(0) + 1 - \mu_A(x), \nu_A(x) + 1 - \nu_A(0)),
\end{aligned}
$$

并且有

$$
\begin{aligned}
&\max(0, \nu_A((\cdots((x_1 * x_2) * x_3)\cdots) * x_n) + \mu_A(x) - 1)) \\
&= \max(0, \nu_A((\cdots((x_1 * x_1) * x_3)\cdots) * x_n) + \mu_A(x) - 1)) \\
&= \cdots \\
&= \max(0, \nu_A(0) + \mu_A(x) - 1).
\end{aligned}
$$

由定理 2.1 知结论成立.

定义 2.2 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集. 令

$$A \in LI := (\forall x)(\forall y)(y \in A \to x * y \in A)(A \in RI := (\forall x)(\forall y)(x \in A \to x * y \in A)),$$

则称一元直觉模糊谓词 $LI(RI) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ 为直觉不分明化左 (右) 可约理想.

定理 2.5 设 A 是 BCK- 代数 X 中的任意直觉模糊集，则

$$\models A \in LI \to (\forall x)(x \in A \leftrightarrow 0 \in A).$$

证

$$
\begin{aligned}
LI &= \inf_{x,y\in X} IR(A(y), A(x*y)) \\
&= \inf_{x,y\in X} IR((\mu_A(y), \nu_A(y)), (\mu_A(x*y), \nu_A(x*y))) \\
&= \Big(\inf_{x,y\in X} \min(1, \mu_A(x*y) + 1 - \mu_A(y), \nu_A(y) + 1 - \nu_A(x*y)), \\
&\qquad \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A(y) - 1)\Big) \\
&\le \Big(\inf_{x\in X} \min(1, \mu_A(x*0) + 1 - \mu_A(0), \nu_A(0) + 1 - \nu_A(x*0)), \\
&\qquad \sup_{x\in X} \max(0, \nu_A(x*0) + \mu_A(0) - 1)\Big) \\
&= \Big(\inf_{x\in X} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(0), \nu_A(0) + 1 - \nu_A(x)), \\
&\qquad \sup_{x\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(0) - 1)\Big) \\
&= [(\forall x)(0 \in A \to x \in A)].
\end{aligned}
$$

另一方面有

$$
\begin{aligned}
LI(A) &\le \Big(\inf_{x\in X} \min(1, \mu_A(x*x) + 1 - \mu_A(x), \nu_A(x) + 1 - \nu_A(x*x)), \\
&\qquad \sup_{x\in X} \max(0, \nu_A(x*x) + \mu_A(x) - 1)\Big) \\
&= \Big(\inf_{x\in X} \min(1, \mu_A(0) + 1 - \mu_A(x), \nu_A(x) + 1 - \nu_A(0)), \\
&\qquad \sup_{x\in X} \max(0, \nu_A(0) + \mu_A(0) - 1)\Big) \\
&= [(\forall x)(x \in A \to 0 \in A)],
\end{aligned}
$$

故 $\models A \in LI \to (\forall x)(x \in A \to 0 \in A) \wedge (\forall x)(0 \in A \to x \in A)$, 即结论成立.

类似地有

定理 2.6 设 A 是 BCK- 代数 X 中的任意直觉模糊集，则

$$\models A \in RI \to (\forall x)(x \in A \to 0 \in A).$$

定义 2.3 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集. 令

$$A \in I_1 := (\forall x)(x \in A \to 0 \in A),\ A \in I_2 := (\forall x)(\forall y)((x * y \in A) \wedge (y \in A) \to (x \in A)).$$

称一元直觉模糊谓词 $I \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ 为直觉不分明化理想，如果 $A \in I := (A \in I_1) \wedge (A \in I_2)$.

定理 2.7 若 A 是 BCK- 代数 X 中的直觉模糊集，则

$$\models (\forall x)(\forall y)(\forall z)((((x * y) * y) * z \in A) \wedge (z \in A) \to (x * y \in A)) \to A \in I_2.$$

证

$$\begin{aligned}
&[(\forall x)(\forall y)(\forall z)((((x * y) * y) * z \in A) \wedge (z \in A) \to (x * y \in A))]\\
&= (\inf_{x,y,z \in X} \min(1, \mu_A(x*y) + 1 - \mu_A(((x*y)*y)*z) \wedge \mu_A(z), \nu_A(((x*y)*y)*z) \vee \nu_A(z)\\
&\quad + 1 - \nu_A(x*y)), \sup_{x,y,z \in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A(((x*y)*y)*z) \wedge \mu_A(z) - 1))\\
&\le (\inf_{x,z \in X} \min(1, \mu_A(x*0) + 1 - \mu_A(((x*0)*0)*z) \wedge \mu_A(z), \nu_A(((x*0)*0)*z) \vee \nu_A(z)\\
&\quad + 1 - \nu_A(x*0)), \sup_{x,z \in X} \max(0, \nu_A(x*0) + \mu_A(((x*0)*0)*z) \wedge \mu_A(z) - 1))\\
&= (\inf_{x,z \in X} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(x*z) \wedge \mu_A(z), \nu_A(x*z) \vee \nu_A(z) + 1 - \nu_A(x),\\
&\quad \sup_{x,z \in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(((x*z) \wedge \mu_A(z) - 1))\\
&= [A \in I_2].
\end{aligned}$$

例 设 $X = \{0, a, b, c\}$, 则 X 按如下表定义的二元运算 $*$ 成为一个 BCK- 代数

$*$	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	0	c	c
b	b	0	0	b
c	c	0	0	0

定义 $\mu_A : X \to [0,1]$ 如下： $\mu_A(0) = 1, \mu_A(a) = \mu_A(b) = \mu_A(c) = 0.4$; 再定义 $\nu_A : X \to [0,1]$ 如下：$\nu_A(0) = 0, \nu_A(a) = \nu_A(b) = \nu_A(c) = 0.35$. 则可以验证直觉模糊集 $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}$ 既是 X 的一个直觉不分明化理想，又是 X 的一个直觉不分明化子代数.

定理 2.8 设 A 是 BCK- 代数 X 中的直觉模糊集，若 $[A \in I_1] = 1_{L^*}$, 则

1) $\models A \in I \to (\forall x)(\forall y)(x \le y \to (y \in A \to x \in A))$;

2) $\models A \in I \to ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x * y \in A \to (x * z) * (y * z) \in A))$;

3) $\models A \in I \to ((\forall x)(\forall y)(\forall z)((x * y) * z \in A \to ((x * z) * (y * z)) * z \in A))$.

证 因为 $[A \in I_1] = 1_{L^*}$, 所以

$$\mu_{I_1}(A) = \inf_{x \in X} \min(1, 1 + \mu_A(0) - \mu_A(x), 1 + \nu_A(x) - \nu_A(0)) = 1,$$
$$\nu_{I_1}(A) = \sup_{x \in X} \max(0, \nu_A(0) + \mu_A(x) - 1) = 0,$$

故对任意 $x \in X, \mu_A(0) \geq \mu_A(x), \nu_A(0) \leq \nu_A(x)$. 注意到 $x \leq y$ 有 $x * y = 0$. 记 $[A \in I_2] = (\mu_{I_2}(A), \nu_{I_2}(A))$, 则

$$\begin{aligned}\mu_{I_2}(A) &= \inf_{x,y \in X} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y), \nu_A(x*y) \vee \nu_A(y) + 1 - \nu_A(x)) \\ &\leq \inf_{x,y \in X, x \leq y} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y), \nu_A(x*y) \vee \nu_A(y) + 1 - \nu_A(x)) \\ &= \inf_{x,y \in X, x \leq y} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(0) \wedge \mu_A(y), \nu_A(0) \vee \nu_A(y) + 1 - \nu_A(x)) \\ &= \inf_{x,y \in X, x \leq y} \min(1, \mu_A(x) + 1 - \mu_A(y), \nu_A(y) + 1 - \nu_A(x)),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\nu_{I_2}(A) &= \sup_{x,y \in X} \max(0, nu_A(x) + \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y) - 1) \\ &\geq \sup_{x,y \in X, x \leq y} \max(0, nu_A(x) + \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y) - 1) \\ &= \sup_{x,y \in X, x \leq y} \max(0, nu_A(x) + \mu_A(0) \wedge \mu_A(y) - 1) \\ &= \sup_{x,y \in X, x \leq y} \max(0, nu_A(x) + \mu_A(y) - 1),\end{aligned}$$

故

$$[A \in I] \leq [A \in I_2] \leq [(\forall x)(\forall y)(x \leq y \to (y \in A \to x \in A))].$$

由 (7) 和 (9) 知

$$(x*z)*(y*z) \leq x*y, \ ((x*z)*(y*z))*z \leq (x*y)*z,$$

注意到

$$((x*(y*z))*z)*z = ((x*z)*(y*z))*z,$$

可得

$$\begin{aligned}&[(\forall x)(\forall y)(x \leq y \to (y \in A \to x \in A))] \\ &= [(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x*y \in A \to (x*z)*(y*z) \in A)] \\ &= [(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x*y)*z \in A \to ((x*z)*(y*z))*z \in A)].\end{aligned}$$

定理 2.9 若 A 是 BCK- 代数 X 中的直觉模糊集, 则

$$\models (\forall x)(\forall y)(\forall z)(z*y \leq x \to ((x \in A) \wedge (y \in A) \to z \in A)) \to A \in I.$$

证 对任意 $x, y, z \in X$ 且 $z*y \leq x$, 有 $(z*y)*x = 0$, 注意到 $(0*x)*x = 0$, 于是

$$\begin{aligned}&\inf_{x,y,z \in X} IR(A(x) \wedge A(y), A(z)) \\ &= \big(\inf_{x,y,z \in X} \min(1, \mu_A(z) + 1 - \mu_A(x) \wedge \mu_A(y), \nu_A(x) \vee \nu_A(y) + \nu_A(z) - 1), \\ &\quad \sup_{x,y,z \in X} \max(0, \nu_A(z) + \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) - 1)\big) \\ &\leq \big(\inf_{x \in X} \min(1, \mu_A(0) + 1 - \mu_A(x) \wedge \mu_A(x), \nu_A(x) \vee \nu_A(x) + \nu_A(0) - 1), \\ &\quad \sup_{x \in X} \max(0, \nu_A(0) + \mu_A(x) \wedge \mu_A(x) - 1)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \big(\inf_{x\in X}\min(1,\mu_A(0)+1-\mu_A(x),\nu_A(x)+\nu_A(0)-1),\\&\quad \sup_{x\in X}\max(0,\nu_A(0)+\mu_A(x)-1)\big)\\&=[A\in I_1].\end{aligned}$$

注意到 $x*(x*y)\le y$ 有

$$\begin{aligned}&\inf_{x,y,z\in X} IR(A(x)\wedge A(y),A(z))\\&\le \big(\inf_{x,y\in X}\min(1,\mu_A(x)+1-\mu_A(x*y)\wedge\mu_A(y),\nu_A(x*y)\vee\nu_A(y)\\&\quad +\nu_A(x)-1),\ \sup_{x,y\in X}\max(0,\nu_A(x)+\mu_A(x*y)\wedge\mu_A(y)-1)\big)\\&=[A\in I_2].\end{aligned}$$

故

$$[(\forall x)(\forall y)(\forall z)(z*y\le x\to((x\in A)\wedge(y\in A)\to(z\in A)))]\le[A\in I].$$

定理 2.10 设 X 是一个 BCK- 代数， $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是 X 中的一族直觉模糊集，则

$$\models(\forall\lambda)((\lambda\in\Lambda)\to(A_\lambda\in I))\to\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in I\Big).$$

证　按定义 2.3 知

$$\begin{aligned}&\mu_{I_1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\\&=\inf_{x\in X}\min\Big(1,1+\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(0)-\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x),1+\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x)-\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(0)\Big)\\&=\inf_{x\in X}\min\Big(1,1+\inf_{\lambda\in\Lambda}\mu_{A_\lambda}(0)-\inf_{\lambda\in\Lambda}\mu_{A_\lambda}(x),1+\sup_{\lambda\in\Lambda}\nu_{A_\lambda}(x)-\sup_{\lambda\in\Lambda}\nu_{A_\lambda}(0)\Big)\\&\ge\inf_{x\in X}\inf_{\lambda\in\Lambda}\min(1,1+\mu_{A_\lambda}(0)-\mu_{A_\lambda}(x),1+\nu_{A_\lambda}(x)-\nu_{A_\lambda}(0))\\&=\inf_{\lambda\in\Lambda}\mu_{I_1}(A_\lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu_{I_1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\\&=\sup_{x\in X}\max\Big(0,\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(0)+\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x)-1\Big)\\&=\sup_{x\in X}\max\Big(0,\sup_{\lambda\in\Lambda}\nu_{A_\lambda}(0)+\inf_{\lambda\in\Lambda}\mu_{A_\lambda}(x)-1\Big)\\&\le\sup_{x\in X}\sup_{\lambda\in\Lambda}\max(0,\nu_{A_\lambda}(0)+\mu_{A_\lambda}(x)-1)\\&=\sup_{\lambda\in\Lambda}\nu_{I_1}(A_\lambda),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mu_{I_2}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\\&=\inf_{x,y\in X}\min\Big(1,1+\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x)-\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x*y)\wedge\mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x),1\\&\qquad+\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x*y)\vee\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(y)-\nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}(x)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{x,y\in X} \min\Big(1, 1 + \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{A_\lambda}(x) - \min(\inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{A_\lambda}(x*y), \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{A_\lambda}(y)), 1 \\
&\qquad + \max\Big(\sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{A_\lambda}(x*y), \sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{A_\lambda}(y)\Big) - \sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{A_\lambda}(x)\Big) \\
&\geq \inf_{x,y} \inf_{\lambda\in\Lambda} \min(1, 1 + \mu_{A_\lambda}(x) - \min(\mu_{A_\lambda}(x*y), \mu_{A_\lambda}(y)), \\
&\qquad 1 + \max(\nu_{A_\lambda}(x*y), \nu_{A_\lambda}(y)) - \nu_{A_\lambda}(x)) \\
&= \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{I_2}(A_\lambda),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nu_{I_2}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \\
&= \sup_{x,y\in X} \max\Big(0, \nu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}(x) + \mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}(x*y) \wedge \mu_{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}(y) - 1\Big) \\
&= \sup_{x,y\in X} \max\Big(0, \sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{A_\lambda}(x) + \min\Big(\inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{A_\lambda}(x*y), \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{A_\lambda}(y)\Big) - 1\Big) \\
&\leq \sup_{x,y\in X} \sup_{\lambda\in\Lambda} \max(0, \nu_{A_\lambda}(x) + \min(\mu_{A_\lambda}(x*y), \nu_{A_\lambda}(y)) - 1) \\
&= \sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{I_2}(A_\lambda),
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&[(\forall\lambda)((\lambda\in\Lambda) \to (A_\lambda \in I))] \\
&= \Big(\big(\inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{I_1}(A_\lambda) \wedge \inf_{\lambda\in\Lambda} \mu_{I_2}(A_\lambda)\big), \big(\sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{I_1}(A_\lambda) \vee \sup_{\lambda\in\Lambda} \nu_{I_2}(A_\lambda)\big)\Big) \\
&\leq_{L^*} \Big(\Big(\mu_{I_1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \wedge \mu_{I_2}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)\Big), \Big(\nu_{I_1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \vee \nu_{I_2}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)\Big)\Big) \\
&= \Big[\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in I\Big].
\end{aligned}
$$

定理 2.11 设 X, Y 都是一个 BCK- 代数，若 A 是 X 中的直觉模糊集，$f: X \to Y$ 是一个满同态，则

$$\models A \in I \to f(A) \in I.$$

证

$$
\begin{aligned}
I_1(f(A)) &= (\mu_{I_1}(f(A)), \nu_{I_1}(f(A))) \\
&= \inf_{z\in Y} IR(f(A)(z), f(A)(0')) \\
&= \inf_{z\in Y} IR((f(\mu_A)(z), (1 - f(1-\nu_A))(z)), (f(\mu_A)(0'), (1 - f(1-\nu_A))(0'))) \\
&= \inf_{z\in Y} IR\Big(\Big(\sup_{x\in f^{-1}(z)} \mu_A(x), \inf_{x\in f^{-1}(z)} \nu_A(x)\Big), \Big(\sup_{y\in f^{-1}(0')} \mu_A(y), \inf_{y\in f^{-1}(0')} \nu_A(y)\Big)\Big),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\mu_{I_1}(f(A)) &= \inf_{z\in Y} \min\Big(1, 1 + \sup_{y\in f^{-1}(0')} \mu_A(y) - \sup_{x\in f^{-1}(z)} \mu_A(x), 1 \\
&\qquad + \inf_{x\in f^{-1}(z)} \nu_A(x) - \inf_{y\in f^{-1}(0')} \nu_A(y)\Big) \\
&\geq \inf_{z\in Y} \inf_{x\in X} \min(1, 1 + \mu_A(0) - \mu_A(x), 1 + \nu_A(x) - \nu_A(0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{x\in X} \min(1, 1+\mu_A(0)-\mu_A(x), 1+\nu_A(x)-\nu_A(0)) \\
&= \mu_{I_1}(A),
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
\nu_{I_1}(f(A)) &= \sup_{z\in Y} \max\Big(0, \inf_{y\in f^{-1}(0')} \nu_A(y) + \sup_{x\in f^{-1}(z)} \mu_A(x) - 1\Big) \\
&\leq \sup_{x\in X} \max(0, \nu_A(0)+\mu_A(x)-1) = \nu_{I_1}(A).
\end{aligned}
$$

因此 $[A\in I_1] = (\mu_{I_1}(A), \nu_{I_1}(A)) \leq_{L^*} (\mu_{I_1}(f(A)), \nu_{I_1}(f(A))) = [f(A)\in I_1]$. 类似地有

$$[A\in I_2] \leq_{L^*} [f(A)\in I_2].$$

于是

$$[A\in I] = [A\in I_1]\wedge[A\in I_2] \leq_{L^*} [f(A)\in I_1]\wedge[f(A)\in I_2] = [f(A)\in I],$$

故结论成立.

定理 2.12 设 X, Y 都是一个 BCK- 代数，若 B 是 Y 中的直觉模糊集， $f: X\to Y$ 是一个满同态，则

$$\models B\in I \leftrightarrow f^{-1}(B)\in I.$$

证

$$
\begin{aligned}
I_1(f^{-1}(B)) &= (\mu_{I_1}(f^{-1}(B)), \nu_{I_1}(f^{-1}(B))) \\
&= \inf_{x\in X} IR(f^{-1}(B)(x), f^{-1}(B)(0)) \\
&= \inf_{x\in X} IR((f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\nu_B))(x)), (f^{-1}(\mu_B)(0), f^{-1}(\nu_B))(0))) \\
&= \inf_{x\in X} IR((\mu_B(f(x)), \nu_B(f(x))), (\mu_B(f(0)), \nu_B(f(0)))),
\end{aligned}
$$

进而，

$$
\begin{aligned}
\mu_{I_1}(f^{-1}(B)) &= \inf_{x\in X} \min(1, 1+\mu_B(f(0))-\mu_B(f(x)), 1+\nu_B(f(x))-\nu_B(f(0))) \\
&= \inf_{z\in Y} \min(1, 1+\mu_B(0')-\mu_B(z), 1+\nu_B(z)-\nu_B(0')) = \mu_{I_1}(B),
\end{aligned}
$$

并且

$$\nu_{I_1}(f^{-1}(B)) = \sup_{x\in X} \max(0, \nu_B(f(0))+\mu_B(f(x))-1) = \sup_{z\in Y} \max(0, \nu_B(0')+\mu_B(z)-1)\nu_{I_1}(B).$$

类似地， $\mu_{I_2}(f^{-1}(B)) = \mu_{I_2}(B), \nu_{I_2}(f^{-1}(B)) = \nu_{I_2}(B)$. 因此 $[B\in I\leftrightarrow f^{-1}(B)\in I] = 1_{L^*}$, 故结论成立.

定理 2.13 若 A 是拟右交错 BCK- 代数 X 中的直觉模糊集，则

$$\models A\in sa \leftrightarrow A\in I.$$

证　由定理 2.1 得到 $[A\in sa] \leq_{L^*} [A\in I_1]$. $\forall x, y\in X$, 由命题 3 的推论知,

$$
\begin{aligned}
[A\in sa] &\asymp \min(A(x*y), A(x)) \\
&= [(\forall x)(\forall y)((x\in A)\wedge(y\in A)\to x*y\in A)]\otimes\min(A(x*y), A(x)) \\
&= [(\forall x)(\forall y)((x*y\in A)\wedge(y\in A)\to(x*y)*y\in A)] \\
&\quad \otimes\min(A(x*y), A(x)) \leq_{L^*} A((x*y)*y) \\
&= A(x*(y*y)) = A(x*0) = A(x),
\end{aligned}
$$

又由命题 3 得

$$[A \in sa] \leq_{L^*} [(\forall x)(\forall y)((x * y \in A) \wedge (y \in A) \rightarrow x \in A)] = [A \in I_2],$$

因此 $[A \in sa] \leq_{L^*} \min([A \in I_1], [A \in I_2]) = [A \in I]$.

反之， $\forall x, y \in X$, 再由命题 3 有

$$\begin{aligned} &[A \in I] \otimes \min(A(x), A(y)) \\ =\ &[A \in I] \otimes \min(A(x * (y * y)), A(y)) \\ =\ &[A \in I] \otimes \min(A((x * y) * y)), A(y)) \leq_{L^*} [A \in I_2] \\ &\otimes \min(A((x * y) * y)), A(y)) \leq_{L^*} A(x * y), \end{aligned}$$

于是 $[A \in I] \leq_{L^*} [(\forall x)(\forall y)((x \in A) \wedge (y \in A) \rightarrow (x * y \in A))] = [A \in sa]$.

定义 2.4 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，令

$$A \in I_3 := (\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x * y) * z \in A) \wedge (y * z \in A) \rightarrow (x * z) \in A)).$$

称一元直觉模糊谓词 $II \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ 为直觉不分明化正定蕴涵理想，如果

$$A \in II := (A \in I_1) \wedge (A \in I_3).$$

记 $I_3(A) = (\mu_{I_3}(A), \nu_{I_3}(A))$, 则

$$\begin{aligned} \mu_{I_3}(A) = \inf_{x,y,z \in X} &\min(1, 1 + \mu_A(x * z) - \mu_A((x * y) * z) \wedge \mu_A(y * z), 1 \\ &+ \nu_A((x * y) * z) \vee \nu_A(y * z) - \nu_A(x * z)), \\ \nu_{I_3}(A) = \sup_{x,y,z \in X} &\max(0, \nu_A(x * z) + \mu_A((x * y) * z) \wedge \mu_A(y * z) - 1). \end{aligned}$$

定理 2.14 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，则

$$\models A \in II \rightarrow A \in I.$$

证　由 $x * 0 = x$, 可以得到

$$\begin{aligned} \mu_{I_3}(A) \leq &\inf_{x,y \in X} \min(1, 1 + \mu_A(x * 0) - \mu_A((x * y) * 0) \wedge \mu_A(y * 0), 1 \\ &+ \nu_A((x * y) * 0) \vee \nu_A(y * 0) - \nu_A(x * 0)) \\ = &\inf_{x,y \in X} \min(1, 1 + \mu_A(x) - \mu_A(x * y) \wedge \mu_A(y), 1 + \nu_A(x * y) \vee \nu_A(y) - \nu_A(x)) \\ = &\mu_{I_2}(A), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \nu_{I_3}(A) &\geq \sup_{x,y \in X} \max(0, \nu_A(x * 0) + \mu_A((x * y) * 0) \wedge \mu_A(y * 0) - 1) \\ &= \sup_{x,y \in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(x * y) \wedge \mu_A(y) - 1) = \nu_{I_2}(A). \end{aligned}$$

定理 2.15 设 X 是一个正定蕴涵 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，则

$$\models A \in I \rightarrow A \in II.$$

证　$\forall x, y, z \in X$, 由命题 3 知

$$\begin{aligned}&[A \in I_2] \otimes \min(A((x*y)*z), A(y*z))\\ =&[(\forall x)(\forall y)((x*y \in A) \wedge (y \in A) \to (x \in A))] \otimes \min(A((x*y)*z), A(y*z))\\ =&[(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x*z)*(y*z) \in A) \wedge (y*z \in A) \to (x*z \in A))]\\ &\otimes \min(A((x*z)*(y*z)), A(y*z)) \leq_{L^*} A(x*z),\end{aligned}$$

亦即 $[A \in I_2] \leq_{L^*} [\min(A((x*y)*z), A(y*z)) \to A(x*z)]$, 因此

$$[A \in I_2] \leq_{L^*} \inf_{x,y,z\in X}[\min(A((x*y)*z), A(y*z)) \to A(x*z)] = [A \in I_3].$$

定理　2.16　设 X 是一个 BCK- 代数，A 是 X 中的直觉模糊子集. 若 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 则

1) $\models A \in II \to (\forall x)(\forall y)((x*y)*y \in A \to x*y \in A)$;

2) $\models (\forall x)(\forall y)((x*y)*y \in A \to x*y \in A) \to (\forall x)(\forall y)((x*y)*y \in A \to (x*z)*(y*z) \in A)$;

3) $\models A \in II \to (\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x*z)*(y*z))*z \in A \to (x*z)*(y*z) \in A)$.

证　因为 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 则 $[A \in I_1] = 1_{L^*}$. 由定理 2.8 的证明知，对任意 $x \in X, \mu_A(0) \geq \mu_A(x), \nu_A(0) \leq \nu_A(x)$. 注意到 $y*y = 0$ 有

$$\begin{aligned}\mu_{I_3}(A) =& \inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x*z) - \mu_A((x*y)*z) \wedge \mu_A(y*z), 1\\ &+\nu_A((x*y)*z) \vee \nu_A(y*z) - \nu_A(x*z))\\ \leq& \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x*y) - \mu_A((x*y)*y) \wedge \mu_A(y*y), 1\\ &+\nu_A((x*y)*y) \vee \nu_A(y*y) - \nu_A(x*y))\\ =& \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x*y) - \mu_A((x*y)*y) \wedge \mu_A(0), 1\\ &+\nu_A((x*y)*y) \vee \nu_A(0) - \nu_A(x*y))\\ =& \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x*y) - \mu_A((x*y)*y), 1+\nu_A((x*y)*y) - \nu_A(x*y)),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\nu_{I_3}(A) =& \sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A(x*z) + \mu_A((x*y)*z) \wedge \mu_A(y*z) - 1)\\ \leq& \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A((x*y)*y) \wedge \mu_A(y*y) - 1)\\ =& \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A((x*y)*y) - 1).\end{aligned}$$

故 1) 式成立.

因为 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 所以

$$\mu_{I_2}(A) = \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y), 1+\nu_A(x*y) \vee \nu_A(y) - \nu_A(x)) = 1,$$

$$\nu_{I_2}(A) = \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y) - 1) = 0.$$

故对任意 $x, y, z \in X, \mu_A(0) \geq \mu_A(x) \geq \mu_A(x*y) \wedge \mu_A(y)$, $\nu_A(0) \leq \nu_A(x) \leq \nu_A(x*y) \vee \nu_A(y)$. 因为 $((x*z)*(y*z))*z \leq (x*y)*z$, 所以

$$\mu_A(((x*z)*(y*z))*z) \geq \mu_A((x*y)*z),$$

且

$$\nu_A(((x*z)*(y*z))*z) \le \nu_A((x*y)*z).$$

记

$$[(\forall x)(\forall y)((x*y)*z \in A \to x*y \in A] = (\mu(A), \nu(A)),$$

则

$$(\mu(A), \nu(A)) = [(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x*(y*z))*z)*z \in A \to (x*(y*z))*z \in A)],$$

$$\begin{aligned}\mu(A) = &\inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A((x*(y*z))*z) - \mu_A(((x*(y*z))*z)*z), 1 \\ &\qquad + \nu_A(((x*(y*z))*z)*z) - \nu_A((x*(y*z))*z)) \\ \le &\inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A((x*(y*z))*z) - \mu_A(((x*y)*z), 1 \\ &\qquad + \nu_A(((x*y)*z) - \nu_A((x*(y*z))*z)) \\ = &\inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A((x*z)*(y*z)) - \mu_A(((x*y)*z), 1 \\ &\qquad + \nu_A(((x*y)*z) - \nu_A((x*z)*(y*z))).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(A) = &\sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A((x*(y*z))*z) + \mu_A(((x*(y*z))*z)*z) - 1) \\ \ge &\sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A((x*(y*z))*z) + \mu_A((x*y)*z) - 1) \\ = &\sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_((x*z)*(y*z)) + \mu_A((x*y)*z) - 1).\end{aligned}$$

这就证明了 2) 式.

由 $((x*(y*z))*z)*z = ((x*z)*(y*z))*z$ 可得

$$\begin{aligned}&[(\forall x)(\forall y)((x*y)*y \in A \to x*y \in A)] \\ = &[(\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x*z)*(y*z))*z \in A \to (x*z)*(y*z) \in A)],\end{aligned}$$

故 3) 式成立.

定义 2.5 设 X 是一个 BCK- 代数, A 是 X 中的直觉模糊子集, 令

$$A \in I_4 := (\forall x)(\forall y)(\forall z)(((x*(y*x))*z \in A) \wedge (z \in A) \to (x \in A)).$$

称一元直觉模糊谓词 $III \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$ 为直觉不分明化蕴涵理想, 如果

$$A \in III := (A \in I_1) \wedge (A \in I_4).$$

令 $I_4 = (\mu_{I_4}(A), \nu_{I_4}(A))$, 则

$$\begin{aligned}\mu_{I_4}(A) = &\inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*z) \wedge \mu_A(z), 1 \\ &\qquad +\nu_A((x*(y*x))*z) \vee \nu_A(z) - \nu_A(x)),\end{aligned}$$

$$\nu_{I_4}(A) = \sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*z) \wedge \mu_A(z) - 1).$$

定理 2.17 设 X 是一个 BCK- 代数, A 是 X 中的直觉模糊子集, 则

$$\models A \in III \to A \in I.$$

证　由 $x*x=0, x*0=x$ 知

$$\begin{aligned}\mu_{I_4}(A) &\le \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x)-\mu_A((x*(x*x))*z)\wedge\mu_A(z),\\ &\qquad 1+\nu_A((x*(x*x))*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x))\\ &= \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x)-\mu_A(x*z)\wedge\mu_A(z),\\ &\qquad 1+\nu_A(x*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x))\\ &=\mu_{I_2}(A),\\ \nu_{I_4}(A) &\ge \sup_{x,z\in X}\max(0, \nu_A(x)+\mu_A((x*(x*x))*z)\wedge\mu_A(z)-1)\\ &= \sup_{x,z\in X}\max(0, \nu_A(x)+\mu_A(x*z)\wedge\mu_A(z)-1)=\nu_{I_2}(A),\end{aligned}$$

即 $[A\in I_2]=(\mu_{I_2}(A),\nu_{I_2}(A))\ge(\mu_{I_4}(A),\nu_{I_4}(A))=[A\in I_4]$, 从而结论成立.

定理 2.18 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，若 $[A\in I]=1_{L^*}$, 则

$$\models A\in III\to A\in II.$$

证　因为 $[A\in I]=1_{L^*}$, 并注意到 $((x*z)*z)*(y*z)\le(x*z)*y=(x*y)*z$, 有

$$\begin{aligned}&\mu_A(y*z)\wedge\mu_A((x*y)*z)\le\mu_A((x*z)*z),\\ &\nu_A((x*z)*z)\le\nu_A(y*z)\vee\nu_A((x*y)*z).\end{aligned}$$

又 $(x*z)*(x*(x*z))=(x*(x*(x*z)))*z=(x*z)*z$, 所以

$$I_4(A)=[(\forall x)(\forall y)(\forall z)((((x*z)*(x*(x*z)))*y\in A)\wedge(y\in A)\to x*z\in A)].$$

于是

$$\begin{aligned}\mu_{I_4}(A) &= \inf_{x,y,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x*z)-\mu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*y)\wedge\mu_A(y),\\ &\qquad 1+\nu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*y)\vee\nu_A(y)-\nu_A(x*z))\\ &\le \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x*z)-\mu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*0)\wedge\mu_A(0),\\ &\qquad 1+\nu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*0)\vee\nu_A(0)-\nu_A(x*z))\\ &= \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x*z)-\mu_A((x*z)*(x*(x*z))),\\ &\qquad 1+\nu_A((x*z)*(x*(x*z)))-\nu_A(x*z))\\ &= \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x*z)-\mu_A((x*z)*z), 1+\nu_A((x*z)*z)-\nu_A(x*z))\\ &\le \inf_{x,z\in X}\min(1, 1+\mu_A(x*z)-\mu_A((x*y)*z)\wedge\mu_A(y*z),\\ &\qquad 1+\nu_A((x*y)*z)\vee\nu_A(y*z)-\nu_A(x*z))\\ &=\mu_{I_3}(A),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\nu_{I_4}(A) &= \sup_{x,y,z\in X}\max(0, \nu_A(x*z)+\mu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*y)\wedge\mu_A(y)-1)\\ &\ge \sup_{x,z\in X}\max(0, \nu_A(x*z)+\mu_A(((x*z)*(x*(x*z)))*0)\wedge\mu_A(0)-1)\\ &= \sup_{x,z\in X}\max(0, \nu_A(x*z)+\mu_A((x*z)*(x*(x*z)))-1)\end{aligned}$$

$$= \sup_{x,z\in X} \max(0, \nu_A(x*z) + \mu_A((x*z)*z) - 1)$$
$$\geq \sup_{x,z\in X} \max(0, \nu_A(x*z) + \mu_A((x*y)*z) \wedge \mu_A(y*z) - 1) = \nu_{I_3}(A),$$

故

$$[A \in III] = [A \in I_1] \wedge [A \in I_4] \leq [A \in I_1] \wedge [A \in I_3] = [A \in II].$$

定理 2.19 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，若 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 则

1) $\models A \in III \to (\forall x)(\forall y)((x*y)*y \in A \to x*y \in A)$;

2) $\models A \in III \to (\forall x)(\forall y)(y*(y*x) \in A \to x*(x*y) \in A)$.

证 由 $[A \in I] = 1_{L^*}$ 知，对任意 $x \in X, \mu_A(0) \geq \mu_A(x), \nu_A(0) \leq \nu_A(x)$. 注意到

$$(x*y)*(x*(x*y)) = (x*(x*(x*y)))*y = (x*y)*y$$

知

$$\mu_{I_4}(A) \leq \inf_{x,y\in X} \min(1, 1 + \mu_A(x*y) - \mu_A(((x*y)*(x*(x*y)))*0) \wedge \mu_A(0),$$
$$1 + \nu_A(((x*y)*(x*(x*y)))*0) \vee \nu_A(0) - \nu_A(x*y))$$
$$= \inf_{x,y\in X} \min(1, 1 + \mu_A(x*y) - \mu_A((x*y)*y), 1 + \nu_A((x*y)*y) - \nu_A(x*y)),$$
$$\nu_{I_4}(A) \geq \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A(((x*y)*(x*(x*y)))*0) \wedge \mu_A(0) - 1)$$
$$= \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x*y) + \mu_A((x*y)*y) - 1).$$

于是 1) 式得到证明.

由定理 2.8 知 $[A \in I] \leq [(\forall x)(\forall y)(x \leq y \to (y \in A \to x \in A))]$, 从而对任意 $x, y \in X$ 且 $x \leq y$ 有 $\mu_A(x) \geq \mu_A(y), \nu_A(x) \leq \nu_A(y)$. 因为 $x*(x*y) \leq x$, 由 (7) 式得

$$y*(x*(x*y)) \leq y*x,$$
$$(x*(x*y))*(y*(x*(x*y)))$$
$$\leq (x*(x*y))*(y*x)$$
$$= (x*(y*x))*(x*y) \leq y*(y*x),$$

故

$$\mu_A((x*(x*y))*(y*(x*(x*y)))) \geq \mu_A(y*(y*x)),$$
$$\nu_A((x*(x*y))*(y*(x*(x*y))) \leq \nu_A(y*(y*x)),$$

$$\mu_{I_4}(A) \leq \inf_{x,y\in X} \min(1, 1 + \mu_A(x*(x*y)) - \mu_A(((x*(x*y))*(y*(x*(x*y))))*0)$$
$$\wedge \mu_A(0), 1 + \nu_A(((x*(x*y))*(y*(x*(x*y))))*0) \vee \nu_A(0) - \nu_A(x*(x*y)))$$
$$\leq \inf_{x,y\in X} \min(1, 1 + \mu_A(x*(x*y)) - \mu_A(y*(y*x)),$$
$$1 + \nu_A(y*(y*x)) - \nu_A(x*(x*y))),$$
$$\nu_{I_4}(A) \geq \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(y*(y*x))$$
$$+\mu_A(((x*(x*y))*(y*(x*(x*y))))*0) \wedge \mu_A(0) - 1)$$
$$\geq \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(y*(y*x)) + \mu_A(x*(x*y)) - 1).$$

这就证明了 2) 关系式.

定理 2.20 设 X 是一个蕴涵 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，则

$$\models A \in I \leftrightarrow A \in III.$$

证 因为 X 是一个蕴涵 BCK- 代数，所以对任意 $x, y \in X$ 有 $x = x * (y * x)$, 于是

$$\begin{aligned}
\mu_{I_2}(A) &= \inf_{x,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A(x*z)\wedge\mu_A(z), 1+\nu_A(x*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x)) \\
&= \inf_{x,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z), \\
&\qquad 1+\nu_A((x*(y*x))*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x)) \\
&= \inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z), \\
&\qquad 1+\nu_A((x*(y*x))*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x)) \\
&= \mu_{I_4}(A),
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
\nu_{I_2}(A) &= \sup_{x,z\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(x*z)\wedge\mu_A(z) - 1) \\
&= \sup_{x,z\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z) - 1) \\
&= \sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z) - 1) = \nu_{I_4}(A),
\end{aligned}$$

所以 $I_2(A) = I_4(A)$, 故 $[A \in I] = I_1(A)\wedge I_2(A) = I_1(A)\wedge I_4(A) = [A \in III]$.

定理 2.21 设 X 是一个 BCK- 代数， A 是 X 中的直觉模糊子集，若 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 则

$$\models A \in III \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x*(y*x) \in A \to x \in A).$$

证 由 $[A \in I] = 1_{L^*}$ 知，对任意 $x \in X, \mu_A(0) \geq \mu_A(x), \nu_A(0) \leq \nu_A(x)$. 于是

$$\begin{aligned}
\mu_{I_4}(A) &= \inf_{x,y,z\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z), \\
&\qquad 1+\nu_A((x*(y*x))*z)\vee\nu_A(z)-\nu_A(x)) \\
&\leq \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*0)\wedge\mu_A(0), \\
&\qquad 1+\nu_A((x*(y*x))*0)\vee\nu_A(0)-\nu_A(x)) \\
&= \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A(x*(y*x)), \\
&\qquad 1+\nu_A(x*(y*x))-\nu_A(x)),
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
\nu_{I_4}(A) &= \sup_{x,y,z\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*z)\wedge\mu_A(z) - 1) \\
&\geq \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*0)\wedge\mu_A(0) - 1) \\
&= \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(x*(y*x)) - 1),
\end{aligned}$$

故 $III(A) \leq I_4(A) \leq [(\forall x)(\forall y)(x*(y*x) \in A \to x \in A)]$.

反之，由于 $[A \in I] = 1_{L^*}$, 所以

$$\mu_A(x*(y*x)) \geq \mu_A((x*(y*x))*z) \wedge \mu_A(z)$$

且

$$\nu_A(x*(y*x)) \leq \nu_A((x*(y*x))*z) \vee \nu_A(z).$$

记

$$[(\forall x)(\forall y)(x*(y*x) \in A \to x \in A)] = (\mu(A), \nu(A)),$$

对任意 $z \in X$, 则

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A(x*(y*x)),\\ &\qquad\qquad 1+\nu_A(x*(y*x)) - \nu_A(x))\\ &\leq \inf_{x,y\in X} \min(1, 1+\mu_A(x) - \mu_A((x*(y*x))*z) \wedge \mu_A(z),\\ &\qquad\qquad 1+\nu_A((x*(y*x))*z) \vee \nu_A(z) - \nu_A(x)),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A(x*(y*x)) - 1)\\ &\geq \sup_{x,y\in X} \max(0, \nu_A(x) + \mu_A((x*(y*x))*z) \wedge \mu_A(z) - 1),\end{aligned}$$

故

$$\mu(A) \leq \mu_{I_4}(A), \nu(A) \geq \nu_{I_4}(A),$$

即

$$[(\forall x)(\forall y)(x*(y*x) \in A \to x \in A)] \leq I_4(A),$$

从而结论得证.

类似定理 2.10, 定理 2.11 和定理 2.12 的证明分别有如下两个结论.

定理 2.22 设 X 是一个 BCK- 代数， $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 是 X 中的一族直觉模糊集，则

1) $\models (\forall\lambda)((\lambda \in \Lambda) \to (A_\lambda \in II)) \to \Big(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in II\Big)$;

2) $\models (\forall\lambda)((\lambda \in \Lambda) \to (A_\lambda \in III)) \to \Big(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in III\Big)$.

定理 2.23 若 A, B 分别是 BCK- 代数 X, Y 中的直觉模糊集， $f: X \to Y$ 是一个满同态，则

1) $\models A \in II \to f(A) \in II$, $\models A \in III \to f(A) \in III$;

2) $\models B \in II \to f^{-1}(B) \in II$, $\models B \in III \to f^{-1}(B) \in III$.

定义 2.6 设 $A \in \mathcal{F}(X \times X), B \in \mathcal{F}(X)$. 称二元直觉模糊谓词 $R_B \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(X \times X))$ 为 B 上的直觉模糊关系，如果

$$A \in R_B := (\forall x)(\forall y)((x,y) \in A \to (x \in B) \wedge (y \in B)).$$

引理 2.24 设 $A, B \in \mathcal{F}(X)$, 则

$$\models (A \times B) \in R_X \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x,y) \in A \times B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B)).$$

定理 2.25 设 X 是一个 BCK- 代数， A, B 是 X 中的直觉模糊子集，则

1) $\models (A \in sa) \wedge (B \in sa) \to (A \times B \in sa)$;
2) $\models (A \in I) \wedge (B \in I) \to (A \times B \in I)$;
3) $\models (A \in II) \wedge (B \in II) \to (A \times B \in II)$;
4) $\models (A \in III) \wedge (B \in III) \to (A \times B \in III)$.

证 下面仅证明 1) 式，其余类似可证.

$$
\begin{aligned}
&\mu_{sa}(A \times B)\\
=&\inf_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X} \min(1, 1+\mu_{A\times B}((x_1,y_1)*(x_2,y_2)) - \mu_{A\times B}(x_1,y_1)\wedge\mu_{A\times B}(x_2,y_2),\\
&\qquad 1+\nu_{A\times B}(x_1,y_1)\vee\nu_{A\times B}(x_2,y_2)-\nu_{A\times B}((x_1,y_1)*(x_2,y_2)))\\
=&\inf_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X} \min(1, 1+\mu_{A\times B}(x_1*x_2, y_1*y_2) - \mu_A(x_1)\wedge\mu_B(y_1)\wedge\mu_A(x_2)\\
&\wedge\mu_B(y_2), 1+\nu_A(x_1)\vee\nu_B(y_1)\vee\nu_A(x_2)\vee\nu_B(y_2)-\nu_{A\times B}(x_1*x_2, y_1*y_2))\\
=&\inf_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X} \min(1, 1+\mu_A(x_1*x_2)\wedge\mu_B(y_1*y_2) - \mu_A(x_1)\wedge\mu_B(y_1)\wedge\mu_A(x_2)\\
&\wedge\mu_B(y_2), 1+\nu_A(x_1)\vee\nu_B(y_1)\vee\nu_A(x_2)\vee\nu_B(y_2)-\nu_A(x_1*x_2)\vee\nu_B(y_1*y_2))\\
\geq&\min\Big(\inf_{x_1,x_2\in X}\min(1, 1+\mu_A(x_1*x_2)-\mu_A(x_1)\wedge\mu_A(x_2), 1+\nu_A(x_1)\vee\nu_A(x_2)\\
&\qquad -\nu_A(x_1*x_2)), \inf_{y_1,y_2\in X}\min(1, 1+\mu_A(y_1*y_2)-\mu_A(y_1)\\
&\quad\wedge\mu_A(y_2), 1+\nu_A(y_1)\vee\nu_A(y_2)-\nu_A(y_1*y_2))\Big)\\
=&\min(\mu_{sa}(A), \mu_{sa}(B)),
\end{aligned}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
\nu_{sa}(A\times B) =& \sup_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X}\max(0, \nu_{A\times B}((x_1,y_1)*(x_2,y_2))\\
&\qquad +\mu_{A\times B}(x_1,y_1)\wedge\mu_{A\times B}(x_2,y_2)-1)\\
=&\sup_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X}\max(0, \nu_{A\times B}(x_1*x_2, y_1*y_2)\\
&\qquad +\mu_A(x_1)\wedge\nu_B(y_1)\wedge\mu_A(x_2)\wedge\mu_B(y_2)-1)\\
=&\sup_{x_1,x_2,y_1,y_2\in X}\max(0, \nu_A(x_1*x_2)\vee\nu_B(y_1*y_2)\\
&\qquad +\mu_A(x_1)\wedge\nu_B(y_1)\wedge\mu_A(x_2)\wedge\mu_B(y_2)-1)\\
\leq&\max\Big(\sup_{x_1,x_2\in X}\max(0, \nu_A(x_1*x_2)+\mu_A(x_1)\wedge\mu_A(x_2)-1),\\
&\quad \sup_{y_1,y_2\in X}\max(0, \nu_A(y_1*y_2)+\mu_A(y_1)\wedge\mu_A(y_2)-1)\Big)\\
=&\max(\nu_{sa}(A), \nu_{sa}(A)).
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
&[(A\in sa)\wedge(B\in sa)]\\
=&(\mu_{sa}(A), \nu_{sa}(A))\wedge(\mu_{sa}(B), \nu_{sa}(B))\\
=&(\mu_{sa}(A)\wedge\mu_{sa}(B), \nu_{sa}(A)\vee\nu_{sa}(B)) \leq_{L^*} (\mu_{sa}(A\times B), \nu_{sa}(A\times B))\\
=&[A\times B\in sa].
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] Imai Y, Iseki K. On axiom systems of propositional calculi XIV. *Proc. Japan Acadwmy*, 1966, **41**: 19–22.
[2] Xi O G. Fuzzy BCK-algebras. *Math. Japanica*, 1991, **36**: 935–942.
[3] Rosser J B, Turqutte A R. Many-Valued Logics. North Holland, Amsterdam, New York, 1952.
[4] Ying M S. A new approach for fuzzy topology (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 1991, **39**: 302–321.
[5] Ying M S. A new approach for fuzzy topology (II). *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **47**: 221–232.
[6] Ying M S. A new approach for fuzzy topology (III). *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **55**: 193–207.
[7] Shen J H. Fuzzifying groups based on complete residuated lattice-valued logic. *Information Sciences*, 1993, **75**: 165–186.
[8] Zhang G J, Zou K Q, Zhang C. Fuzzifying topological linear spaces based on continuous-valued logic. 数学研究与评论， 2006, **26**(1): 77–88.
[9] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets. Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.
[10] Cornelis C, Deschrijver G, Kerre E. Implicationin intuitionistic fuzzy and inteval-valued fuzzy set theory: Construction, classification, application. *International of Approximate Reasoning*, 2004, **35**: 55–95.
[11] Pavelka J. On fuzzy logic II. *Z. Math. logic Grundlagen Math.*, 1979, **25**: 119–134.
[12] Iseki K, Tanaka S. Ideal theory of BCK-algebra. *Math. Japanica*, 1976, **21**(2): 361–366.
[13] Iseki K, Tanaka S. An introduction to the theory of BCK-algebras. *Math. Japanica*, 1978, **23**: 1–26.

ON INTUITIONAL FUZZYIFYING IDEALS IN BCK-ALGEBRA BASED ON L^*-LATTICE VALUED LODIC

PENG Jiayin

(*Key Laboratory of Numerical Simulation of Sichuan Province, College of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang* 641112)

Abstract Under the semantic frame of L^*-lattice valued logic, we define the concept of intuitional fuzzifying BCK-algebra on L^*-lattice valued logic by using Łukasiewicz implication operator as tool. In BCK-algebra, the concepts of ideals, positive implicative ideals and implicative ideals have ever been depicted by classical set theory, but now, they are redefined by a unary predicate calculus on L^*-lattice valued logic, and their properties and relations among them are discussed.

Key words L^*-lattice valued logic, Łukasiewicz implication operator, intuitional fuzzifying BCK-algebra, intuitional fuzzifying ideal, intuitional fuzzifying positive implicative ideal, intuitional fuzzifying implicative ideal.