系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
30(4) (2010, 4), 486–492

拟 φ- 渐近非扩展映像族的公共不动点的迭代算法*

高 兴 慧
(延安大学数学与计算机科学学院，延安 716000)

周 海 云
(军械工程学院基础部，石家庄 050003)

摘要 在自反的严格凸的光滑 Banach 空间中给出了一种关于拟 φ- 渐近非扩展映像族公共不动点的新混杂算法，并利用广义投影算子和 K-K 性质等技巧证明了算法的强收敛性. 所得结果是近期相关结果的改进与推广.

关键词 拟 φ- 渐近非扩展映像，混杂算法，广义投影算子， K-K 性质，强收敛定理.

MR(2000) 主题分类号 47H05, 47H10, 47H17

1 引 言

众所周知，在无限维 Hilbert 空间中，一般地，即使对于非扩张映像来说， Mann 迭代格式也仅有弱收敛定理，为了得到强收敛定理，须改进 Mann 迭代格式. 为此， 1968 年 Haugazeau[1] 提出了混杂投影迭代算法，接下来这种方法得到迅速发展，详见文献 [2–6] 等.

2007 年， Qin 和 Su[2] 在实的一致光滑且一致凸 Banach 空间中研究了一种相对非扩展映像不动点的混杂算法. 最近，管维荣和周海云教授在文献 [3] 中得出以下结论.

定理[3] 设 E 为实的一致光滑且一致凸 Banach 空间， K 为 E 中的非空有界闭凸子集， $T: K \to K$ 是一致 L-Lipschitz 的且为 φ- 渐近非扩展映像，有 $\widetilde{F}(T) = F(T)$. 设序列 $\{x_n\}$ 由下列程序生成

$$\begin{cases} x_1 = x \in K, \\ y_n = J^{-1}((1-\beta_n)Jx_n + \beta_n J(T^n x_n)), \\ C_n = \{z \in K : \varphi(z, y_n) \le \varphi(z, x_n) + M(\kappa_n - 1)\}, \\ Q_n = \{z \in K : \langle x_n - z, Jx_1 - Jx_n \rangle \ge 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{C_n \cap Q_n}(x_1), \quad n \ge 1, \end{cases} \tag{1}$$

* 国家自然科学基金 (10771050) 资助项目.
收稿日期：2008-11-20, 收到修改稿日期：2009-12-13.

其中 $0 \le \beta_n \le 1, \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1; M = \sup\{\varphi(x,y) : x, y \in K\}$. 那么由此生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $Q_{F(T)}(x_1)$.

受这些成果的启示，本文将在自反的严格凸的光滑 Banach 空间的框架下，给出一种关于拟 φ- 渐近非扩展映像族公共不动点的新混杂算法，并证明该算法的强收敛性，所得结果改进和推广了文献 [2–5] 的相关结果.

2　预备知识

设 X 是实 Banach 空间， C 为 X 的非空闭凸子集， $F(T)$ 表示映像 $T : C \to C$ 的不动点集. X^* 为 X 的对偶空间，正规对偶映像 $J : X \to 2^{X^*}$ 定义为

$$J(x) = \{j \in X^* : \langle x, j\rangle = \|x\|^2 = \|j\|^2\}, \quad \forall x \in X.$$

用 "$\to$", "$\rightharpoonup$" 分别表示 X 与 X^* 中序列的强、弱收敛.

注 1 [7]　1) 若 X 是自反的， X 与 X^* 均为严格凸的，则 $J : X \to X^*$ 与 $J^{-1} : X^* \to X$ 均为次连续的和严格单调的，且 $JX = X^*, J^{-1}X^* = X$. 此时 $J^{-1} : X^* \to X$ 为正规对偶映像， $JJ^{-1} = I_{X^*}, J^{-1}J = I_X$, 其中 I_{X^*} 与 I_X 分别表示 X^* 与 X 上的恒等算子.

2) 设 X 是自反 Banach 空间，则 X 是严格凸的 $\Leftrightarrow X^*$ 是光滑的； X 是光滑的 $\Leftrightarrow X^*$ 是严格凸的.

定义　1　Lyapunov 泛函 $\varphi : X \times X \to R$ 定义为

$$\varphi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

注 2 [7]　1) $\forall x \in X$, 存在唯一的 $x_0 \in C$, 满足 $\varphi(x_0, x) = \min\{\varphi(z,x), z \in C\}$. 此时， $\forall x \in X$, 定义 $Q_C : X \to C$ 为 $Q_C(x) = x_0$, 并称 Q_C 为从 X 到 C 上的广义投影算子. 当 $X = H$ 为 Hilbert 空间时， $Q_C = P_C$ 为从 H 到 C 上的距离投影算子.

2)　$(\|x\| - \|y\|)^2 \le \varphi(x,y) \le (\|x\| + \|y\|)^2, \forall x, y \in X$;

3)　$\varphi(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$.

定义　2　映像 $T : C \to C$ 称为相对非扩展映像，如果 T 满足下列条件

1) $F(T) \ne \emptyset$;

2) $\varphi(p, Tx) \le \varphi(p,x), \forall p \in F(T), \forall x \in C$;

3) $\widetilde{F}(T) = F(T)$.

其中 $\widetilde{F}(T) = \{w \in K : \exists\{x_{n_j}\} \subset K$, 使得 $x_{n_j} \rightharpoonup w$, 且 $x_{n_j} - Tx_{n_j} \to 0\}$ 为 T 的渐近不动点集.

定义　3　映像 $T : C \to C$ 称为相对渐近非扩展映像，如果 T 满足下列条件

1) $F(T) \ne \emptyset$;

2) 存在实数序列 $\{\kappa_n\} \subset [1,\infty), \kappa_n \to 1 (n \to \infty)$, 使得

$$\varphi(p, T^n x) \le \kappa_n \varphi(p,x), \forall p \in F(T), \forall x \in C.$$

3) $\widetilde{F}(T) = F(T)$.

定义　4　映像 $T : C \to C$ 称为拟 φ- 渐近非扩展映像，如果 T 满足下列条件

1) $F(T) \ne \emptyset$;

2) 存在实数序列 $\{\kappa_n\} \subset [1,\infty), \kappa_n \to 1 (n \to \infty)$, 使得

$$\varphi(p, T^n x) \le \kappa_n \varphi(p,x), \forall p \in F(T), \quad \forall x \in C.$$

注 3 1) 相对非扩展映像是相对渐近非扩展映像, 此时, 实数序列 $\{\kappa_n\}$ 为常数序列 $\{1\}$.
2) 相对渐近非扩展映像是拟 φ- 渐近非扩展映像，一般说来，其逆不真.

定义 5 映像 $T:C\to C$ 称为一致渐近正则的，如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在整数 $N\geq 1$, 使得

$$\|T^{n+1}x-T^nx\|\leq\varepsilon,\quad \forall x\in C,\ n\geq N.$$

定义 6 称 Banach 空间 X 具有 K-K 性质：对于任意序列 $\{x_n\}\subset X, x\in X$, 如果 $x_n\rightharpoonup x$ 且 $\|x_n\|\to\|x\|$, 则 $\|x_n-x\|\to 0$.

3 主要结果

定理 1 设 X 为自反的严格凸的光滑 Banach 空间，X 与 X^* 都具有 K-K 性质, 设 C 为 X 的非空有界闭凸子集，$\{T_i\}_{i=1}^{\infty}:C\to C$ 是一族闭的且一致渐近正则的拟 φ- 渐近非扩展映像, 且 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(T_i)\neq\emptyset$. 如果 $\{a_{n,i}\}_{i=1}^{\infty}\subset[0,1]$, $\liminf\limits_{n\to\infty}a_{n,i}<1$, $M=\sup\{\varphi(x,y):x,y\in C\}$, 设序列 $\{x_n\}$ 由下列程序所生成

$$\begin{cases} x_0\in X,\\ C_{1,i}=C,\quad C_1=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{1,i},\quad x_1=Q_{C_1}(x_0),\\ y_{n,i}=J^{-1}(a_{n,i}Jx_n+(1-a_{n,i})J(T_i^nx_n)),\\ C_{n+1,i}=\{z\in C_{n,i}:\varphi(z,y_{n,i})\leq\varphi(z,x_n)+M(\kappa_{n,i}-1)\},\\ C_{n+1}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{n+1,i},\\ x_{n+1}=Q_{C_{n+1}}x_0,\quad n\geq 0,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\{\kappa_{n,i}\}$ 是 T_i 的渐近序列，那么 $\{x_n\}$ 强收敛于 $p_0=Q_F(x_0)$.

证 我们分 6 步完成定理的证明.

第 1 步 证 F 是闭凸集.

首先证每一个 $F(T_i)$ 是闭凸集，$i=1,2,\cdots$. 设 $\{p_n\}\subset F(T_i)$ 且 $p_n\to p$. 根据 T_i 是拟 φ- 渐近非扩展映像可得 $\varphi(p_n,T_ip)\leq\kappa_{1,i}\varphi(p_n,p)$, 而 $\varphi(p_n,p)\to 0$, 所以 $\varphi(p_n,T_ip)\to 0$. 又由于

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi(p_n,T_ip)&=\lim_{n\to\infty}(\|p_n\|^2-2\langle p_n,J(T_ip)\rangle+\|T_ip\|^2)\\&=\|p\|^2-2\langle p,J(T_ip)\rangle+\|T_ip\|^2=\varphi(p,T_ip).\end{aligned}$$

所以 $\varphi(p,T_ip)=0$, 于是 $p=T_ip$, 从而 $F(T_i)$ 是闭集.

设 $p_1,p_2\in F(T_i)$, 令 $q=tp_1+(1-t)p_2, t\in(0,1)$, 利用 $\varphi(x,y)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\varphi(q,T_i^nq)&=\|q\|^2-2\langle q,JT_i^nq\rangle+\|T_i^nq\|^2\\&=\|q\|^2-2t\langle p_1,JT_i^nq\rangle-2(1-t)\langle p_2,JT_i^nq\rangle+\|T_i^nq\|^2\\&=\|q\|^2+t\varphi(p_1,T_i^nq)+(1-t)\varphi(p_2,T_i^nq)-t\|p_1\|^2-(1-t)\|p_2\|^2\\&\leq\|q\|^2+\kappa_{n,i}t\varphi(p_1,q)+\kappa_{n,i}(1-t)\varphi(p_2,q)-t\|p_1\|^2-(1-t)\|p_2\|^2\\&=(\kappa_{n,i}-1)(t\|p_1\|^2+(1-t)\|p_2\|^2-\|q\|^2).\end{aligned}$$

因为 $\kappa_{n,i} \to 1 (n \to \infty)$, 上式两边取极限得 $\varphi(q, T_i^n q) \to 0 (n \to \infty)$. 注意到

$$0 \le (\|q\| - \|T_i^n q\|)^2 \le \varphi(q, T_i^n q),$$

所以 $\|T_i^n q\| \to \|q\|$, 从而 $\|J(T_i^n q)\| \to \|Jq\|$, 则 $\{J(T_i^n q)\}$ 有界. 因 X 自反，所以 X^* 也自反，于是可设

$$J(T_i^n q) \rightharpoonup f_0 \in X^*,$$

因 X 自反，所以 $J(X) = X^*$, 因而存在 $x \in X$, 使得 $f_0 = J(x)$. 利用 $\|\cdot\|^2$ 的弱下半连续性可得

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \varphi(q, T_i^n q) &= \liminf_{n\to\infty} (\|q\|^2 - 2\langle q, J(T_i^n q)\rangle + \|T_i^n q\|^2) \\
&= \liminf_{n\to\infty} (\|q\|^2 - 2\langle q, J(T_i^n q)\rangle + \|J(T_i^n q)\|^2) \\
&\ge \|q\|^2 - 2\langle q, f_0\rangle + \|f_0\|^2 \\
&= \|q\|^2 - 2\langle q, J(x)\rangle + \|J(x)\|^2 \\
&= \varphi(q, x).
\end{aligned}$$

所以 $\varphi(q, x) = 0$, 则 $q = x$, 于是 $J(T_i^n q) \rightharpoonup J(q)$. 由于 $\|J(T_i^n q)\| \to \|Jq\|$, 根据 X^* 具有 K-K 性质可得 $\|J(T_i^n q) - J(q)\| \to 0$. 利用 $J^{-1} : X^* \to X$ 的次连续性可得 $T_i^n q \rightharpoonup q$, 由于 $\|T_i^n q\| \to \|q\|$ 以及 X 具有 K-K 性质可得， $\|T_i^n q - q\| \to 0$. 因为 T_i 是一致渐近正则的，所以 $T_i^{n+1} q \to q$, 即 $T_i(T_i^n q) \to q$. 又因为 T_i 是闭的，所以 $T_i q = q$, 从而 $F(T_i)$ 是凸集.

由于每一个 $F(T_i)$ 是闭凸集， $i = 1, 2, \cdots$, 那么 $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ 也是闭凸集，由假设条件 $F \ne \emptyset$ 可知 $Q_F(x_0)$ 有意义.

第 2 步　证 C_n 是闭凸集.

只须证明每一个 $C_{n,i}$ 是闭凸集， $n \ge 1$. 对 n 作数学归纳法.

事实上， $n = 1$ 时， $C_{1,i} = C$ 是闭凸集. 假设对某整数 $k \ge 1$, $C_{k,i}$ 是闭凸集，下证 $C_{k+1,i}$ 是闭凸集. 由 $C_{k+1,i}$ 的构造可得 $C_{k+1,i}$ 是闭集. $\forall z_1, z_2 \in C_{k+1,i} \subset C_{k,i}$, $t \in (0,1)$, 有

$$\varphi(z_1, y_{k,i}) \le \varphi(z_1, x_k) + M(\kappa_{k,i} - 1), \tag{3}$$

$$\varphi(z_2, y_{k,i}) \le \varphi(z_2, x_k) + M(\kappa_{k,i} - 1), \tag{4}$$

由 $\varphi(x, y)$ 的定义可得

$$-2\langle z_1, J(y_{k,i})\rangle + \|y_{k,i}\|^2 \le -2\langle z_1, J(x_k)\rangle + \|x_k\|^2 + M(\kappa_{k,i} - 1), \tag{5}$$

$$-2\langle z_2, J(y_{k,i})\rangle + \|y_{k,i}\|^2 \le -2\langle z_2, J(x_k)\rangle + \|x_k\|^2 + M(\kappa_{k,i} - 1), \tag{6}$$

$(5) \times t + (6) \times (1 - t)$, 令 $z = tz_1 + (1-t)z_2 \in C_{k,i}$, 有

$$-2\langle z, J(y_{k,i})\rangle + \|y_{k,i}\|^2 \le -2\langle z, J(x_k)\rangle + \|x_k\|^2 + M(\kappa_{k,i} - 1),$$

于是

$$\varphi(z, y_{k,i}) \le \varphi(z, x_k) + M(\kappa_{k,i} - 1),$$

即 $z \in C_{k+1,i}$, 所以对一切正整数 n, $C_{n,i}$ 是凸集，从而 $C_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{n,i}$ 是闭凸集.

第 3 步　证 $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = D$.

只须证 $F\subset C_{n,i},\ n,i\geq 1$. 对 n 作数学归纳法.

显然 $F\subset C_{1,i}=C$, 假设 $F\subset C_{n,i}$, 则对于任意 $p'\in F$, 有 $p'\in C_{n,i}$, 因为 T_i 是拟 φ- 渐近非扩展映像, 所以

$$\begin{aligned}&\varphi(p',y_{n,i})\\
&=\varphi(p',J^{-1}(a_{n,i}Jx_n+(1-a_{n,i})J(T_i^nx_n)))\\
&=\|p'\|^2-2\langle p',a_{n,i}Jx_n+(1-a_{n,i})J(T_i^nx_n)\rangle+\|J^{-1}(a_{n,i}Jx_n+(1-a_{n,i})J(T_i^nx_n))\|^2\\
&\leq\|p'\|^2-2\langle p',a_{n,i}Jx_n+(1-a_{n,i})J(T_i^nx_n)\rangle+a_{n,i}\|x_n\|^2+(1-a_{n,i})\|T_i^nx_n\|^2\\
&=a_{n,i}\varphi(p',x_n)+(1-a_{n,i})\varphi(p',T_i^nx_n)\\
&\leq a_{n,i}\varphi(p',x_n)+(1-a_{n,i})\kappa_{n,i}\varphi(p',x_n)\\
&=\varphi(p',x_n)+(1-a_{n,i})(\kappa_{n,i}-1)\varphi(p',x_n)\\
&\leq\varphi(p',x_n)+M(\kappa_{n,i}-1),\end{aligned}$$

即 $p'\in C_{n+1,i}$, 于是对于任意正整数 n, 有 $F\subset C_{n,i}$, 因此 $F\subset\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{n,i}=C_n,\forall n\geq 1$, 从而 $F\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n=D$, 那么 $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\neq\emptyset$.

第 4 步 证 $\|x_n-p_0\|\to 0$, 其中 $p_0=Q_D(x_0)$.

由 C_n 的构造可知 $C\supset C_1\supset C_2\supset\cdots$, 根据第 2 步和第 3 步得 $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n\neq\emptyset$ 为非空闭凸集. 我们设 $p_0=Q_D(x_0)$, 由于 $x_n=Q_{C_n}(x_0)$, 利用广义投影算子的定义可得

$$\varphi(x_1,x_0)\leq\varphi(x_2,x_0)\leq\cdots\leq\varphi(p_0,x_0).$$

由 X 的自反性, 可设 $x_n\rightharpoonup g_1\in X$. 因为 $C_j\subset C_n,\ \forall j\geq n$, 所以 $x_j\in C_n,\ \forall j\geq n$. 由于 C_n 是闭凸集, 所以 $g_1\in C_n,\ \forall n\in N$, 所以 $g_1\in D$. 而

$$\varphi(p_0,x_0)\leq\varphi(g_1,x_0)\leq\liminf_{n\to\infty}\varphi(x_n,x_0)\leq\limsup_{n\to\infty}\varphi(x_n,x_0)\leq\varphi(p_0,x_0),$$

因而 $g_1=p_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n,x_0)=\varphi(p_0,x_0)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}(\|x_n\|^2-2\langle x_n,Jx_0\rangle+\|x_0\|^2)=\|p_0\|^2-2\langle p_0,Jx_0\rangle+\|x_0\|^2,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|p_0\|$. 由于 X 具有 K-K 性质, 因此 $\|x_n-p_0\|\to 0$.

第 5 步 证 $T_ip_0=p_0$.

由于 $x_{n+1}\in C_{n+1}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C_{n+1,i},\ \forall n\geq 0,i\geq 1$, 所以

$$0\leq\varphi(x_{n+1},y_{n,i})\leq\varphi(x_{n+1},x_n)+M(\kappa_{n,i}-1),\tag{7}$$

由于 $\|x_n-p_0\|\to 0$, 所以 $\varphi(x_{n+1},x_n)\to 0$, 而 $\kappa_{n,i}\to 1$, 根据 (7) 式可得

$$\varphi(x_{n+1},y_{n,i})\to 0(n\to\infty),\tag{8}$$

注意到

$$0\leq(\|x_{n+1}\|-\|y_{n,i}\|)^2\leq\varphi(x_{n+1},y_{n,i}),$$

所以 $\|y_{n,i}\| \to \|p_0\|$, 从而 $\|J(y_{n,i})\| \to \|Jp_0\|$, 则 $\{J(y_{n,i})\}$ 有界. 因为 X 自反，所以 X^* 也自反，于是可设

$$J(y_{n,i}) \rightharpoonup f_0 \in X^*, \tag{9}$$

又因为 X 自反，所以 $J(X) = X^*$, 因而存在 $x \in X$, 使得 $f_0 = J(x)$. 利用 $\|\cdot\|^2$ 的弱下半连续性可得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_{n+1}, y_{n,i}) &= \liminf_{n\to\infty}(\|x_{n+1}\|^2 - 2\langle x_{n+1}, J(y_{n,i})\rangle + \|y_{n,i}\|^2)\\ &= \liminf_{n\to\infty}(\|x_{n+1}\|^2 - 2\langle x_{n+1}, J(y_{n,i})\rangle + \|J(y_{n,i})\|^2)\\ &\geq \|p_0\|^2 - 2\langle p_0, f_0\rangle + \|f_0\|^2\\ &= \|p_0\|^2 - 2\langle p_0, Jx\rangle + \|Jx\|^2\\ &= \varphi(p_0, x).\end{aligned}$$

由 (8) 式知 $\varphi(p_0, x) = 0$, 则 $p_0 = x$, 于是 $f_0 = Jp_0$, 即 $J(y_{n,i}) \rightharpoonup Jp_0$, 由 $\|J(y_{n,i})\| \to \|Jp_0\|$ 以及 X^* 具有 K-K 性质可得

$$\|J(y_{n,i}) - Jp_0\| \to 0. \tag{10}$$

因为 $J: X \to X^*$ 次连续，所以 $Jx_n \rightharpoonup Jp_0$, 注意到

$$|\|Jx_n\| - \|Jp_0\|| = |\|x_n\| - \|p_0\|| \leq \|x_n - p_0\| \to 0,$$

根据 X^* 具有 K-K 性质可得

$$\|Jx_n - Jp_0\| \to 0. \tag{11}$$

由 (2), (10), (11) 式及 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_{n,i} < 1$, 有

$$\|J(T_i^n x_n) - Jp_0\| \to 0.$$

由 $J^{-1}: X^* \to X$ 的次连续性可得 $T_i^n x_n \rightharpoonup p_0$, 注意到

$$|\|T_i^n x_n\| - \|p_0\|| = |\|J(T_i^n x_n)\| - \|Jp_0\|| \leq \|J(T_i^n x_n) - Jp_0\| \to 0,$$

再根据 X 具有 K-K 性质可得 $T_i^n x_n \to p_0$. 因为 T_i 是一致渐近正则的，所以 $T_i^{n+1} x_n \to p_0$, 即 $T_i(T_i^n x_n) \to p_0$. 又由于 T_i 是闭的，所以 $T_i p_0 = p_0$, 即 $p_0 \in F(T_i)$, $\forall i \geq 1$, 从而

$$p_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) = F.$$

第 6 步　证 $p_0 = Q_F(x_0)$.

根据第 3 步和第 4 步可得

$$\varphi(p_0, x_0) = \varphi(Q_D(x_0), x_0) \leq \varphi(Q_F(x_0), x_0),$$

再利用第 5 步知 $p_0 \in F$, 所以

$$\varphi(Q_F(x_0), x_0) \leq \varphi(p_0, x_0),$$

于是 $p_0 = Q_F(x_0)$. 证毕.

注 4　定理 1 从以下几个方面推广了文献 [2–4] 中的相关结果.

1) 从一致光滑且一致凸的 Banach 空间推广到自反的严格凸的光滑 Banach 空间；

2) 将文献 [3] 中的相对渐近非扩展映像减弱到拟 φ- 渐近非扩展映像上．将文献 [2,4] 中的相对非扩展映像减弱到拟 φ- 渐近非扩展映像上．

3) 我们的算法比文献 [2–4] 中的算法简单，并且将 $\{a_n\}$ 的限制条件从 [2] 中 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < 1$ 放宽到 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < 1$.

参 考 文 献

[1] Haugazeau Y. Sur les Inequations Variationnelles et la Minimisation de Fonctionnelles Convexes. Paris: Universite de Paris, 1968.

[2] Qin X L, Su Y F. Strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space. *Nonlinear Anal.*, 2007, **67**(6): 1958–1965.

[3] 管维荣，周海云． Banach 空间中 φ- 渐近非扩展映像不动点的迭代构造．应用泛函分析学报， 2008, **10**(1): 65–70.

[4] Matsushita S, Takahashi W. A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space. *Journal of Approximation Theory*, 2005, **134**: 257–266.

[5] 高兴慧，马乐荣，周海云． Banach 空间中拟 φ- 渐近非扩展映像不动点的迭代算法．数学的实践与认识， 2009, **39**(9): 220–224.

[6] Zhou H Y. Convergence theorems of fixed points for Lipschitz pseudo-contractions in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **343**: 546–556.

[7] Takahashi W. Nonlinear Functional Analysis. Yokohama: Yokohama Publishers, 2000.

ITERATION METHODS OF THE COMMON FIXED POINTS FOR A FAMILY OF QUASI φ-ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS

GAO Xinghui

(*College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an* 716000)

ZHOU Haiyun

(*Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang* 050003)

Abstract The purpose of this article is to propose a new hybrid projection algorithm and prove a strong convergence theorem for a family of quasi φ-asymptotically nonexpansive mappings by using new analysis techniques. The results hold in reflexive, strictly convex, smooth Banach spaces. The results of this paper improve and extend some existing relative results.

Key words Quasi φ-asymptotically nonexpansive mapping, hybrid algorithm, generalized projection operator, K-K property, strong convergence theorem.