

广义 T 应力对裂纹应力强度因子的影响

高玉华, 汪洋, 程长征

(合肥工业大学土木与水利工程学院, 安徽合肥 230009)

摘要: 裂纹尖端的奇异应力场可以表达为 Williams 级数展开的形式, 其中常数项(即 T 应力项)和非奇异项对裂纹尖端的应力应变场有着很大的影响, 这些影响反过来作用于裂纹应力强度因子的计算. 将 T 应力项和非奇异项合称为广义 T 应力, 提出一种用特征分析法和边界元法配合求解广义 T 应力的新思路, 可以根据需要任意选取广义 T 应力的项数, 进而研究广义 T 应力对应力强度因子计算的影响. 结果表明, 考虑广义 T 应力项的应力强度因子计算结果与实验结果更加接近.

关键词: 裂纹; 广义 T 应力; 应力强度因子; 边界元法

中图分类号: O342 **文献标识码:** A

Effect of general T-stress on stress intensity factor of a crack

GAO Yu-hua, WANG Yang, CHENG Chang-zheng

(School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, 230009, China)

Abstract: The singular stress field at a crack tip can be presented by the Williams series, where the constant term is named T-stress. The constant term and non-singular terms, which are called general T-stress here, play a significant role in determining the stress and strain fields around a crack tip which in turn can affect the calculation of stress intensity factor (SIF) of the crack. Herein, a new method which combines the singularity eigen-analysis with the boundary element method was proposed to determine the general T-stress in the crack tip. Then the effect of the general T-stress on the calculation of the stress intensity factor of a crack was studied. The numerical results show that the stress intensity factors taking account into the general T-stress are more proximate to the experiment results.

Key words: crack; general T-stress; stress intensity factor; boundary element method

0 引言

裂纹尖端的奇异应力场可以表达为 Williams 级数展开的形式, 它包括两项奇异项、常数项以及若干非奇异项, 通常将其中的常数项称为 T 应力.

人们已经对 T 应力的计算和作用进行了研究. Chongmin 等^[1]采用尺度边界有限元法计算了平面裂纹和多材料角点附近的 T 应力. Profant 等^[2]采用错位矩阵法计算 T 应力. Paulino 等^[3]采用相互

积分法计算了功能梯度材料中的 T 应力. Fett 等^[4]推导了裂纹表面作用面力情况下的裂尖的 T 应力解. Shahani 等^[5]研究了 T 应力对裂纹扩展的影响. Smith 等^[6]探讨了在混合载荷作用下 T 应力对线弹性材料脆性断裂的影响. Chong 等^[7]讨论了在 I 型载荷作用下 T 应力对裂纹和夹杂相互作用的影响. Tvergaard^[8]研究了在 I、III 型混合载荷作用下 T 应力对裂纹扩展的影响. 但是由于非奇异项计算存在很大的困难, 目前文献对 Williams 级数展开中的非奇异项

对裂纹尖端的应力应变场的贡献很少涉及。

本文将 T 应力项和非奇异项合称为广义 T 应力,提出一种用边界元法求解广义 T 应力的新方法。首先将裂纹尖端奇异区域内的应力场用 Williams 级数特征展开式表示,远场区域由于没有应力奇异性而采用常规边界元法来模拟,后将特征展开和边界元法两者联合求出 Williams 级数展开式中的组合系数,从而获得裂纹尖端应力场中的广义 T 应力。之后,对含裂纹试件脆性断裂时的临界应力强度因子进行计算,并和实验结果进行比较,研究广义 T 应力项对混合载荷作用下裂纹应力强度因子的影响。

1 裂纹应力奇异性特征分析

图 1(a)所示为表面自由的裂纹。由于裂纹尖端具有应力奇异性,使用常规的数值方法直接计算会产生很大误差甚至结果失真。现采用奇异分离技术,在裂纹尖端挖出一半径为 ρ 的圆形区域,放大如图 1(c)所示,其圆弧边界记为 Γ'_ρ ,剩余结构见图 1(b),由于挖去圆形区域所产生的新边界记为 Γ_ρ 。

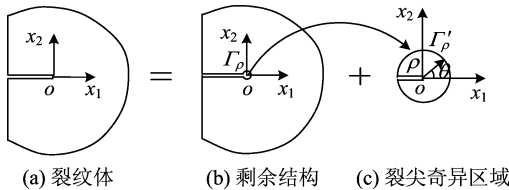


图 1 裂尖奇异区域的分离

Fig. 1 Separation of the singularity region from a crack tip

根据线弹性理论分析,图 1(c)所示裂尖奇异区域的位移场可以表达成关于径向距离 ρ 的一系列级数渐近展开^[9],其中的典型项为

$$\left. \begin{aligned} u_\rho(\rho, \theta) &= A_k \rho^{\lambda_k+1} \tilde{u}_{\rho k}(\theta), \\ u_\theta(\rho, \theta) &= A_k \rho^{\lambda_k+1} \tilde{u}_{\theta k}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, λ_k 为裂尖应力奇异性指数, $\tilde{u}_{\rho k}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 是切口尖端附近沿 ρ 和 θ 方向的位移特征角函数, A_k 为相应的位移幅值系数。考虑各向同性均质线弹性材料,将式(1)引入到几何方程,再代入弹性力学平面应力问题应力应变关系,最后代入平衡方程,得到如下的常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{\rho k}'' + \left(\frac{1+v}{1-v} \lambda_k - 2 \right) \tilde{u}_{\theta k}' + \frac{2}{1-v} \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_{\rho k} &= 0, \\ \tilde{u}_{\theta k}'' + \left[2 + \frac{1}{2} (1+v) \lambda_k \right] \tilde{u}_{\rho k}' + \\ \frac{1}{2} (1-v) \lambda_k (\lambda_k + 2) \tilde{u}_{\theta k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, $(\dots)'$ 和 $(\dots)''$ 分别表示对 θ 坐标的一阶导数和二阶导数, ν 为材料的泊松比。假设两裂纹面自由,其上面力为零,这样的边界条件可用 $\tilde{u}_{\rho k}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 及其导数表示为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{\theta k}' + (1 + \nu + \nu \lambda_k) \tilde{u}_{\rho k} &= 0, \\ \tilde{u}_{\rho k}' + \lambda_k \tilde{u}_{\theta k} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从而裂纹尖端奇异性指数 λ_k 及相应的角函数 $\tilde{u}_{\rho k}(\theta)$, $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 的计算问题转换成了求解在边值条件式(3)下的特征方程组(2)的问题。可以采用数值解法^[10]求解式(2), (3), 得出有限个特征值 λ_k 和相应的特征向量 $\tilde{u}_{\rho k}(\theta)$, $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 及其导函数。从而,式(1)中仅有位移幅值系数 A_k 未知。

2 边界元法计算广义 T 应力

将式(1)引入到几何方程,再代入弹性力学应力应变关系,从而切口尖端附近的奇异应力场可表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_\rho(\rho, \theta) \\ \sigma_\theta(\rho, \theta) \\ \sigma_{\rho\theta}(\rho, \theta) \end{aligned} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \left\{ \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\rho k}(\theta) \\ \tilde{\sigma}_{\theta k}(\theta) \\ \tilde{\sigma}_{\rho\theta k}(\theta) \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

式中, N 为截取的级数项数, $\tilde{\sigma}_{\rho k}(\theta)$, $\tilde{\sigma}_{\theta k}(\theta)$ 和 $\tilde{\sigma}_{\rho\theta k}(\theta)$ 为应力特征角函数,它们是弹性常数以及 λ_k , $\tilde{u}_{\rho k}(\theta)$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}(\theta)$ 及其导数的组合。式(4)中奇异性指数 $\lambda_k = -0.5$ 所对应的项即为应力奇异项, $\lambda_k \geq 0$ 所对应的项为广义 T 应力项。

利用面力和应力之间的关系,并注意到图 1(b)边界 Γ_ρ 和图 1(c)边界 Γ'_ρ 上物理量的连续条件,可以得到图 1(b)边界 Γ_ρ 上的位移和面力分量在直角坐标系下的表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 \\ u_2 \end{aligned} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k+1} \left\{ \begin{aligned} \tilde{u}_{\rho k}(\theta) \cos \theta - \tilde{u}_{\theta k}(\theta) \sin \theta \\ \tilde{u}_{\rho k}(\theta) \sin \theta + \tilde{u}_{\theta k}(\theta) \cos \theta \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_1 \\ t_2 \end{aligned} \right\} = \sum_{k=1}^N A_k \rho^{\lambda_k} \left\{ \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\rho k}(\theta) \cos \theta - \tilde{\sigma}_{\rho\theta k}(\theta) \sin \theta \\ \tilde{\sigma}_{\rho k}(\theta) \sin \theta + \tilde{\sigma}_{\rho\theta k}(\theta) \cos \theta \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

图 1(b)已剔除了应力奇异部分,故可采用常规的边界元法分析。对二维弹性力学问题,常规的位移边界积分方程为

$$C_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (7)$$

式中, \mathbf{x} 为场点, \mathbf{y} 为源点, $C_{ij}(\mathbf{y})$ 为与 \mathbf{y} 处边界几何形状有关的常数。 $u_j(\mathbf{x})$, $t_j(\mathbf{x})$ 是边界 Γ 上的位移和面力分量。积分核 $U_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $T_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 分别为弹性力学 Navier 方程基本解及其线性组合。

边界元法仅需在结构的边界划分单元. 对于平面定常问题, 每个单元节点上有边界位移 u_j 和面力 $t_j (j=1, 2)$ 共 4 个物理量, 其中有 2 个可以根据边界条件确定出来, 另外 2 个未知, 以每个边界节点为源点列边界积分方程(7), 离散后可以得到 2 个代数方程, 这样整体的方程数和未知量的个数相等, 方程定解. 但图 1(b) 中的弧线边界 Γ_ρ 是由于挖去奇异区域形成的, 其上节点的边界位移和面力均未知, 通过式(5), (6) 将边界 Γ_ρ 上节点的位移和面力未知量转换为 N 个待定系数 $A_k (k=1, \dots, N)$. 若式(4) 中的广义 T 应力截取至 N 项, 则仅需在边界 Γ_ρ 上剖分 $N/2$ 个节点, 在这 $N/2$ 个节点上可以列 N 个离散后的边界积分方程(7), 这样使得整体的方程数和未知量的个数相等, 解出图 1(b) 边界上各节点的未知位移和面力分量以及式(5), (6) 中的待定系数 $A_k (k=1, \dots, N)$. 将 $A_k (k=1, \dots, N)$ 回代到式(4) 可以确定出广义 T 应力, 获取裂纹尖端附近完整的奇异应力场.

利用应力幅值系数 $A_k (k=1, \dots, N)$ 和应力特征角函数可以计算出裂纹的应力强度因子 K_I 和 K_{II} , 其计算式为^[11]

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho^{-\lambda_1}} \sigma_\theta(\rho, \theta) |_{\theta=0} = \sqrt{2\pi} A_1 \tilde{\sigma}_{\theta 1}(0), \quad (8)$$

$$K_{II} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho^{-\lambda_2}} \sigma_{\rho\theta}(\rho, \theta) |_{\theta=0} = \sqrt{2\pi} A_2 \tilde{\sigma}_{\rho\theta 2}(0). \quad (9)$$

3 数值试验

如图 2 所示为三点弯曲 PMMA 半圆板, 直径边水平, 沿铅垂方向施加载荷 P . 板厚 $d=5$ mm, 半径 $R=50$ mm, 两支点之间距离 $2s=43$ mm, 从圆心起有一长度为 $a=15$ mm 的裂纹, 裂纹与铅垂线间的夹角为 β . 当裂纹倾角 β 从 0° 变到 50° , 裂纹从纯 I 型变化到纯 II 型.

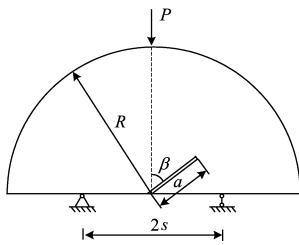


图 2 含裂纹半圆形板受三点弯曲作用

Fig. 2 Cracked semi-circular bend specimen

实验测得^[12] $\beta=0^\circ$ 时裂纹的临界应力强度因子 $K_{Ic}=2.13$ MPam^{1/2}. 设在某倾角时裂纹的 I 型和 II 型临界应力强度因子分别记为 K_{Ic} 和 K_{IIc} . 表 1 和表 2 为 $\rho=0.04$ mm 时式(4) 取不同级数项数对 I 型和 II 型裂纹临界

应力强度因子计算的影响, 表中 $N=2$ 表示式(4) 级数项仅取了 2 项奇异项, $N=4$ 表示选取至 T 应力项, $N=6$ 表示选取至包含 2 项非奇异项的广义 T 应力.

表 1 $\rho=0.04$ mm 时广义 T 应力对 I 型裂纹临界应力强度因子的影响

Tab. 1 Effect of general T-stress on critical SIF K_{Ic} when $\rho=0.04$ mm

$\beta/^\circ$	K_{Ic}/K_c				Experiment ^[12]	
	$N=2$	$N=4$	$N=6$			
0	1.00	1.00	1.00	0.96	1.01	1.09
10	0.94	0.94	0.94	0.89	1.00	1.05
20	0.80	0.79	0.79	0.68	0.72	0.78
30	0.60	0.59	0.59	0.56	0.62	0.65
40	0.43	0.34	0.34	0.33	0.36	0.38
50	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表 2 $\rho=0.04$ mm 时广义 T 应力对 II 型裂纹临界应力强度因子的影响

Tab. 2 Effect of general T-stress on critical SIF K_{IIc} when $\rho=0.04$ mm

$\beta/^\circ$	K_{IIc}/K_c				Experiment ^[12]	
	$N=2$	$N=4$	$N=6$			
0	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.20	0.20	0.20	0.19	0.22	0.26
20	0.37	0.37	0.37	0.32	0.34	0.37
30	0.53	0.51	0.51	0.47	0.52	0.52
40	0.70	0.62	0.62	0.59	0.61	0.65
50	0.92	0.70	0.70	0.52	0.53	0.64

从表 1 和表 2 可以看出, 当裂纹倾角 $\beta \leq 30^\circ$, 也就是 I 型裂纹占主导时, 式(4) 的级数项数取 2 项和取 4 项、6 项对临界应力强度因子的计算基本没有差别, 说明此时对 I 型主导裂纹可以忽略 T 应力或广义 T 应力对应力场计算的影响. 但当 $\beta > 30^\circ$ 以后, 式(4) 仅取 2 项时应力强度因子的计算值与实验结果差别很大, 取 4 项也就是考虑 T 应力时计算结果和实验值就非常接近, 可见 T 应力对 II 型主导裂纹的裂尖应力场计算有很大影响. 从表 1 和表 2 还可以看出, 式(4) 取 4 项和取 6 项时的计算结果没有差别, 这说明在 ρ 非常小时, Williams 级数展开取到 T 应力项就能反映裂尖真实应力状态.

有关特征距离 ρ 的选取一直是断裂力学的研究热点^[13]. ρ 既要足够小, 以确保用式(4) 表示的奇异应力项接近裂尖的精确解, 又要求其大于裂尖的塑性半径. 表 3 和表 4 所列为在 $\rho=0.2$ mm 时式(4) 取不同级数项数对 I 型和 II 型裂纹临界应力强度因子计算结果的影响, 其中 $N=8$ 表示式(4) 取的广义 T 应力至 4 项非奇异项.

从表 3 和表 4 可以看出, 当级数项数 $N \geq 6$ 以

后应力强度因子的计算结果才趋于一致,相对于表 1 和表 2 当级数项数 $N \geq 4$ 以后应力强度因子的计算结果就趋于一致,这表明随着特征距离 ρ 的增大,必须取更多的级数项数才能反映裂尖的真实应力状态. 反过来说,式(4)所取的级数项数越多,就能更有效地反映出离裂尖更远处的位移场和应力场. 通过计算发现,特征距离的变化对裂纹应力强度因子的计算结果有一定影响,但考虑广义 T 应力以后计算结果更趋近于实验结果的规律没变.

表 3 $\rho = 0.2 \text{ mm}$ 时广义 T 应力对 I 型裂纹
临界应力强度因子的影响

Tab. 3 Effect of general T-stress on critical SIF K_{I_f}
when $\rho = 0.2 \text{ mm}$

$\beta/(\circ)$	K_{I_f}/K_c						
	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N=8$	Experiment ^[12]		
0	1.00	1.00	1.00	1.00	0.96	1.01	1.09
10	0.92	0.93	0.94	0.94	0.89	1.00	1.05
20	0.75	0.75	0.79	0.79	0.68	0.72	0.78
30	0.50	0.50	0.57	0.57	0.56	0.62	0.65
40	0.10	0.19	0.30	0.30	0.33	0.36	0.38
50	0.70	0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表 4 $\rho = 0.2 \text{ mm}$ 时广义 T 应力对 II 型裂纹
临界应力强度因子的影响

Tab. 4 Effect of general T-stress on critical SIF K_{II_f}
when $\rho = 0.2 \text{ mm}$

$\beta/(\circ)$	K_{II_f}/K_c						
	$N=2$	$N=4$	$N=6$	$N=8$	Experiment ^[12]		
0	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	0.24	0.23	0.20	0.20	0.19	0.22	0.26
20	0.42	0.42	0.37	0.37	0.32	0.34	0.37
30	0.60	0.56	0.50	0.50	0.47	0.52	0.52
40	0.82	0.64	0.57	0.57	0.59	0.61	0.65
50	1.17	0.68	0.59	0.59	0.52	0.53	0.64

4 结论

本文通过奇异分离法将裂尖的奇异区域与裂纹体分离开来,奇异区域内的位移场和应力场用 Williams 级数展开式表达,剩余结构采用常规的边界元法模拟,两者结合实现裂尖奇异应力场的分析. 该法的优势在于可以根据需要任意选取广义 T 应力的项数,而计算量几乎没有增加. 算例表明,Williams 级数展开中的 T 应力项对 II 型主导的裂纹的应力强度因子计算结果影响很大,考虑 T 应力影响的应力强度因子计算结果和实验结果更加一致,特别是当选取的特征距离较大时,需要计及广义 T 应力才能和实验结果一致. 但关于特征距离的选取对裂纹应力强度因子计算结果的影响有待进一步研究.

参考文献 (References)

- [1] Chongmin S, Zora V. Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite-element method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75: 1 960-1 980.
- [2] Profant T, Ševeček O, Kotoul M. Calculation of K-factor and T-stress for cracks in anisotropic biomaterials[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75: 3 707-3 726.
- [3] Paulino G H, Kim J H. A new approach to compute T-stress in functionally graded materials by means of the interaction integral method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2004, 71: 1 907-1 950.
- [4] Fett T, Rizzi G. T-stress of cracks loaded by near-tip tractions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73: 1940-1946.
- [5] Shahani A R, Tabatabaei S A. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen[J]. *Materials and Design*, 2009, 30(7): 2 630-2 635.
- [6] Smith D J, Ayatollahi M R, Pavier M J. The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading [J]. *Fatigue and Fracture of Engineering Material and Structures*, 2001, 24: 137-150.
- [7] Chong Z, Li Z H. The effect of T-stress on crack inclusion interaction under mode I loading[J]. *Mechanics Research Communications*, 2007, 34: 283-288.
- [8] Tvergaard V. Effect of T-stress on crack growth under mixed mode I - III loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45: 5 181-5 188.
- [9] Yosibash Z, Szab B A. A note on numerically computed eigenfunctions and generalized stress intensity factors associated with singular points[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 54: 593-595.
- [10] Niu Z R, Ge D L, Cheng C Z, et al. Evaluation of the stress singularities of plane V-notches in bonded dissimilar materials[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33: 1 776-1 792.
- [11] Sih G S, Paris P C, Irwin G R. On crack in rectilinearly anisotropic bodies[J]. *International Journal of Fracture*, 1965, 1: 189-203.
- [12] Ayatollahi M R, Aliha M R M, Hassani M M. Mixed mode brittle fracture in PMMA-An experimental study using SCB specimens[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2006, 417: 348-356.
- [13] Seweryn A. A non-local stress and strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and -II rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, 59 (6): 737-760.