

文章编号: 0258-2724(2010)02-0222-05 DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2010.02.011

## 无侧隙双滚子包络环面蜗杆真实 啮合齿面的理论研究

邓星桥<sup>1,2</sup>, 王进戈<sup>1,2</sup>, 张均富<sup>2</sup>, 吴江<sup>2</sup>

(1. 四川大学制造科学与工程学院, 四川 成都 610065; 2. 西华大学机械能与自动化学院, 四川 成都 610039)

**摘要:** 为获得无侧隙双滚子包络环面蜗杆三维真实啮合齿面, 基于空间啮合原理建立了无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的数学模型, 推导了蜗杆传动的齿面接触螺旋线方程. 该方程与 Pro/E 软件结合, 获得无侧隙双滚子包络环面蜗杆的真实啮合齿面. 在此基础上将利用 Matlab 软件计算得到的蜗杆接触线与 Pro/E 软件拟合得到的蜗杆齿面对比分析. 结果表明: 蜗杆齿面拟合精度由蜗杆齿面接触螺旋线条数决定, 当螺旋线为 9 条时, 所获得的齿面反映了蜗杆的真实啮合齿面, 拟合精度达到 0.001 00 mm.

**关键词:** 真实齿面; 无侧隙; 双滚子包络环面蜗杆; 啮合原理

**中图分类号:** TH132.41 **文献标识码:** A

## Theoretical Study on Real Tooth Surface of Non-backlash Double-Roller Enveloping Hourglass Worm

DENG Xingqiao<sup>1,2</sup>, WANG Jinge<sup>1,2</sup>, ZHANG Junfu<sup>2</sup>, WU Jiang<sup>2</sup>

(1. School of Manufacturing Science and Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. School of Mechanical Engineering & Automation, Xihua University, Chengdu 610039, China)

**Abstract:** To acquire the real tooth surface of the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm, a mathematic model for the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm gearing was established according to the space meshing theory, in which the contact helix line equation of the worm gearing was derived. On the basis of the contact helix line equation, Pro/E software was used to produce the real tooth surface of the non-backlash double-roller enveloping hourglass worm. Then, the contact helix lines acquired by Matlab software were compared with the tooth surface produced by the Pro/E software, to analyze the influence of the number of contact helix lines on the tooth surface fitting precision. The results show that the fitting precision of the tooth surface is determined by the number of contact helix lines, and that the tooth surface acquired by the proposed method can exactly reflect the real meshing tooth surface, with the fitting precision being 0.001 00 mm, when the number of helix lines is nine.

**Key words:** real tooth surface; non-backlash; double-roller enveloping hourglass worm; meshing theory

无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动是综合精密传动和动力传动的新型蜗杆传动装置, 该传动装置利用双滚子的特殊传动结构消除了传动的回程误

差, 使传动更加平稳, 并且提高了传动精度<sup>[1-2]</sup>. 目前对无侧隙双滚子包络环面蜗杆的研究主要集中在蜗杆啮合性能分析、参数优化等方面, 并取得了

收稿日期: 2009-02-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50775190)

作者简介: 邓星桥(1982-), 男, 博士研究生, 研究方向为新型传动技术及智能机器人技术, 电话: 13980726249, E-mail: dxq\_zyc@126.com

一定的成果<sup>[3]</sup>. 但对蜗杆三维真实啮合齿面的研究却较少,在蜗杆传动中,啮合齿面对蜗杆设计具有重要的作用<sup>[4-6]</sup>. Jesper 及 Hsieh 等<sup>[4,6]</sup>对传动中的真实啮合齿面进行了较深入的研究. 文献[7]中提出利用曲面造型、CAGD 理论与经典的齿轮啮合理论相结合获得齿轮真实齿面的方法. 马振群等<sup>[8]</sup>提出利用一系列连续变化柱面去截取啮合齿面的方法. 但这些方法用于获得无侧隙双滚子包络环面蜗杆的啮合齿面都不适用.

为解决以上问题,本文基于经典齿轮啮合理

论,利用 Pro/E 复杂曲面造型工具,提出无侧隙双滚子包络环面蜗杆齿面方程与 Pro/E 软件结合,获得无侧隙双滚子蜗杆真实齿面,分析了无侧隙双滚子包络环面蜗杆齿面的拟合精度.

### 1 无侧隙双滚子包络环面蜗杆齿面数学模型

设置蜗杆蜗轮坐标如图 1 所示. 图 1 中:( $O_1$ ;  $i_1, j_1, k_1$ ) 为蜗杆的动坐标系,用  $S_1$  代替; ( $O_1'$ ;

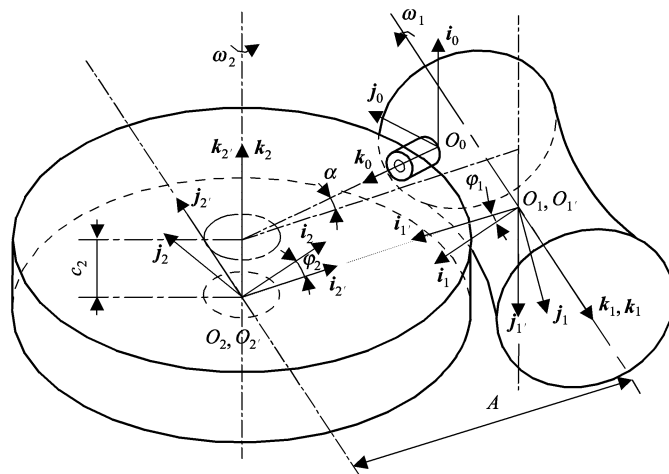


图 1 蜗杆工作原理  
Fig. 1 Working principle of worm

$i_1', j_1', k_1'$ ) 为蜗杆静坐标系,用  $S_1'$  代替; ( $O_2$ ;  $i_2, j_2, k_2$ ) 为蜗轮的动坐标系,用  $S_2$  代替; ( $O_2'$ ;  $i_2', j_2', k_2'$ ) 为蜗轮静坐标系,用  $S_2'$  代替; ( $O_0$ ;  $i_0, j_0, k_0$ ) 为蜗轮滚柱柱顶中心与蜗轮固联的坐标系,用  $S_0$  代替;滚柱的回转轴沿着蜗轮的径向,且通过蜗轮回转轴  $k_2$ ;  $O_0$  点在  $S_2$  中的坐标为  $(a_2, b_2, c_2)$ ;  $k_1 = k_1' = \omega_1/\omega_1, k_2 = k_2' = \omega_2/\omega_2$ , 其中:  $\omega_1, \omega_2$  分别为蜗轮蜗杆的角速度矢量;  $A = \overline{O_1 O_2}$  为蜗杆与蜗轮中心距;  $c_2$  为滚柱偏距;  $\alpha$  为蜗轮齿周角;  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$  分别为蜗杆、蜗轮的转角; 传动比  $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \varphi_1/\varphi_2 = 1/i_{21}$ . 当  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  时,动坐标系与静坐标系重合.

根据文献[9-10],从坐标系  $S_1$  变换到  $S_0$  的变换矩阵为

$$M_{10} = \begin{bmatrix} \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & 0 \\ \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & -\cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ a_2 & -A \sin \varphi_2 + b_2 & A \cos \varphi_2 + c_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

如图 2 所示,滚柱齿面与蜗杆齿面的接触点为  $O_p$ , 在  $O_p$  处设置活动标架坐标系为 ( $O_p$ ;  $e_1, e_2, n$ ), 用  $S_p$  代替,其中  $n$  为滚柱母面与蜗杆齿面的公法矢量,  $n = e_1 \times e_2$ . 根据文献[11]可知,滚柱面在坐标系  $S_0$  中的向量方程表示为

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= x_0 i_0 + y_0 j_0 + z_0 k_0, \\ x_0 &= R \cos \theta, \\ y_0 &= R \sin \theta, \\ z_0 &= u, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

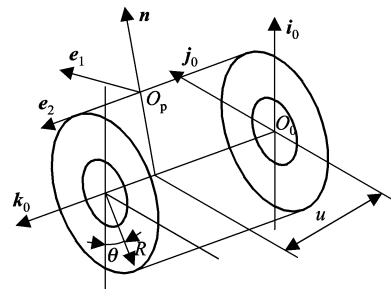


图 2 滚柱面上活动标架的设置  
Fig. 2 Location of the dynamic coordinate system on cylindrical surface

式中:  $x_0, y_0, z_0$  分别为矢量  $\mathbf{r}_0$  在  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  方向的投影值;  $u$  和  $\theta$  为滚子柱面参数;  $R$  为滚柱的回转半径.

由啮合原理可知,在齿轮传动中,两齿面在接触点处必须满足啮合方程

$$\mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{v}_{12}$  为蜗杆蜗轮在啮合点  $O_p$  处的相对速度. 由文献[11]可知,在交错轴为  $90^\circ$  的蜗杆传动中,共扼齿面的相对速度为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_{12} &= v_{1,12}\mathbf{e}_1 + v_{2,12}\mathbf{e}_2 + v_{n,12}\mathbf{n}, \\ v_{1,12} &= -B_1 \sin \alpha \cos \theta + B_2 \cos \alpha \cos \theta - B_3 \sin \theta, \\ v_{2,12} &= -B_1 \cos \alpha - B_1 \sin \alpha, \\ v_{n,12} &= -B_1 \sin \alpha \sin \theta + B_2 \cos \alpha \cos \theta + B_3 \cos \theta, \\ B_1 &= -(c_2 + x_0) \cos \varphi_2 + i_{21}(b_2 + y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha), \\ B_2 &= -(c_2 + x_0) \sin \varphi_2 - i_{21}(a_2 - y_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha), \\ B_3 &= -(b_2 + y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha) \sin \varphi_2 + (a_2 - y_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) \cos \varphi_2 - A, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $v_{1,12}, v_{2,12}, v_{n,12}$  为  $\mathbf{v}_{12}$  在活动标架  $S_p$  中分别沿  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  轴的投影;  $B_1, B_2, B_3$  为方程系数. 根据  $\mathbf{v}_{12}$  在  $\mathbf{n}$  轴上的投影  $v_{n,12}$ , 得该传动的啮合函数  $\Phi$  为

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= M_1 \cos \varphi_2 - M_2 \cos \varphi_2 - M_3, \\ M_1 &= (c_2 + x_0) \sin \alpha \sin \theta + (a_2 - y_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) \cos \theta, \\ M_2 &= -(c_2 + x_0) \cos \alpha \sin \theta + (b_2 + y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha) \cos \theta, \\ M_3 &= i_{21} \sin \alpha \sin \theta (b_2 + y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha) + i_{21} (a_2 - y_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha) \cos \alpha \sin \theta + A \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $M_1, M_2, M_3$  分别为方程系数. 根据式(2)与式(6), 当  $\varphi_2$  取定值时, 得蜗轮齿面上瞬时接触线方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \\ u &= f(\theta, \varphi_2) = \frac{P_1}{P_2}, \\ P_1 &= (i_{21} b_2 - c_2 \cos \varphi_2) \sin \alpha \sin \theta + (-c_2 \sin \varphi_2 + i_{21} a_2) \cos \alpha \sin \theta + \\ &\quad (b_2 \sin \varphi_2 - a_2 \cos \varphi_2 + A) \cos \theta, \\ P_2 &= (\sin \alpha \sin \varphi_2 - \cos \alpha \cos \varphi_2) \cos \theta + i_{21} \sin \theta, \\ \varphi_2 &= C, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中:  $P_1, P_2$  为系数,  $C$  为任意常数. 利用方程(1)将式(8)通过  $S_0$  到  $S_1$  的坐标变换, 得双滚子包络环面蜗杆的齿面方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \\ x_1 &= (z_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - a_2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + (y_0 \cos \alpha - z_0 \cos \alpha + b_2) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \\ &\quad (c_2 + x_0) \sin \varphi_1 + A \cos \varphi_1, \\ y_1 &= (-y_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha + a_2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - (y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha + b_2) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \\ &\quad (c_2 + x_0) \cos \varphi_1 - A \sin \varphi_1, \\ z_1 &= (z_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - a_2) \sin \varphi_2 - (y_0 \cos \alpha - z_0 \sin \alpha + b_2) \cos \varphi_2, \\ \mathbf{r}_0 &= x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \quad u = P_1/P_2, \quad \varphi_2 = i_{21} \varphi_1, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $x_1, y_1, z_1$  为  $\mathbf{r}_1$  在坐标系  $S_1$  中沿  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$  方向的分量. 根据式(1), (2)与式(8), 令  $\varphi_1$  连续变化, 可得到蜗杆齿面上的一条螺旋线方程, 其坐标值分别用  $x, y, z$  表示,

$$\left. \begin{aligned}
 x &= -x_0 \sin \varphi_1 + y_0 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \alpha) - \\
 &\quad a_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + b_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - c_2 \sin \varphi_1 + A \cos \varphi_1 + \\
 &\quad z_0 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha), \\
 y &= -x_0 \cos \varphi_1 + y_0 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \alpha - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \alpha) + \\
 &\quad a_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - b_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - c_2 \cos \varphi_1 - A \sin \varphi_1 - \\
 &\quad z_0 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \alpha + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha), \\
 z &= -y_0 (\sin \varphi_2 \sin \alpha + \cos \varphi_2 \cos \alpha) - a_2 \sin \varphi_2 - b_2 \cos \varphi_2 + \\
 &\quad z_0 (\sin \varphi_2 \cos \alpha - \cos \varphi_2 \sin \alpha), \\
 \theta &= \tan^{-1} \frac{A - a_2 \cos \varphi_2 + u \cos \varphi_2 \cos \alpha + u \sin \varphi_2 \sin \alpha}{-c_2 \sin \alpha \cos \varphi_2 + i_{12} b_2 \sin \alpha - a_2 i_{12} \cos \alpha + c_2 \cos \alpha \sin \varphi_2 + u i_{12}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### 2 无侧隙双滚子包络环面蜗杆三维真实齿面获取

选取蜗杆头数  $Z_1 = 1$ , 蜗轮齿数  $Z_2 = 2$ ,  $A = 125 \text{ mm}$ ,  $R = 5 \text{ mm}$ ,  $c_2 = 5.5 \text{ mm}$ . 利用 Pro/E 软件对式(10)进行求解,生成蜗杆齿面螺旋线,再用 Pro/E 软件边界混合、合并及实体化生成蜗杆. 蜗杆的齿面生成过程如图 3 所示.

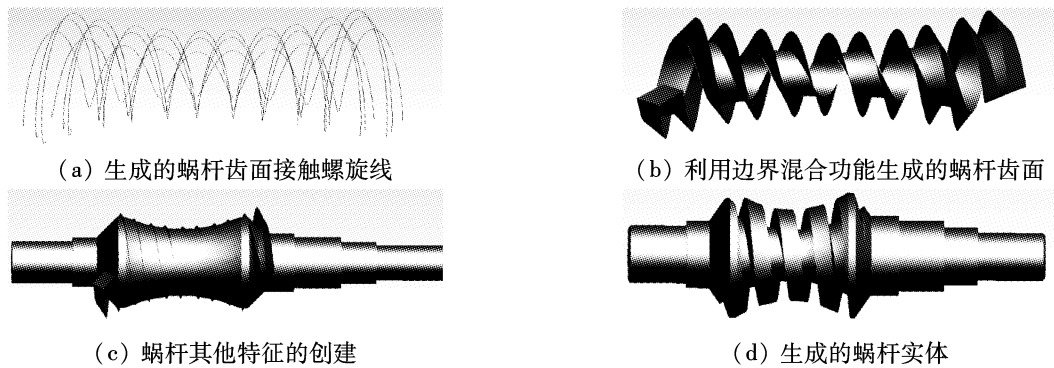


图 3 蜗杆三维齿面生成过程  
Fig. 3 The generate process of worm

图 3 表明通过式(10)能方便快捷地获得蜗杆齿面. 由于这种方法获得的蜗杆齿面是通过螺旋线曲面拟合而来,所以当接触螺旋线条数越多时,蜗杆齿面的拟合精度应越高,齿面也越接近于蜗杆的

理论齿面. 为了获得蜗杆齿面拟合精度,先用 Matlab 软件计算出蜗杆齿面接触线,见图 4,然后将 Matlab 计算得到的蜗杆齿面接触线结果导入 Pro/E 软件中,得到蜗杆真实齿面,见图 5.

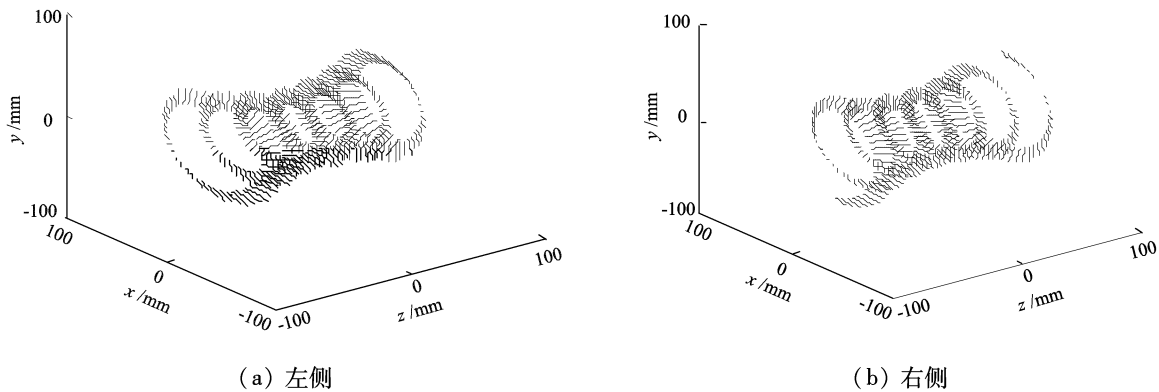


图 4 Matlab 软件获得的蜗杆齿面接触线  
Fig. 4 The contacting-line of worm

从图5看出,当蜗杆齿面接触螺旋线为4条时,用Pro/E软件拟合的蜗杆齿面与用Matlab导入的蜗杆齿面接触线之间存在一定干涉现象,齿面拟合较差,利用干涉分析得出,这两个面之间贴合的精度在0.0015~0.0018mm之间;当蜗杆齿面螺旋线

取到9条时,齿面拟合精度在0.00088~0.00100mm之间.根据设计需要,一般螺旋线达到9条时,能满足设计需要的精度,所求得的图形基本能完全准确地反映蜗杆的真实齿面.

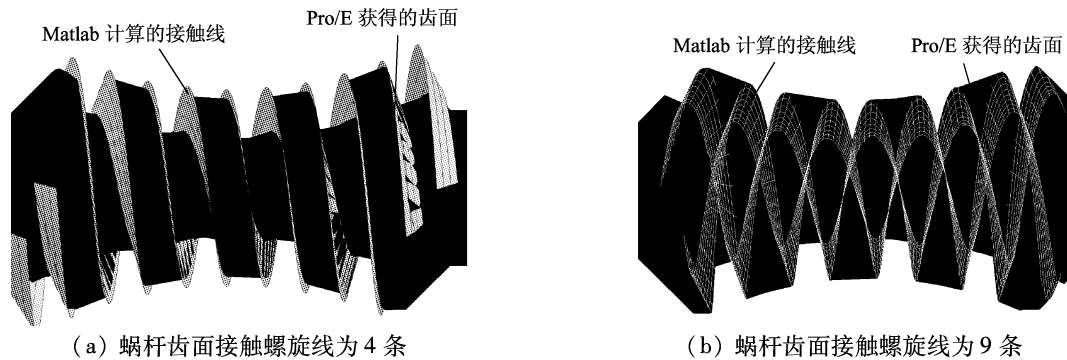


图5 蜗杆真实齿面  
Fig.5 Worm real tooth surface

### 3 结论

利用Pro/E软件计算了蜗杆齿面接触螺旋线并通过曲面造型功能拟合了蜗杆的啮合齿面.通过Matlab软件计算得到的蜗杆接触线与利用Pro/E拟合的蜗杆齿面进行对比分析可知,当蜗杆齿面接触螺旋线条数达到9条时,拟合精度达0.00100mm,真实反映了蜗杆的啮合齿面,满足设计要求.

该蜗杆的传动模型是在未考虑误差情况下建立的,获得的是理论齿面,加工后的实际齿面与理论齿面间的问题还待进一步研究.

#### 参考文献:

- [1] TED L, TOM W. Methods and apparatus for minimizing backlash in a planetary mechanism: USA, 7121973 B2 [P]. 2004-5-5.
- [2] 王进戈. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动机构: 中国, CN101290042 [P]. 2008-4-5.
- [3] 洪雷, 王进戈, 张均富, 等. 无侧隙双滚子包络环面蜗杆传动的啮合分析 [J]. 西华大学学报, 2008, 27(3): 18-23.  
HONG Lei, WANG Jinge, ZHANG Junfu, et al. Meshing analysis of non-backlash double roller enveloping hourglass worm gearing [J]. Journal of Xihua University, 2008, 27(3): 18-23.
- [4] JESPER B. Transmission error in anti-backlash conical involutes gear transmission: a global-local FE approach [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2005, 41: 431-457.
- [5] YANG Shyuecheng. Mathematical model of a stepped triple circular-arc gear [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 1019-1031.
- [6] HSIEH C F, HWANG Y W, FONG Z H. Study on the tooth profile for the screw claw-type pump [J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43: 812-828.
- [7] HUANG C L, FONG Z H, CHEN S D, et al. Profile correction of a helical gear shaping cutter using the lengthwise-reciprocating grinding method [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 401-411.
- [8] 马振群, 王小椿, 沈兵. 对称弧形线圆柱齿轮的真实齿面接触分析研究 [J]. 西安交通大学学报, 2005, 39(7): 722-725.  
MA Zhenqun, WANG Xiaochun, SHEN Bin. Real tooth contact analysis of the cylindrical gears with symmetrical arcuate tooth trace [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(7): 722-725.
- [9] LITVIN F L. Gear geometry and applied theory [M]. Englewood Cliffs: Prentices-Hall, 1994: 52-254.
- [10] 邓星桥, 王进戈, 方纯, 等. 仿人形机器人的自适应控制 [J]. 西南交通大学学报, 2008, 43(6): 767-771.  
DENG Xingqiao, WANG Jinge, FANG Chun, et al. Adaptive control of humanoid robot movement [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2008, 43(6): 767-771.
- [11] ZHANG Guanhui, WANG Jinge, et al. The study on rolling cone enveloping hourglass worm gearing [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1993, 16(4): 293-298.

(中文编辑: 秦瑜 英文编辑: 兰俊思)