

文章编号: 0258-2724(2010)04-0508-06 DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2010.04.004

# 粘贴钢板加固 RC 梁受弯裂缝宽度计算方法

单成林

(华南理工大学土木与交通学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 为控制粘贴钢板加固钢筋混凝土 (RC) 梁的裂缝宽度, 对梁加固前、后受弯裂缝产生的机理进行了分析, 并通过 6 根粘贴钢板加固 RC 简支梁加载的全过程试验, 观察裂缝的扩展规律. 在 RC 梁裂缝宽度现有计算方法的基础上, 给出了分阶段计算 RC 梁受弯裂缝宽度的方法和表达式, 并对不同受力阶段裂缝宽度的理论计算值与试验结果进行了比较. 研究表明: RC 梁在开裂状态下粘贴钢板加固后, 由于加固前后截面几何性质和受力状态改变, 在荷载作用下原有裂缝首先扩展; 最大裂缝宽度应按加固前和加固后分别计算, 然后迭加, 才符合梁的实际受力情况; 最大裂缝宽度发生在原钢筋重心附近梁侧面原有裂缝处, 而非新裂缝处.

**关键词:** 结构工程; 受弯构件; 粘贴钢板加固; 裂缝宽度; 计算方法

**中图分类号:** TU375.1 **文献标识码:** A

## Calculation Method of Bending Crack Width in RC Beams Strengthened by Bonding Steel Plate

SHAN Chenglin

(School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** In order to control the bending crack width of reinforced concrete (RC) beams strengthened by bonding steel plate, the crack generation mechanism before and after reinforcement was analyzed. The developing behavior of cracks was investigated through the whole loading process of six simply-supported RC beams strengthened with steel plate. Based on the existing calculation methods for crack width of RC beams, a two-stage calculation method of crack width was proposed. Moreover, the theoretical calculating values were compared with the measured values of crack width of the test beams in different loading stages. The results show that after a RC beam with cracks is strengthened by bonding steel plate, the original cracks develop firstly because of the changes of its cross-section geometric properties and load condition due to reinforcement. The calculation of the maximum crack width under bending loading should be divided into two parts, and then the two separate calculation results are superimposed to accord with the actual loading state. The control position of the maximum crack width is at the original crack nearby the center of gravity of steel bars, while not at a new crack.

**Key words:** structural engineering; flexural member; strengthening by bonding steel plate; crack width; computational method

采用粘贴钢板的方法加固钢筋混凝土梁, 在工程中已得到较广泛的应用, 其设计、计算方法已有

规范<sup>[1]</sup>. 工程实践中, 很多梁自重占的比重较大, 加固设计时需考虑二次受力. 目前, 这方面的研究

收稿日期: 2009-09-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50808085)

作者简介: 单成林(1958-), 男, 副教授, 工学硕士, 研究方向为新型桥梁结构设计理论及桥梁加固设计理论, 电话: 13922799477, E-mail: shanchenglin@163.com

和相关规范主要针对承载力的提高<sup>[1]</sup>,但粘贴钢板加固钢筋混凝土梁不仅能提高抗弯承载力,还有阻止和限制裂缝产生和扩展的作用。

加固的目的主要是提高承载力,其次是抗裂;而有的主要是阻止裂缝增多和扩展,其次是提高承载力。前者用于裂缝较严重的梁,后者用于裂缝不严重的梁的加固。因此,按加固目的不同,应分为承载能力加固和耐久性加固2类。

虽然混凝土结构的耐久性涉及混凝土的密实性、保护层厚度、裂缝和材料性质等因素<sup>[2]</sup>,但对原有结构而言,先天的不足大多难以弥补。耐久性加固采用粘贴附加物(钢板或其他纤维复合材料),主要就是阻止裂缝的产生和扩展。

实际上,计算受弯构件加固后承载力时有时会发现,即使去掉附加物对承载力的贡献,加固前构件仍能满足承载力的要求,考虑附加物的贡献只不过承载力提高一些<sup>[1]</sup>。对耐久性加固来说,尚无计算依据说明加固后的效果,如加固后梁的抗裂性、原有材料受力改善的程度、新增材料的利用程度、刚度的改善或维持程度,现行加固规范仍缺少这方面的内容<sup>[1]</sup>。然而,裂缝是钢筋混凝土构件损伤最直接的外观表现,利用其丰富的内含信息评估构件现状<sup>[3-6]</sup>,是工程结构鉴定与评估中非常有价值的课题。

因此,在钢筋混凝土梁裂缝宽度计算现有研究的基础上<sup>[7-10]</sup>,根据加固构件不同阶段受力的特点,探索粘贴钢板加固后裂缝扩展的机理,寻求加固后构件裂缝宽度的计算方法是十分必要的。

## 1 计算原理

采用粘贴附加物这类被动方法加固结构时,荷载卸得越多,新增材料利用率越高,原有材料受力的改善越好<sup>[11]</sup>,但往往只能卸除活载,结构自重难以卸除或只能少量卸除。加固前后构件控制截面的几何性质发生变化,自重较大时,受力计算要考虑二次受力的影响,裂缝宽度计算当然也要考虑二次受力的影响。

在自重作用下粘贴钢板加固时,待加固梁加固前在所有恒载和活载作用下已经开裂,虽然仅在自重作用下时裂缝宽度减小甚至闭合,但只要该处材料仍在弹性范围内工作,原来的主裂缝仍有一定宽度<sup>[4-6]</sup>,加固施工是在自重作用并带裂缝的状态下进行的。

本文中的试验证明,粘贴钢板加固后,随弯矩

增大,裂缝扩展首先出现在受拉钢筋重心位置附近梁侧面原有裂缝处<sup>[10]</sup>,裂缝从此处沿原有裂缝往上、下扩展到一定程度后,才会在其他位置产生新的裂缝。原有裂缝扩展初期,由于受拉边缘钢板的约束,向受压区扩展的速度比向受拉边快得多。加载过程中,在钢筋和钢板屈服前,原有裂缝的宽度始终较大,此处开裂截面的惯性矩最小,钢筋的拉应力也最大。因此,该薄弱截面是计算裂缝宽度的控制截面,而不是其他新出现裂缝的宽度控制加固设计,如图1。

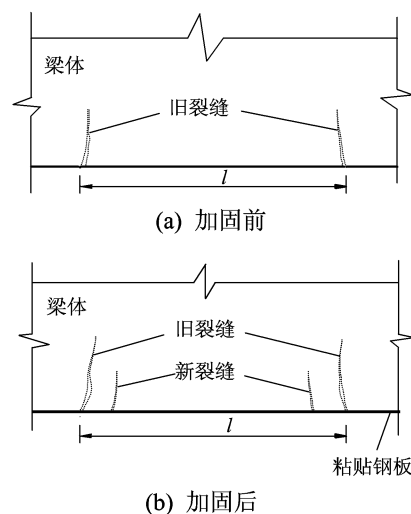


图1 粘贴钢板加固前、后裂缝扩展示意  
Fig. 1 Schematic diagram of crack development of RC beam strengthened by bonding steel plate before and after reinforcement

加固后,在所有荷载作用下裂缝的宽度由以下两部分组成:一是加固前在自重作用下的裂缝宽度,此时,各参数的计算只涉及原梁的截面尺寸和配筋。裂缝间距由加固前截面的几何性质和材料强度决定,计算加固后原有裂缝的最大宽度时,该间距始终存在,不随截面几何性质的改变而改变,除非是计算新出现的裂缝宽度。二是加固后在后加荷载作用下的裂缝宽度。此时,除原有裂缝间距不变外,其他参数的计算采用加固后截面的几何性质,所粘贴的钢板参与抵抗加固后荷载的作用。最终的裂缝宽度,即最优先控制的裂缝宽度为以上两阶段裂缝宽度之和,它是梁侧面原受拉钢筋重心位置附近原有裂缝处的裂缝宽度。对于新结构设计,由于国内外计算裂缝宽度的方法很多,不同行业规范的计算表达式不同,以下以文献[12]为基础,研究粘贴钢板加固钢筋混凝土受弯构件裂缝宽度的计算方法,计算原理也适用于类似受力构件的其他行业。

### 1.1 第1阶段裂缝宽度的计算

即加固前在自重作用下受弯构件裂缝宽度的计算. 如上所述, 最终裂缝宽度的控制位置仍在原有裂缝处. 也就是说, 该处裂缝的间距在加固前已形成, 主要与加固前原构件的材料性质、配筋数量和截面尺寸有关, 加固后不会改变. 除非是计算不控制设计的新裂缝的宽度, 只要开裂截面的材料仍在弹性范围内工作, 一般自重较大的构件有一定的裂缝宽度. 对于加固前的裂缝间距, 根据文献[2]和文献[12], 受弯构件的裂缝间距

$$l_{m1} = 1.9c + \frac{0.08d_{eq}}{\rho_{te}}, \quad (1)$$

式中:  $l_{m1}$  为梁在自重作用下的裂缝间距;  $c$  为原外层受拉钢筋边缘至截面侧边缘的距离;  $d_{eq}$  为原受拉钢筋的等效直径<sup>[12]</sup>;  $\rho_{te}$  为按加固前混凝土受拉有效截面面积计算的配筋比<sup>[12]</sup>.

式(1)用于计算第1阶段的裂缝宽度时, 有些参数含意有所不同, 即材料只计原构件的, 荷载只计自重.

恒载作用下, 裂缝宽度按式(2)计算:

$$\omega_1 = \alpha_{cr} \varphi_1 \frac{\sigma_{s1}}{E_s} l_{m1}, \quad (2)$$

式中:  $\omega_1$  为恒载作用下裂缝的宽度;  $E_s$  为钢筋的弹性模量;  $\alpha_{cr}$  为构件受力特征系数;  $\varphi_1$  为裂缝间受拉钢筋的应变不均匀系数;  $\sigma_{s1}$  为加固前恒载作用下开裂截面受拉钢筋重心处的应力.

构件受力特征系数考虑了: (1) 混凝土裂缝间距和宽度的离散性; (2) 荷载长期作用下受拉区混凝土的应力松弛、收缩、滑移和徐变等因素会增大裂缝宽度; (3) 裂缝间混凝土受拉应变的影响; (4) 构件受力性质的多种影响. 对于受弯构件, 试验确定的综合特征系数为 2.1<sup>[2,12]</sup>.

裂缝宽度主要与加固前原构件的钢筋和混凝土的材料性质、数量、截面尺寸、养护状况和受力性质等因素有关. 对原裂缝而言, 这些因素基本上已先天形成, 可以认为加固前后不变.

$\varphi_1$  虽然也可按文献[12]的近似公式计算, 但最好按原始的试验回归表达式计算<sup>[2]</sup>:

$$\varphi_1 = 1.1 \frac{1 - M_{cr1}}{M_{k1}}, \quad (3)$$

式中:  $M_{cr1}$  为开裂弯矩;  $M_{k1}$  为加固前永久荷载弯矩标准值.

$$M_{cr1} = 2S_{01}f_{tk}, \quad (4)$$

式中:  $S_{01}$  为加固前全截面换算截面重心轴以上或

以下部分面积对重心轴的面积矩;  $f_{tk}$  为混凝土轴心抗拉强度标准值.

$\sigma_{s1}$  虽然也可按文献[12]的近似公式计算, 但最好按材料力学的公式计算:

$$\sigma_{s1} = n_s M_{k1} \frac{h_{01} - x_1}{I_{cr1}}, \quad (5)$$

式中:  $n_s$  为钢筋与混凝土弹性模量之比;  $h_{01}$  为加固前截面受拉钢筋重心至受压边缘的距离;  $x_1, I_{cr1}$  分别为加固前开裂截面中性轴的位置和抗弯惯性矩.

### 1.2 第2阶段裂缝宽度的计算

即加固后在荷载作用下受弯构件裂缝宽度的计算. 同样, 构件加固后, 裂缝宽度的控制位置仍在原有裂缝处. 而原有裂缝的间距在加固前已经形成, 计算原有裂缝的扩展宽度时, 此裂缝间距不变, 且为最长的裂缝间距, 取与第1阶段计算时相同的值  $l_{m1}$ . 计算第2阶段裂缝宽度  $\omega_2$  的基本表达式类似于式(2), 但分别用  $\varphi_2$  和  $\sigma_{s2}$  代替  $\varphi_1$  和  $\sigma_{s1}$ , 参数的含意和取值不同:

(1) 裂缝间受拉钢筋的应变不均匀系数  $\varphi_2$  的计算公式类似于式(3)和(4);

(2)  $S_{01}$  取加固后(考虑原受拉钢筋与所贴钢板共同作用)全截面换算截面的面积矩  $S_{02}$ ;

(3) 加固后, 在荷载作用下, 开裂截面处受拉钢筋的应力  $\sigma_{s2}$  按式(5)计算, 其中截面的几何性质  $h_{01}, x_1$  和  $I_{cr1}$  分别用加固后(考虑原受拉钢筋与所贴钢板共同作用)开裂截面换算截面的有效高度  $h_{02}$ 、中性轴位置  $x_2$  和抗弯惯性矩  $I_{cr2}$  替换, 且  $M_{k1}$  代之以加固后荷载效应标准组合(一般为活载, 不含加固前的恒载)作用产生的弯矩  $M_{k2}$ .

加固后, 在所有恒载和活载作用下最终的裂缝宽度  $\omega_{max}$  为第1阶段的裂缝宽度  $\omega_1$  与第2阶段的裂缝宽度  $\omega_2$  之和. 如前所述, 构件受力特征系数  $\alpha_{cr}$ , 裂缝间距  $l_{m1}$  和钢筋弹性模量  $E_s$  加固前后不变, 只有裂缝间受拉钢筋的应变不均匀系数  $\varphi_1, \varphi_2$  以及受拉钢筋的应力  $\sigma_{s1}, \sigma_{s2}$  与加固前、后荷载及截面几何性质有关, 因此, 有

$$\omega_{max} = \omega_1 + \omega_2 = \frac{\alpha_{cr}}{E_s} (\varphi_1 \sigma_{s1} + \varphi_2 \sigma_{s2}) l_{m1}. \quad (6)$$

计算粘贴钢板加固后新的裂缝宽度时, 受拉钢筋的截面面积取原受拉钢筋截面面积  $A_s$  与粘贴钢板截面面积  $A_{sp}$  之和, 等效直径  $d_{eq}$  应按  $d_{eq} = 4(A_s + A_{sp}) / (\sum n_i v_i s_i + 0.7b_{sp})$  计算, 其中  $b_{sp}$  为粘贴钢板的宽度,  $n_i$  为原第  $i$  种受拉钢筋的根数,  $s_i$  为原第  $i$  种受拉钢筋的周长,  $v_i$  为原第  $i$  种受拉钢

筋的相对粘结特性系数(对于带肋钢筋,取  $v_i = 1.0$ ;对于光面钢筋,取  $v_i = 0.7$ ).

计算新裂缝宽度时,所有参数取值均计入钢板的作用,重新按加固后截面的几何性质计算新裂缝间距  $l_{m2}$ ,再按式(2)计算新裂缝宽度  $\omega_n$ .

## 2 试验分析

试验梁长 2 m,两支承点间的距离 1.9 m,梁高 250 mm,宽 150 mm,C40 混凝土.钢筋笼由  $\phi 8$  的受拉、受压钢筋(R235)和  $\phi 6$  的箍筋(间距 15 mm)形成.

共 6 根试验梁,受拉边粘贴厚 4 mm(实测 3.8 mm),长 1 800 mm,宽 100 mm 的 Q235 钢板.

加固前,加载至跨中弯矩达 7 kN·m 时,所有梁均对称于跨中线出现 2 条裂缝,间距 120 ~ 130 mm.用裂缝测宽仪测得距梁底 30 mm 处梁侧面裂缝宽度约为 0.065 mm,按式(2)计算的裂缝宽度为 0.078 mm.为维持试验梁在一定裂缝宽度下加固,卸除荷载后,在梁上堆积重物,与梁自重一起使跨中产生 1.95 kN·m 的弯矩时,按式(2)计算裂缝宽度  $\omega_1 = 0.023$  mm,测试宽度为 0.015 mm.此时,采用涂抹方法粘贴钢板加固.加固前、后加载方式均采用对称于跨中两点加载,加载点间距为 500 mm,见图 2.加固前、后裂缝宽度的理论计算参数见表 1.

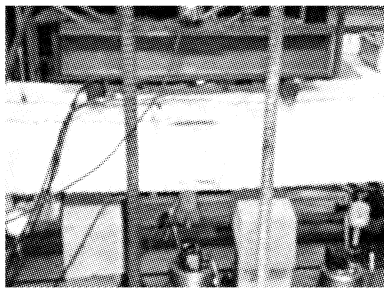


图 2 试验梁加载

Fig. 2 Loading layout of the test beams

当粘结胶达到强度后,进行加固后的加载试验.粘结胶采用爱劳达的相关产品,质量检验符合相关规范要求.粘贴两种材料加固的梁均不采用其它锚固措施,但有足够的锚固长度.

数据采集包括应变和挠度采集,正式采集前预先加载 3 次,消除各种变形的影响,再将各采集点调试平衡.加载等级为 0.5 kN,并相应采集应变和挠度数据.梁内原受拉钢筋跨中布置 4 个钢筋应变采集点,绑扎钢筋前已在每根受拉钢筋上、下侧贴

好应变片;在跨中梁顶面及两侧共布置 4 个混凝土应变采集点.

表 1 加固前、后开裂截面的主要计算参数

Tab. 1 Main parameters of cracking sections before and after the reinforcement

参数	加固前	加固后
受拉钢筋截面面积 $A_s/\text{mm}^2$	101	481
受压钢筋截面面积 $A_s'/\text{mm}^2$	57	57
中性轴位置 $x/\text{mm}$	41.9	82.0
面积矩 $S_0/\text{cm}^3$	1 206.57	1 356.91
开裂弯矩 $M_{cr}/(\text{kN} \cdot \text{m})$	5.79	6.51
惯性矩 $I_{cr}/\text{cm}^4$	2 595.55	11 178.90
裂缝间距 $l_m/\text{mm}$	129.44	95.00
钢筋拉应力 $\sigma_s/\text{MPa}$	88.85	—

采用粘贴钢板加固已产生裂缝的钢筋混凝土试验梁,当跨中弯矩加载到 14 kN·m 时,由于原裂缝截面为最薄弱截面,原裂缝首先明显变宽.随荷载增大,混凝土回缩、钢筋滑移受到钢筋和钢板与混凝土粘结力的双重约束.特别是增加了梁底钢板的约束后,裂缝宽度发展受到限制,先向上发展到一定宽度,然后向下、向上扩展.原有裂缝扩展的同时,双重约束粘结力将钢筋和钢板中的部分应力向混凝土中传递,混凝土应力增大到临开裂的状态时,新裂缝出现,但裂缝间距缩短.跨中弯矩达 16 kN·m 时,两裂缝间混凝土的拉应力达到极限抗拉强度,新裂缝出现,随后对称出现另一条新裂缝,裂缝间距变小,如图 3.

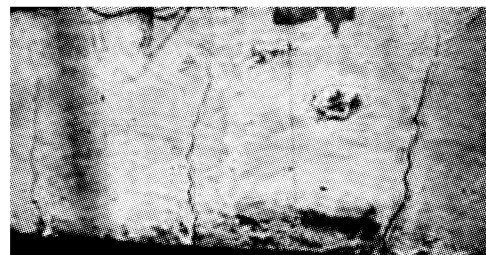


图 3 梁体破坏前原有裂缝和新裂缝的扩展

Fig. 3 Developing of original cracks and new cracks before destruction

随荷载继续增大,裂缝数量不断增加,共出现 6 条裂缝时达到稳定,此后不再产生新的主裂缝.当跨中弯矩达 20 kN·m 时,用裂缝测宽仪测得距梁底 30 mm 处梁侧面新裂缝的最大宽度约为 0.066 mm,原有裂缝最大宽度为 0.173 mm 左右.由于受到钢板的约束,裂缝形态细而长.

不同荷载等级时,新裂缝、原有裂缝宽度的计算值、测试值以及主要参数见表 2.其中,  $M_{k2}$  为加

固后跨中弯矩(加载等级); $\varphi_2$ 为裂缝间受拉钢筋应变不均匀系数的计算值; $\sigma_{s2}$ 为加固后荷载作用下受拉钢筋应力的计算值; $\omega_2$ 和 $\omega_r$ 分别为加固后荷载作用下原有裂缝宽度的计算值和平均测试值; $\omega_n$ 和 $\omega_m$ 分别为加固后荷载作用下新裂缝宽度的计算值和平均测试值.测试值小数点后第3位系估计.原有裂缝宽度的计算值按式(6),新裂缝宽度的计算值计入粘贴钢板的作用.

表2 加固后裂缝宽度的计算值和平均测试值  
Tab.2 The theoretical and measured values of crack width after the reinforcement

$M_{k2}/$ (kN·m)	$\varphi_2$	$\sigma_{s2}/$ MPa	$\omega_2/$ mm	$\omega_r/$ mm	$\omega_n/$ mm	$\omega_m/$ mm
2	0.200	16.5	0.004	0.015	0.003	—
4	0.200	33.0	0.008	0.020	0.006	—
6	0.200	49.6	0.012	0.030	0.009	—
8	0.204	66.1	0.017	0.045	0.013	—
10	0.383	82.6	0.041	0.055	0.030	—
12	0.503	99.1	0.065	0.075	0.047	—
14	0.588	115.6	0.088	0.105	0.065	—
16	0.652	132.2	0.112	0.130	0.082	0.070
18	0.702	148.7	0.135	0.150	0.099	0.085
20	0.742	165.3	0.159	0.173	0.116	0.100

表2中,原有裂缝宽度的计算值 $\omega_2$ 只是加固后荷载作用下的裂缝宽度,未加上加固前的裂缝宽度 $\omega_1=0.023$  mm.

当跨中弯矩为20 kN·m时,各梁新裂缝、原有裂缝宽度的计算值和平均测试值见表3(测试值小数点后第3位系估计).

表3 试验梁裂缝宽度的计算值和平均测试值  
Tab.3 The theoretical and measured values of crack width of the test beams

裂缝宽度	梁号						
	1	2	3	4	5	6	
原裂缝	测试值	0.170	0.175	0.170	0.180	0.175	0.170
	计算值	0.182	0.182	0.182	0.182	0.182	0.182
新裂缝	测试值	0.070	0.065	0.070	0.065	0.065	0.060
	计算值	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075

裂缝宽度的测试值普遍小于计算值(表2和表3),主要原因是测试值为瞬时值,而计算值中考虑了荷载长期作用下受拉区混凝土的应力松弛、收缩、滑移、徐变以及裂缝间距、宽度的离散性等不利因素.

随荷载增大,新裂缝的扩展逐渐加快.当跨中

弯矩达38 kN·m时,钢筋和钢板应力已超过屈服极限,新裂缝的最大宽度达到或超过原有裂缝的最大宽度,跨中钢板剥离,梁体破坏,裂缝扩展(图4).从裂缝开裂过程的分析可知,裂缝分布与钢筋和钢板对混凝土的约束密切相关.粘贴钢板对混凝土回缩起到了约束作用,这种约束通过裂缝间距和宽度的变化反映出来:裂缝间距和裂缝宽度均减小.粘贴钢板能够显著改善钢筋混凝土梁的裂缝扩展状况,对裂缝超宽起到了很好的抑制作用.

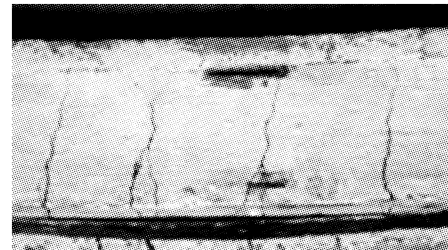


图4 梁体破坏后的原有裂缝和新裂缝  
Fig.4 Developing of original cracks and new cracks after the destruction

### 3 结论

(1) 粘贴钢板加固自重作用下带裂缝的RC梁,由于加固前后梁截面几何性质和受力状况不同,原有裂缝首先扩展,到一定程度后才出现新裂缝,最大裂缝宽度应按加固前和加固后2个阶段分别计算,然后迭加,才符合梁的实际受力情况.

(2) 计算加固后原有裂缝的宽度时,裂缝间距和构件受力特征系数与加固前相同,其他参数要考虑截面几何性质的变化.

(3) 粘贴钢板加固RC受弯构件,裂缝宽度由梁侧面原受拉钢筋重心附近原有裂缝的宽度控制,而非新出现的裂缝宽度控制.

### 参考文献:

- [1] 四川省建筑科学研究院. GB 50367-2006 混凝土结构加固设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社, 2006.
- [2] 过镇海,时旭东. 钢筋混凝土原理和分析[M]. 北京:清华大学出版社,2003: 416-431.
- [3] FROSCHE R J. Another look at cracking and crack control in reinforced concrete[J]. ACI Structural Journal, 1999, 96(3): 437-442.
- [4] SAKEY S, BINOJ D. Crack width prediction in RC members in bending: A fracture mechanics approach [C] // Proceedings of the 6th International Conference

- on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures. [s.l.]: Elsevier Inc., 2007: 833-839.
- [5] BRIAN S, ROBERT L. Crack widths in reinforced concrete[C]//Proceedings of the Annual Conference of Canadian Society for Civil Engineering. Regina: Canadian Society for Civil Engineering, 1999: 315-324.
- [6] GILBERT R. Control of flexural cracking in reinforced concrete[J]. ACI Structural Journal, 2008, 105(3): 301-307.
- [7] MARTIN B. Finite element crack propagation calculation using trial cracks[J]. Computational Materials Science, 2008, 43(1): 179-183.
- [8] BYUNG H O, SE H K. Advanced crack width analysis of reinforced concrete beams under repeated loads[J]. Journal of Structural Engineering, 2007, 133(3): 411-420.
- [9] TAMMO K, LUNDGREN K, THELANDERSSON S. Nonlinear analysis of crack widths in reinforced concrete [J]. Magazine of Concrete Research, 2009, 61(1): 23-34.
- [10] FROSCHE R J. Modeling and control of side face beam cracking[J]. ACI Structural Journal, 2002, 99(3): 376-385.
- [11] EL-SHIHY A, SHEHAB H, GHITH H, et al. Strengthening of loaded reinforced concrete beams in flexure[C] // Proceedings of the International Conference on Repair and Renovation of Concrete Structures. Dundee: Thomas Telford Services Ltd., 2005: 389-397.
- [12] 中国建筑科学研究院. GB 50010-2002 混凝土结构设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2002.

(中、英文编辑:付国彬)

(上接第501页)

- LIAO Ridong, ZUO Zhengxing, CHEN Hong, et al. The modal characteristics study of turbine blades with considering the influence of spin softening[J]. Transactions of CSICE, 2000, 18(1): 77-79.
- [5] 李永强,郭星辉,李健. 科氏力对旋转叶片动频的影响[J]. 振动与冲击,2006,25(1): 79-85.
- LI Yongqiang, GUO Xinghui, LI Jian. Effect of Coriolis force on dynamic frequency of high speed spinning blade [J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(1): 79-85.
- [6] 邱志成. 旋转柔性梁系统振动频响特性分析及振动抑制[J]. 振动与冲击,2008,27(6): 75-80.
- QIU Zhicheng. Vibration frequency response feature analysis and vibration suppression of a rotating flexible beam [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(6): 75-80.
- [7] 李德源,叶枝全,陈严. 风力机旋转叶片的多体动力学数值分析[J]. 太阳能学报,2005,26(5): 473-480.
- LI Deyuan, YE Zhiquan, CHEN Yan. Muti-body dynamics numerical analysis of rotating blade of horizontal axis wind turbine[J]. Acta Energiæ Solaris Sinica, 2005, 26(5): 473-480.
- [8] HOSSEINI S A A, KHADEM S E. Combination resonances in a rotating shaft [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(8): 1535-1547.
- [9] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 5版. 北京:高等教育出版社,2002: 301-307.
- [10] 曹树谦,张文德,萧龙翔. 振动结构模态分析——理论、实验与应用[M]. 天津:天津大学出版社,2001: 28-32.
- [11] 陈德成,于年才,郑万泔. 粘性阻尼模型的实模态与复模态解藕法的物理特征[J]. 力学与实践,1987, 9(5): 27-29.
- CHEN Decheng, YU Niancai, ZHEN Wangan. Physical characteristics of real modal and complex modal decomposition of viscous damping model[J]. Mechanics and Application, 1987, 9(5): 27-29.
- [12] GINSBERG J H, SEEMANN W E. Mechanical and structural vibrations: Theory and applications [M]. New York: John Wiley, 2001: 471-506.

(中、英文编辑:付国彬)