

# 非理想 CSI 下 MIMO MRC 系统多用户分集性能分析\*

唐冬<sup>1</sup>, 黄高飞<sup>2</sup>, 吕明霞<sup>1</sup>

(1. 广州大学机械与电气工程学院, 广州 510006; 2. 中山大学信息科学与技术学院, 广州 510275)

**摘要:** 针对在无线多输入—多输出(MIMO)通信系统的发射端采用波束成形、接收端采用最大比合并的 MIMO MRC 系统, 考虑收发端仅能获得存在信道估计误差的非理想信道信息(CSI)且系统受到共信道干扰这一条件, 分析系统的多用户分集性能。导出封闭形式的信号干扰噪声比的概率分布函数表达式和以平均容量的形式给出的系统多用户分集性能表达式。数值仿真证实了理论分析的结果。研究表明, 信道估计误差和共信道干扰均会降低系统的多用户分集性能, 而信道估计的精度是影响系统多用户分集性能的关键因素。

**关键词:** 信道估计误差; 共信道干扰; 多输入—多输出; 最大比合并; 多用户分集

**中图分类号:** TN 911.5      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2010)05-1925-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.05.092

## Analysis on multiuser diversity of MIMO MRC systems under imperfect channel state information

TANG Dong<sup>1</sup>, HUANG Gao-fei<sup>2</sup>, LV Ming-xia<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical & Electrical Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China; 2. School of Information Science & Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The performance of multiuser diversity in multiple-input multiple-output wireless systems employing transmit beamforming and maximum ratio combining (MIMO MRC) with channel estimation error in the presence of co-channel interferences (CCIs) was analyzed. Exact closed-form cumulative distribution function expression of the signal-to-noise-plus-interference ratio (SINR) was derived. The average capacity of MIMO MRC systems with multiuser diversity was presented. Numerical results demonstrate the accuracy of analytical expressions. Results show that the performance of the average capacity is deteriorated as the power of CCI and the channel estimation error increase. Moreover, the accuracy of the channel estimation is crucial for the multiuser diversity gain.

**Key words:** channel estimation error; co-channel interference; multiple-input multiple-output (MIMO); maximum ratio combining (MRC); multiuser diversity

在收发两端安置多根天线的多输入—多输出(MIMO)无线通信系统, 由于具有大幅度提高无线链路频谱效率的潜力而受到广泛关注。在 MIMO 的发射端采用波束成形、接收端采用最大比合并的(MRC)的 MIMO MRC 系统, 当收发两端已知精确的信道信息(CSI)时, 可以克服共信道干扰(CCI), 并在接收端获得最大的合并输出信噪比。文献[1, 2]在理想 CSI 假设下研究了存在共信道干扰时的 MIMO MRC 系统性能。文献[3]分析了机会波束成形下的速率。文献[4]首次分析了存在非理想 CSI, 即存在信道估计误差时的系统性能。文献[5]导出了 MIMO MRC 系统存在非理想 CSI 和 CCI 时的信号干扰噪声比的统计分布、中断概率和误符号率(ASER)表达式。然而, 以上研究仅限于系统的单用户性能, 没有考虑基站服务多用户的情形。在对有限时延不很敏感的数据通信中, 考虑到不同用户到基站的信道独立衰落特性, 当许多用户需要共享相同的信道时, 系统可以通过在每个时隙从多个需要通信的用户中调度信道条件最好的用户进行通信, 使系统的吞吐量达到最大, 由此获得吞吐量增益——多用户分集增益<sup>[6, 7]</sup>。文献[8]仅在理想信道估计的假设下分析了 MIMO MRC 系统的多用户

分集性能。

### 1 信号和信道模型

考虑由一个基站、 $K$  个期望移动用户、来自小区内部或相邻小区的  $L$  个共信道干扰构成的 MIMO 无线通信链路。设基站安装  $n_r$  根发射天线, 每个期望移动用户安装  $n_r$  根接收天线, 则在发射端采用波束成形、接收端采用最大比合并的 MIMO MRC 系统中,  $K$  个期望移动用户中的任意用户  $k$  的接收矢量为

$$Y_k = \sqrt{P_{k0}} H_{k0} w_{kT} x_{k0} + H_I P_I^{\frac{1}{2}} x_I + n_k \quad (1)$$

其中:  $H_{k0} = \{h_{k0,ij}, 1 \leq j \leq n_r, 1 \leq i \leq n_r\}$  为用户  $k$  与基站间的  $n_r \times n_r$  复数信道矩阵, 矩阵中的元素  $h_{k0,ij}$  表示基站的第  $j$  根天线与期望用户  $k$  的第  $i$  根天线之间的信道;  $H_I$  是由  $L$  个干扰构成的  $n_r \times L$  复数信道矩阵, 即  $H_I = \{h_{I,ij}, 1 \leq j \leq L, 1 \leq i \leq n_r\}$ ;  $x_{k0}$  是发送给期望用户  $k$  的符号;  $x_I$  为干扰产生的  $n_r \times 1$  复数发送符号矢量, 即  $x_I = [x_1, x_2, \dots, x_L]^T$ ;  $n_k$  表示零均值、方差为  $\sigma_n^2$  的  $n_r \times 1$  复数高斯白噪声矢量;  $Y_k$  是用户  $k$  的  $n_r \times 1$  接收信号矢

收稿日期: 2009-10-13; 修回日期: 2009-11-25      基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60672048); 广东省自然科学基金资助项目(7301261); 广州市科技计划资助项目(2009J1-C421-2); 广州市教育局科技计划资助项目(08C061, 07B171)

作者简介: 唐冬(1967-), 男, 辽宁大连人, 副教授, 博士, 主要研究方向为无线多输入多输出、无线资源调度、感知无线电等(tangdong@gzhu.edu.cn); 黄高飞(1978-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为功率分配、合作通信等; 吕明霞(1966-), 女, 高级工程师, 主要研究方向为网络通信、移动计算。

量;  $P_{k0}$  为用户  $k$  的平均接收信号功率;  $P_i = \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_L\}$  为对角矩阵, 其中  $P_i (i=1, 2, \dots, L)$  为用户  $k$  的接收端收到的来自第  $i$  个干扰的平均接收功率;  $w_{kT}$  为基站发射端对用户  $k$  的波束成形矢量, 用以提高信号的指向性, 降低干扰信号的影响, 且  $\|w_{kT}\|^2 = 1$ 。与文献[5]类似, 假设用户信道矩阵  $H_{k0}$  和干扰矩阵  $H_i$  为独立矩阵, 其矩阵元素为独立同分布的零均值、单位方差的复高斯随机变量, 且信道矩阵  $H_{k0}$ 、 $H_i$ 、噪声矩阵  $n_k$  彼此相互独立。另外假设给用户  $k$  的发射符号  $x_{k0}$  和来自第  $i$  个干扰的符号  $x_i$  是独立的, 且均值为零、方差为 1。

高性能的 MIMO 系统通常是需要根据 CSI 调整功率分配、编码方式的闭环自适应系统, CSI 的精度对 MIMO 系统的性能影响很大。实际应用中, 根据 CSI 的获取方式不同, 误差的主要来源有多种情况。在 TDD 模式下, 发射端通过上行链路来估计下行链路的 CSI, 高斯噪声是信道估计误差的主要来源; 在 FDD 模式下, 发射端 CSI 来自于接收端对 CSI 估计的反馈, 反馈信息的量化误差、反馈信道的误差和反馈延迟是误差的主要来源。考虑到实际应用中存在以上因素, MIMO MRC 系统的发射和接收端通常也难以获得精确的 CSI。此时, 发射端仅能够获得用户  $k$  的信道矩阵  $H_{k0}$  的估计  $\hat{H}_{k0}$ , 两者的关系可表述为

$$E = H_{k0} - \hat{H}_{k0} \quad (2)$$

其中: 信道估计误差  $E$  是与信道矩阵  $H_{k0}$  相互独立的、均值为零、方差为  $\varepsilon^2$  的复高斯随机矩阵。  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  表示信道估计的精确程度,  $\varepsilon = 0$  表明信道估计的误差为零。信道估计矩阵  $\hat{H}_{k0}$  是  $n_R \times n_T$  复高斯随机矩阵, 其元素是均值为零、方差为  $\mu^2 = 1 - \varepsilon^2$  的独立同分布复高斯随机变量。在存在信道估计误差和共信道干扰的 MIMO MRC 系统中, 用户  $k$  接收端的输出 SINR 为<sup>[5]</sup>

$$v_k = \frac{\alpha \lambda_{\max}}{1 + \sum_{i=1}^L \frac{\beta_i}{\lambda_{\max}} \|\hat{U}_{\max}^H \hat{H}_{k0}^H H_{i,i}\|^2} \quad (3)$$

其中:  $\hat{U}_{\max}$  是矩阵  $\hat{H}_{k0}^H \hat{H}_{k0}$  的最大特征值  $\lambda_{\max}$  对应的单位范数的特征矢量<sup>[1,2]</sup>;  $H_{i,i}$  为干扰矩阵  $H_i$  的第  $i$  列。符号  $\|F\|$  表示矩阵  $F$  的范数。式(3)中的参数  $\alpha$  和  $\beta_i$  可表示为

$$\alpha = \frac{(1 - \varepsilon^2) P_{k0}}{(1 + \varepsilon^2 P_{k0} / \sigma_n^2) \sigma_n^2}, \beta_i = \frac{P_i}{(1 + \varepsilon^2 P_{k0} / \sigma_n^2) \sigma_n^2} \quad (4)$$

## 2 性能分析

### 2.1 输出 SINR 的统计特性

为便于分析, 设  $m = \min\{n_T, n_R\}$ ,  $n = \max\{n_T, n_R\}$ 。经过推导,  $\alpha \lambda_{\max}$  的概率密度函数(PDF)为

$$p_y(y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=n-m}^{m+n-2k} \frac{c_{kl} k^{l+1}}{l!} \alpha^{-(l+1)} y^l e^{-ky} \quad (5)$$

其中:  $K_{mn} = (\prod_{i=1}^m (m-i)! \cdot \prod_{j=1}^m (m-j)!)^{-1}$ ,  $c_{kl} = a_{kl} K_{mn} l! / k^{l+1}$ 。文献[8]给出了参数  $a_{kl}$  的简化数值计算方法。

与文献[2,5]类似, 可将  $L$  个共信道干扰分为  $p$  组, 每组有  $t_i$  个干扰( $i=1, 2, \dots, p$ ), 设第  $i$  组的  $t_i$  个干扰具有相同的功率  $P_i$ , 则式(3)中  $\sum_{i=1}^L \frac{\beta_i}{\lambda_{\max}} \|\hat{U}_{\max}^H \hat{H}_{k0}^H H_{i,i}\|^2$  项的 PDF 为

$$p_x(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{t_i} \frac{b_{ij}}{(j-1)!} x^{j-1} e^{-\frac{x}{\beta_i}} \quad (6)$$

与文献[9]的方法类似, 式(6)中的参数  $b_{ij}$  可记为如下

形式:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(\beta_i)^{t_i}} \sum_{\tau(i,j)} \prod_{k=1}^p \binom{t_k + q_k - 1}{q_k} \frac{(\beta_k)^{q_k}}{(1 - \beta_k / \beta_i)^{t_k + q_k}} \quad (7)$$

其中:  $\tau(i, j)$  表示非负整数构成的  $p$  元组 ( $p$ -tuples) 集合, 具体形式为

$$\tau(i, j) = \{ (q_1, q_2, \dots, q_p) : q_i = 0, \sum_{k=1}^p q_k = t_i - j \} \quad (8)$$

根据式(3)(5)和(6),  $v_k$  的 PDF 为

$$f_k(v) = \int_0^\infty (1+x) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{t_i} \frac{b_{ij}}{(j-1)!} x^{j-1} e^{-\frac{x}{\beta_i}} \times \sum_{k=1}^m \sum_{l=n-m}^{m+n-2k} \frac{c_{kl}}{l!} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{l+1} v^l (1+x)^l e^{-\frac{k}{\alpha}(1+x)} dx = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{t_i} \sum_{l=n-m}^{m+n-2k} \frac{b_{ij} c_{kl}}{(j-1)! l!} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{l+1} v^l e^{-\frac{k}{\alpha}v} \times \int_0^\infty (1+x)^{l+1} x^{j-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta_i} + \frac{k}{\alpha}\right)x} dx \quad (9)$$

采用文献[10]的 1.111 式和 3.351.3 式, 即

$$(\alpha + x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r \alpha^{n-r} \quad (10)$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-\mu x} dx = n! \mu^{-n-1} \quad (11)$$

则式(9)中的积分项  $f'(v)$  可简化为

$$f'(v) = \sum_{r=0}^{l+1} \binom{l+1}{r} \left(\frac{\alpha \beta_i}{\alpha + k \beta_i v}\right)^{r+j} (r+j-1)! \quad (12)$$

将式(12)代入式(9), 经过整理, 得到用户  $k$  接收端的输出 SINR 的 PDF 表达式

$$f_k(v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{t_i} \sum_{l=n-m}^{m+n-2k} \sum_{r=0}^{l+1} \binom{l+1}{r} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{l+1} \times \frac{b_{ij} c_{kl} (r+j-1)!}{(j-1)! l!} \left(\frac{\alpha \beta_i}{\alpha + k \beta_i v}\right)^{r+j} v^l e^{-\frac{k}{\alpha}v} \quad (13)$$

### 2.2 多用户 MIMO MRC 系统的平均容量

为获得多用户分集增益, 考虑基站在每个时隙从  $K$  个期望用户中选择瞬时 SINR 最大的用户  $k^*$  进行传输, 其余  $K-1$  不参与传输并等待下一个时隙, 直到在某个时隙由于其 SINR 最大而被选中。调度策略可表示为

$$k^* = \arg \max_{k \in \{1, \dots, K\}} v_k \quad (14)$$

根据顺序统计理论, 多用户 MIMO MRC 系统中被选中用户  $k^*$  的输出 SINR 的 PDF 为

$$f_{k^*}(v) = K f_k(v) [F_k(v)]^{K-1} \quad (15)$$

其中:  $F_k(v)$  为期望用户  $k$  的输出 SINR 的概率分布函数(CDF), 即

$$F_k(v) = \int_{-\infty}^v f_k(u) du \quad (16)$$

改变式(9)和(15)的积分顺序, 输出 SINR 的 CDF 可由下式计算

$$F_k(v) = \int_{w=0}^v \int_{x=0}^\infty (1+x) p_y(w(1+x)) p_x(x) dx dw = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{t_i} \sum_{l=n-m}^{m+n-2k} \sum_{r=0}^{l+1} \frac{b_{ij} c_{kl}}{(j-1)! l!} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{l+1} \times \underbrace{\int_{x=0}^\infty x^{j-1} (1+x)^{l+1} e^{-\frac{1}{\beta_i}x} \int_{w=0}^v w^l e^{-\frac{k}{\alpha}(1+x)w} dw dx}_{F''(x)} \quad (17)$$

为简化式(17), 采用文献[10]的 8.350.1 式, 即  $\int_0^x e^{-t} t^{a-1} dx = \gamma(a, x)$ 。其中  $\gamma(a, x)$  为不完全 Gamma 函数。式(17)中的积分项  $F''(x)$  可表示为

$$F''(x) = \left(\frac{\alpha}{(1+x)k}\right)^{l+1} \gamma(l+1, \frac{k}{\alpha}(1+x)v) \quad (18)$$

考虑到

$$\gamma(n+1, x) = n! [1 - e^{-x} (\sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!})]; n = 0, 1, \dots \quad (19)$$

经过整理,式(17)中的积分项  $F''(x)$  改写为

$$F''(x) = (\frac{\alpha}{(1+x)^k})^{l+1} l! [1 - e^{-\frac{k}{\alpha}(1+x)v} (\sum_{s=0}^l \frac{(\frac{k}{\alpha}v(1+x))^s}{s!})] \quad (20)$$

由式(20),式(17)中的积分项  $F'(x)$  整理为

$$F'(x) = \int_{x=0}^{\infty} l! x^{j-1} e^{-\frac{x}{\beta_i}} (\frac{\alpha}{k})^{l+1} dx - \int_{x=0}^{\infty} l! x^{j-1} e^{-\frac{x}{\beta_i}} (\frac{\alpha}{k})^{l+1} e^{-\frac{k}{\alpha}(1+x)v} (\sum_{s=0}^l \frac{(\frac{k}{\alpha}(1+x)v)^s}{s!}) dx \quad (21)$$

将式(21)代入(17),经过一系列推导,得到输出 SINR 的 CDF 封闭表达式

$$F_k(v) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\sum_{l=n-m}^{m+n-2k} b_{ij} c_{kl}) \times [(\beta_i)^j - \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \binom{r+j-1}{j-1}! (\frac{kv}{\alpha})^s e^{-\frac{kv}{\alpha}} (\frac{\alpha\beta_i}{\alpha+k\beta_i v})^{r+j}] \quad (22)$$

存在信道估计误差和共信道干扰的多用户 MIMO MRC 的平均容量可由下式计算<sup>[11]</sup>

$$C = \int_0^{\infty} \log_2(1+v) f_{k*}(v) dv \quad (23)$$

由式(13)(15)(22),则式(23)可表示为

$$C = K \int_0^{\infty} \log_2(1+v) [\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\sum_{l=n-m}^{m+n-2k} b_{ij} c_{kl})^{l+1} (\frac{k}{\alpha})^{l+1} \times \frac{b_{ij} c_{kl} (r+i-1)!}{(j-1)! l!} (\frac{\alpha\beta_i}{\alpha+k\beta_i v})^{r+j} v^l e^{-\frac{kv}{\alpha}} \times \{ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\sum_{l=n-m}^{m+n-2k} b_{ij} c_{kl}) \times [(\beta_i)^j - \sum_{s=0}^l \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} \binom{r+j-1}{j-1}! (\frac{kv}{\alpha})^s e^{-\frac{kv}{\alpha}} (\frac{\alpha\beta_i}{\alpha+k\beta_i v})^{r+j}] \}^{K-1} dv \quad (24)$$

由此,得到了存在信道估计误差和共信道干扰的多用户 MIMO MRC 的平均容量表达式。可以看出,随着参与调度的用户数  $K$  的增加,系统平均容量逐渐提高。此外,系统平均容量随着信道估计误差和 CCI 功率的增加而逐渐降低。

### 3 仿真和分析

为了验证上述理论分析的正确性,采用 Monte Carlo 方法对系统的平均容量进行了仿真。仿真中考虑准静态信道,即在一个数据块的持续时间内信道不变化,而在数据块之间信道独立变化。每个仿真点取 10 万个采样。

考虑  $n_R = n_T = 2$  的两发两收 MIMO MRC 系统,系统受到四个共信道干扰的影响,每个干扰的干扰噪声比分别为  $INR_i = P_i/\sigma_n^2 = \{3, 3, 3, 6\}$  dB。为便于分析,假设所有  $K$  个期望用户具有相同的信噪比  $P_{k0}/\sigma_n^2 = 12$  dB。

图 1 给出不同信道估计误差下的系统平均容量仿真结果和相应的理论曲线。其中信道估计误差的程度分别取  $\mu = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0.99, 0.95, 0.90$ 。正如所预计的,从图 1 中可以看出,由于信道估计误差的存在,系统的单用户容量明显下降。尤其值得注意的是,通过比较  $\mu = 0.99$  和  $\mu = 0.90$  两条曲线后发现,两者在单用户( $K = 1$ )时的容量相差大约 0.5 bit/s/Hz,而当有 30 个用户( $K = 30$ )参与调度时的平均容量相差达到约 0.8 bit/s/Hz。可见,信道估计误差对系统多用户分集性能的影响随着参与调度的用户数  $K$  的增加而越发明显。这表明 CSI 的精度对于多用户分集系统中的用户选择调度以及消除多用户间的信号干扰至关重要。

图 2 给出 CCI 具有不同功率组合时的系统平均容量仿真

结果和相应的理论曲线的比较。图中假设  $\mu = 0.95$ , CCI 的功率组合分别为  $INR_i = \{3, 3, 3, 6\}$  dB、 $\{0, 0, 0, 3\}$  dB、 $\{6, 6, 6, 9\}$  dB。如图 2 所示,系统的平均容量随着 CCI 干扰功率的增强而下降。与图 1 相比,随着参与调度的用户数  $K$  值的增加,CCI 功率对系统平均容量的影响程度变化不明显。

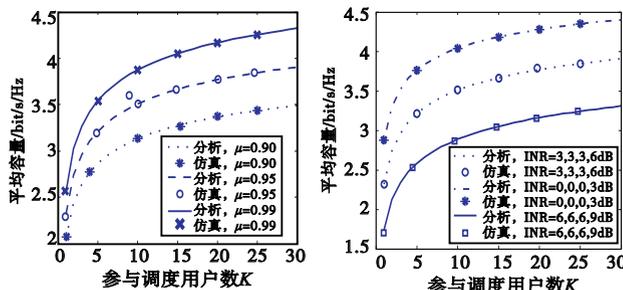


图1 非理想信道估计下MIMO MRC系统性能的理论 and 仿真结果  
图2 不同CCI功率对MIMO MRC系统平均容量影响的理论和仿真结果

### 4 结束语

本文研究表明,信道估计误差和共信道干扰均会降低系统的多用户分集性能。同时发现,信道估计误差对多用户分集性能的影响更为明显,表明 CSI 精度对于多用户分集系统中的用户选择调度以及消除多用户间的信号干扰至关重要。因此,为使 MIMO MRC 系统获得良好的多用户分集性能,需要尽可能提高对每个用户信道的估计精度,为此需要增加一定的系统开销。如何在系统开销和多用户性能提升之间获得平衡还有待进一步研究。

#### 参考文献:

- [1] KANG Ming, ALOUINI M S. A comparative study on the performance of MIMO MRC systems with and without cochannel interference [J]. IEEE Trans on Communications, 2004, 52(8): 1417-1425.
- [2] YANG Liang, QIN Jia-yin. Outage performance of MIMO MRC systems with unequal-power co-channel interference [J]. IEEE Communications Lett, 2006, 10(4): 245-247.
- [3] BOSISIO R, SPAGNOLINI U. On the sum-rate of opportunistic beamforming schemes with multiple antennas at the receiver [C]// Proc of IEEE ICC. 2007: 1048-1053.
- [4] CHEN Y, TELLAMBURA C. Performance analysis of maximum ratio transmission with imperfect channel estimation [J]. IEEE Communications Lett, 2005, 9(4): 322-324.
- [5] AHN K S. Performance analysis of MIMO MRC systems with channel estimation error in the presence of cochannel interferences [J]. IEEE Signal Processing Lett, 2008, 15: 445-448.
- [6] SONG B, CRUZ R L, MILSTEIN L B. Exploiting multiuser diversity for fair scheduling in MIMO downlink networks with imperfect channel state information [J]. IEEE Trans on Communications, 2009, 57(2): 470-480.
- [7] BAN T W, CHOI W, JUNG B C, et al. Multi-user diversity in a spectrum sharing system [J]. IEEE Trans on Wireless Communications, 2009, 8(1): 102-106.
- [8] MAAREF A, ALSSA S. Closed-form expression for the outage and ergodic Shannon capacity of MIMO MRC systems [J]. IEEE Trans on Communications, 2005, 53(7): 1092-1095.
- [9] CUI X W, ZHANG Q T, FENG Z M. Outage performance for maximal ratio combiner in the presence of unequal-power co-channel interferers [J]. IEEE Communications Lett, 2004, 8(5): 289-291.
- [10] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of integrals series and products [M]. New York: Academic, 1980.
- [11] 唐冬,杨亮,张广驰,等.空间相关对发射分集系统的多用户分集性能的影响[J]. 电子学报, 2006, 34(4): 761-764.