

文章编号: 0258-2724(2010)01-0017-06 DOI: 10.3969/j.issn.0258-2724.2010.01.003

梁结构的区间 B 样条小波混合有限元法

郭世伟^{1,2}, 林建辉¹

(1. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学峨眉校区, 四川 峨眉山市 614202)

摘要: 基于梁结构的广义变分原理和区间 B 样条小波 (BSWI) 插值, 提出梁的区间 B 样条小波混合有限元法, 建立了分析细长梁和弹性地基梁的静力弯曲、振动模态和稳定性问题的求解通式. 根据 BSWI 函数区间边界的数值特征, 得到了梁常见边界条件下的挠度和弯矩小波系数值. BSWI 混合有限元法可同时直接求解梁结构的挠度和弯矩, 克服了位移有限元法弯矩求解精度不高的缺点. 算例结果表明, BSWI 混合有限元法计算梁弯矩的精度比 BSWI 位移有限元法提高了 10.9%, 说明了 BSWI 混合有限元法在梁结构应用中的有效性和精确性.

关键词: 区间 B 样条小波; 广义变分原理; BSWI 混合有限元法; 梁结构; 边界条件

中图分类号: TB301; O174.2 **文献标识码:** A

Mixed FEM of B-Spline Wavelet on Interval for Beam Structures

GUO Shiwei^{1,2}, LIN Jianhui¹

(1. Traction Power State Key Laboratory, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China; 2. Emei Campus, Southwest Jiaotong University, Emeishan 614202, China)

Abstract: A mixed finite element method (FEM) of B-spline wavelet on the interval (BSWI) for beam structures was proposed based on the generalized variational principle of beam structure and interpolation of BSWI, and general equations for solving static problem, vibration modal problem and stability problem of long beams and elastic foundation beams were presented. The deflection and moment wavelet parameters for common boundary conditions of beams were obtained from numerical features of interval boundary of BSWI functions. The proposed method directly gets deflection and moment of beam structures at the same time, and overcomes the shortcoming of low accuracy in beam moment calculation of displacement FEM. Numerical results show that the proposed method increases beam moment calculation accuracy by 10.9% compared with displacement FEM of BSWI, demonstrating its feasibility and high accuracy in applications to beam structure problems.

Key words: B-spline wavelet on interval; generalized variational principle; mixed finite element method of BSWI; beam structure; boundary condition

样条函数插值具有紧凑性好、待定系数少、连续性强、逼近精度高等特点, 在数值分析中得到广泛应用. 样条函数插值与最小势能原理结合可形成样条有限元方法, 沈鹏程、秦荣等在该领域做了深入的研究, 取得了丰硕的应用成果^[1,2]. 基于样条

函数的区间 B 样条小波 (B-spline wavelet on the interval, BSWI) 函数是有限区间上的小波, 有局部化的性质, 可有效解决边值问题求解时的边界数值振荡缺陷. BSWI 尺度空间是有限维的, 区间上的任何函数均可展开成有限维的小波级数. 另外,

收稿日期: 2009-07-06

基金项目: 国家 973 计划资助项目 (2007CB714701)

作者简介: 郭世伟 (1975 -), 男, 讲师, 博士研究生, 研究方向为结构动力学分析与计算, E-mail: guoshiwei@sohu.com

BSWI 函数在边界上的数值特征,使结构边界条件易于处理^[3,4]. 区间 B 样条小波有限元法 (BSWI FEM) 是结构未知场函数的 BSWI 插值与结构能量变分原理结合产生的一种有限元方法,何正嘉、陈雪峰、向家伟等在该领域进行了一系列应用研究^[5-8],但主要还是基于单变量的位移 BSWI 有限元法.

梁结构分析的传统有限元法为单变量的位移有限元法,其基本未知量只取梁挠度一个位移场函数,弯矩函数需要通过挠度函数的二阶求导间接求解,故所得弯矩计算精度一般比挠度精度低^[9]. 在弹性结构广义变分原理中,混合能量泛函中的自变函数则可取位移函数和力函数二类场变量^[10].

本文基于梁的赫林格-赖斯纳 (Hellinger-Reissner) 广义变分原理,对梁挠度和弯矩同时做 BSWI 函数插值,利用 BSWI 混合有限元方法,可实现对挠度和弯矩函数的同时求解,克服位移有限元法弯矩计算精度不高的缺点. 综合考虑弹性地基影响下的细长梁的静力弯曲分析、振动模态分析和稳定性等问题,建立梁结构各类问题的 BSWI 混合有限元求解通式,并对梁结构的各类分析问题及其边界条件的处理方法进行了详细阐述. 算例证明了 BSWI 混合有限元法在梁结构各类问题分析应用中的有效性.

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \text{ 处, } B_{j,k}(0) = 0, \quad k \neq 0, \quad B'_{j,k}(0) = 0, \quad k \neq 0, 1, \\ x = 1 \text{ 处, } B_{j,k}(1) = 0, \quad k \neq 2^j + 2, \quad B'_{j,k}(1) = 0, \quad k \neq 2^j + 2, 2^j + 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)对 BSWI 有限元法中的边界条件处理有利.

2 BSWI 混合有限元刚度方程

细长均匀直梁采用伯努利-欧拉 (Bernouli-Euler) 梁理论模型,梁的弯曲变形满足经典的梁弯曲 Kirchhoff 假设. 若梁的全长直接支撑在弹性地基或下面的支撑结构上,即为弹性地基梁. 弹性地基梁的地基模型与解法有多种,其中文克尔 (Winkler) 地基模型最简单,应用最广泛^[13].

图 1 为文克尔地基梁的示意图. 设文克尔地基梁单元长为 L , 抗弯刚度为 EI , 承受横向分布荷载为 $q(x)$. 根据文克尔假设,地基任一点的反力与该点梁挠度成正比,其刚度以地基系数 k_0 表示.

在结构分析的广义变分原理中,混合能量泛函

1 区间 B 样条小波函数及其性质

取整数 $d > 0, j > 0$ 和 $m = d + 1$, 以离散化步长将区间 $[0, 1]$ 划分为 2^j 个小区间,取节点序列

$$\begin{aligned} t_0 = t_1 = \dots = t_{m-1} = 0, \quad t_{m-1+n} = n2^{-j}, \\ t_{m+2^j-1} = t_{m+2^j} = \dots = t_{2^j+2m-2} = 1, \\ n = 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned}$$

则区间 $[0, 1]$ 上对应于尺度 j 的 m 阶区间 B 样条函数定义为:

$$B_{m,j,k}(x) = \left. \begin{aligned} (t_{k+m} - t_k)(t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m})_t (t-x)_+^{m-1}, \\ k = 0 \sim 2^j + m - 2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $(t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m})_t (t-x)_+^{m-1}$ 为关于节点 $t = t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+m}$ 的 $(t-x)_+^{m-1}$ 的 m 阶差商 (以 x 为参数), 即区间 B 样条函数 $B_{m,j,k}(x)$ 是以区间边界节点 0 和 1 为 m 阶重节点、以区间内节点为单节点的 B 样条函数^[11]. 当 $d=3$ 时,节点序列 $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0, t_{2^j+3} = \dots = t_{2^j+6} = 1, t_4, \dots, t_{2^j+2}$ 将 $[0, 1]$ 分成 2^j 个等距的子区间. 此时,对应的 $B_{m,j,k}(x)$ 即为闭区间 $[0, 1]$ 上的三次区间 BSWI 函数,对应于 j 的基函数共有 $2^j + 3$ 个,简记为 $B_{j,0}(x), B_{j,1}(x), \dots, B_{j,2^j+2}(x)$. j 对应的 BSWI 函数在区间边界处具有以下特点^[12]:

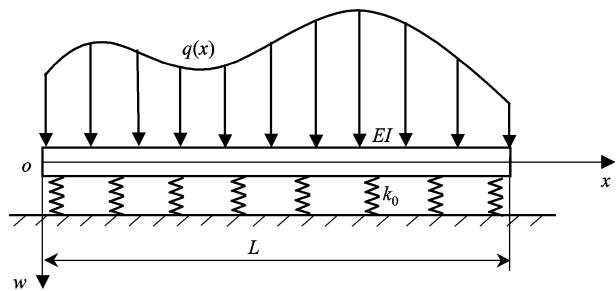


图 1 地基梁示意
Fig. 1 The diagram of foundation beam

中的自变函数可取二类场变量,一类为位移函数,另一类为力函数. 设细长梁的挠度函数为 $w(x)$, 弯矩函数为 $M(x)$, 综合考虑文克尔地基影响下的细长梁

在横向分布荷载、轴向压力和惯性力下的共同作用, 对应的赫林格-赖斯纳 (Hellinger-Reissner) 广义变分原理的混合能量泛函为^[14]:

$$\Pi_R(w, M) = \int_0^L \left[-M \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{M^2}{2EI} + \frac{k_0}{2} w^2 - \frac{1}{2} \lambda \bar{m} w^2 - \frac{1}{2} N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - wq \right] dx, \quad (3)$$

其中: λ 为梁的振动特征值; \bar{m} 为梁的质量密度; N 为梁的纵向压力.

BSWI 函数是在区间 $[0, 1]$ 上定义的. 设梁左右端点物理坐标分别为 x_1 和 x_2 , 则梁长 $L = x_2 - x_1$. 将单元的实际求解区间 $[x_1, x_2]$ 映射到标准求解区间 $[0, 1]$, 则标准坐标 ξ 与物理坐标 x 间的变换关系为:

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{L}. \quad (4)$$

取梁混合能量泛函中的挠度函数和弯矩函数

$$\begin{aligned} \Pi_R(w, M) = & -\frac{1}{L} \int_0^1 \mathbf{B}^T \Phi_j^T \Phi_j' A d\xi - \frac{L}{2EI} \int_0^1 \mathbf{B}^T \Phi_j^T \Phi_j B d\xi + \frac{k_0 L}{2} \int_0^1 \mathbf{A}^T \Phi_j^T \Phi_j A d\xi - \frac{\lambda \bar{m} L}{2} \int_0^1 \mathbf{A}^T \Phi_j^T \Phi_j A d\xi - \\ & \frac{N}{2L} \int_0^1 \mathbf{A}^T \Phi_j^T \Phi_j' A d\xi - L \int_0^1 \mathbf{A}^T \Phi_j^T q(\xi) d\xi = \\ & -\frac{1}{L} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{02} \mathbf{A} - \frac{L}{2EI} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{00} \mathbf{B} + \frac{k_0 L}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{00} \mathbf{A} - \frac{\lambda \bar{m} L}{2} \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{00} \mathbf{A} - \frac{N}{2L} \mathbf{A}^T \mathbf{A}_{11} \mathbf{A} - L \mathbf{A}^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{A}_{02} = \int_0^1 \Phi_j^T \Phi_j' d\xi$; $\mathbf{A}_{00} = \int_0^1 \Phi_j^T \Phi_j d\xi$; $\mathbf{A}_{11} = \int_0^1 \Phi_j^T \Phi_j' d\xi$; $\mathbf{P} = \int_0^1 \Phi_j^T q(\xi) d\xi$.

应用混合能量原理

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{0},$$

整理可得

$$\begin{bmatrix} -\frac{L}{EI} \mathbf{A}_{00} & -\frac{1}{L} \mathbf{A}_{02} \\ -\frac{1}{L} \mathbf{A}_{02}^T & \mathbf{K}_E - \lambda \mathbf{M} - \mathbf{N} \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中:

\mathbf{M} 为质量矩阵, $\mathbf{M} = \bar{m} L \mathbf{A}_{00}$;

\mathbf{G} 为几何刚度矩阵, $\mathbf{G} = 1/L \mathbf{A}_{11}$;

\mathbf{K}_E 为地基刚度矩阵, $\mathbf{K}_E = k_0 L \mathbf{A}_{00}$.

方程(7)为文克尔地基梁综合静力弯曲问题、自由振动问题和稳定问题的区间 BSWI 混合有限元刚度方程通式. 方程(7)的刚度矩阵为对称矩阵, 可用解析法求解矩阵值. 对于广义荷载列阵 \mathbf{P} , 可根据分布荷载 $q(x)$ 的具体形式, 选择解析法或数值法计算.

3 各类问题的求解方法

(1) 对于文克尔地基梁的静力弯曲问题, 方程(7)的刚度矩阵中去除 \mathbf{M} 和 \mathbf{G} 项, 结合梁边界

为相同 j 的 BSWI 函数插值, 即

$$\left. \begin{aligned} w &= \Phi_{jw} \mathbf{A}, \\ M &= \Phi_{jM} \mathbf{B}, \\ \Phi_{jw} &= \Phi_{jM} = \Phi_j, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中: $\Phi_j = (B_{j,0}, B_{j,1}, B_{j,2}, \dots, B_{j,2j+2})$ 为 j 对应的 BSWI 函数行向量; $\mathbf{A} = [a_{j,0} \ a_{j,1} \ \dots \ a_{j,2j+2}]^T$ 和 $\mathbf{B} = [b_{j,0} \ b_{j,1} \ \dots \ b_{j,2j+2}]^T$ 为待定的小波系数列阵, 其中 $a_{j,k}$ 和 $b_{j,k}$ 为对应于 $B_{j,k}(x)$ 的小波系数.

将式(5)代入式(3), 得

条件进行求解, 得到 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , 进而可求解梁各处的挠度和弯矩值.

(2) 对于文克尔地基梁自由振动问题, 方程(7)中保留 \mathbf{M} , 去掉 \mathbf{G} . 因自由振动问题与外载无关, 取荷载列阵为零. 由方程(7)可化简消去 \mathbf{B} , 得到

$$\left(\frac{EI}{L^3} \mathbf{A}_{02}^T \mathbf{A}_{00}^{-1} \mathbf{A}_{02} + \mathbf{K}_E - \lambda \mathbf{M} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

方程(8)为一特征值问题, 结合边界条件求解, 可得到梁的固有频率和振型.

(3) 对于文克尔地基梁的稳定问题, 方程(7)中保留 \mathbf{G} , 去掉 \mathbf{M} , 仍取荷载列阵为零, 消去 \mathbf{B} , 得到方程:

$$\left(\frac{EI}{L^3}A_{02}^T A_{00}^{-1} A_{02} + K_E - NG\right)A = 0. \quad (9)$$

方程(9)为一个特征值问题. 结合边界条件求解, 可得到梁的临界荷载 N .

(4) 对于无弹性地基影响的一般细长梁, $k_0 = 0$, 其静力弯曲问题、自由振动问题和稳定问题只需取方程(7)中的 K_E 为零矩阵, 余下的处理方法与相应的地基梁问题相同.

4 梁结构的边界处理

梁结构常见有3种类型, 边界条件如下:

(1) 固支边界, 梁挠度和转角均为零, 即

$$w = 0, \quad dw/dx = 0;$$

(2) 铰支边界, 梁挠度和弯矩均为零, 即 $w = 0, M = 0$;

(3) 自由边界, 梁弯矩和剪力均为零, 即 $M = 0, dM/dx = 0$.

在梁结构的 BSWI 混合有限元分析中, 挠度函数和弯矩函数均以 BSWI 函数做插值, 小波系数为基本未知量, 见式(5). 利用 BSWI 函数的区间边界特点式(2)可方便地对梁结构的位移、力边界条件进行处理. 常见边界条件对应的挠度和弯矩小波系数的处理方法如表1所示.

表1 常见边界条件的挠度和弯矩小波系数

Tab. 1 The deflection wavelet parameters and movement wavelet parameters of common boundary conditions

边界条件	挠度小波系数				弯矩小波系数			
	$a_{j,0}$	$a_{j,1}$	$a_{j,2^j+1}$	$a_{j,2^j+2}$	$b_{j,0}$	$b_{j,1}$	$b_{j,2^j+1}$	$b_{j,2^j+2}$
固支-固支	0	0	0	0	$b_{j,0}$	$b_{j,1}$	$b_{j,2^j+1}$	$b_{j,2^j+2}$
铰支-铰支	0	$a_{j,1}$	$a_{j,2^j+1}$	0	0	$b_{j,1}$	$b_{j,2^j+1}$	0
固支-铰支	0	0	$a_{j,2^j+1}$	0	$b_{j,0}$	$b_{j,1}$	$b_{j,2^j+1}$	0
固支-自由	0	0	$a_{j,2^j+1}$	$a_{j,2^j+2}$	$b_{j,0}$	$b_{j,1}$	0	0
自由-自由	$a_{j,0}$	$a_{j,1}$	$a_{j,2^j+1}$	$a_{j,2^j+2}$	0	0	0	0

对于具体的梁结构问题, 可按表1中挠度、弯矩小波系数的处理方法对刚度方程(7)进行处理, 然后再进行刚度方程求解.

5 算例

一端固支、一端铰支的细长梁上作用有三角形线性分布荷载, 如图2所示.

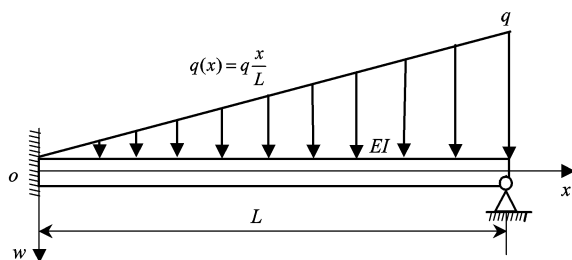


图2 算例
Fig. 2 The example

(1) 梁结构的静力弯曲

应用 BSWI 混合有限元法对该算例做静力弯曲分析, 计算梁上 $x = L/4, L/2$ 和 $3L/4$ 处的挠度和弯矩值. 为便于比较说明, 同时又采用 BSWI 位移有限元法做计算, 计算中进行无量纲化处理(以

下相同), 不同 j 的计算结果如表2所示. 由表2可知:

① 比较 BSWI 位移有限元法和 BSWI 混合有限元法的计算结果, 虽然前者对挠度值有较高的计算精度, 但其弯矩值计算精度比后者低. 对算例梁弯矩值的计算, 可求得 BSWI 混合有限元法的计算精度比 BSWI 位移有限元法提高了 10.9%. 说明 BSWI 混合有限元法可一次同时求解挠度和弯矩场函数, 并克服位移有限元方法弯矩计算精度不高的缺点.

② 随着 j 增大, BSWI 有限元的计算精度增高, 说明计算结果对于 j 有很好的收敛性, $j = 3$ 时的 BSWI 混合有限元计算结果与理论值几乎相等. 在整个梁长范围内, 用 BSWI 混合有限元法 ($j = 2$) 计算离散点处的挠度和弯矩, 并与理论曲线比较, 如图3所示.

由图3可见, 在梁的整个求解域内, 小尺度 ($j = 2$) 时的挠度和弯矩的计算值就与理论精确解几乎相等. 这进一步说明了 BSWI 混合有限元方法在梁结构静力分析计算中具有很好的精确性和收敛性.

表 2 BSWI 有限元法计算的挠度、弯矩 ($x=L/4, L/2, 3L/4$)

Tab. 2 The calculated results of deflection and moment at $x=L/4, x=L/2$ and $x=3L/4$ with BSWI FEM

两种 BSWI 有限元法	j	挠度(因子为 $qL^4/(EI)$)			弯矩(因子为 qL^2)		
		$w(L/4)$	$w(L/2)$	$w(3L/4)$	$M(L/4)$	$M(L/2)$	$M(3L/4)$
BSWI 混合有限元法计算结果	1	0.001 231	0.002 893	0.002 525	-0.005 305	0.033 60	0.040 19
	2	0.001 246	0.002 868	0.002 567	-0.004 682	0.033 33	0.040 11
	3	0.001 245	0.002 865	0.002 564	-0.004 687	0.033 33	0.040 10
	4	0.001 245	0.002 865	0.002 564	-0.004 688	0.033 33	0.040 10
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
BSWI 位移有限元法计算结果	1	0.001 237	0.002 864	0.002 409	-0.006 250	0.043 75	0.031 25
	2	0.001 245	0.002 865	0.002 563	-0.003 460	0.035 94	0.044 08
	3	0.001 245	0.002 865	0.002 563	-0.004 359	0.033 98	0.041 08
	4	0.001 245	0.002 865	0.002 564	-0.004 606	0.033 50	0.040 35
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
理论解	0.001 245	0.002 865	0.002 564	-0.004 688	0.033 33	0.040 10	

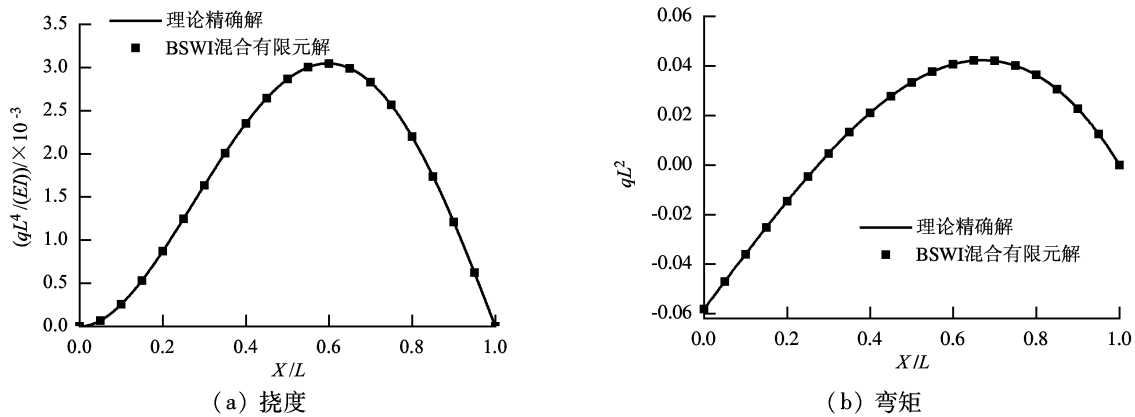


图 3 挠度、弯矩的计算值与精确值的比较

Fig. 3 Comparison between the calculated values and the accurate values of deflection and moment

(2) 梁结构的自由振动

根据方程(8),并结合边界条件,可求解不同 j 时的梁固有振动频率及其对应的模态振型. 梁的最低 4 阶固有频率计算值如表 3, 其中因子为 $(1/L^2) \sqrt{EI/m}$. 由表 3 的计算结果可看到,梁的各阶固有频率均有较高的计算精度,且 j 越大,计算精度越高,计算结果对于尺度 j 有很好的收敛性.

$j=4$ 时,求得该梁的前 3 阶振型曲线如图 4,与理论振型曲线相比较,几乎吻合.

以上的计算结果表明 BSWI 混合有限元方法在梁结构自由振动问题分析中的有效性. 同样,对梁的稳定问题、文克尔地基梁问题进行算例分析,均证明 BSWI 混合有限元法在梁结构各类问题的分析计算中具有很好的求解精度和收敛性.

表 3 梁固有频率计算值

Tab. 3 The calculated values of beam natural frequency

j	前 4 阶固有频率/(rad · s ⁻¹)			
	1	2	3	4
2	15.418 8	50.087 8	105.923 2	234.988 8
3	15.418 2	49.965 9	104.275 4	178.596 6
4	15.418 2	49.964 9	104.248 0	178.272 4
5	15.418 2	49.964 9	104.247 7	178.269 8
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
理论值	15.418 2	49.964 8	104.247 2	178.269 8

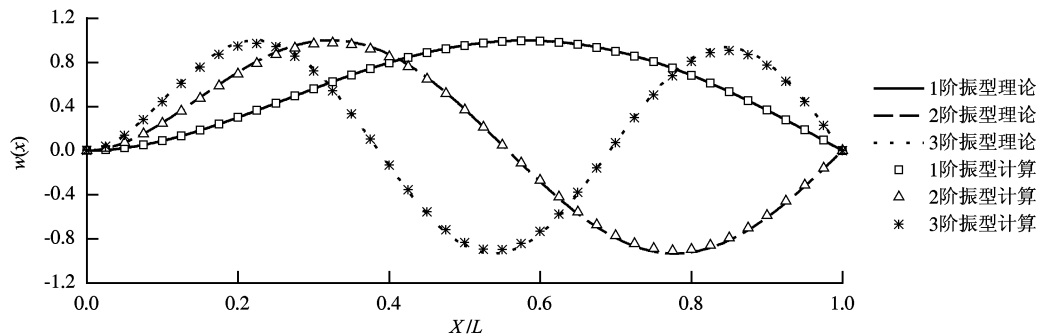


图4 梁前3阶主振型函数曲线
Fig. 4 The first three order normal vibration mode curve

6 结束语

(1) 基于梁结构的混合能量原理和函数的BSWI插值方法建立起来的BSWI混合有限元法,对梁结构各类问题均有很好的适用性.可应用于一般细长梁和弹性地基梁的静力弯曲问题、自由振动问题及稳定问题的分析计算中.给出了BSWI混合有限元刚度方程的统一求解通式.

(2) BSWI函数在有界区间上的数值特征利于数值计算和边界条件的处理.BSWI混合有限元法在梁结构各类问题中的边界条件处理简单方便,且具有很好的计算精度和收敛性.

(3) 对于梁结构问题,BSWI混合有限元法可一次同时对挠度和弯矩场函数做插值求解,并有效克服位移有限元法弯矩值精度不高的缺点.

致谢:西南交通大学青年教师科研起步资助项目(2008Q021).

参考文献:

- [1] 沈鹏程. 结构分析中的样条有限元法[M]. 北京:水利电力出版社,1992: 48-195.
- [2] 秦荣. 计算结构力学[M]. 北京:科学出版社,2003: 47-61.
- [3] GOSWAMI J C, CHAN A K. 小波分析理论、算法及其应用[M]. 许天周译. 北京:国防工业出版社,2007: 211-234.
- [4] CHEN W H, WU C W. Spline wavelets element method for frame structures vibration[J]. Computational Mechanics,1995, 16(1): 11-21.
- [5] 何正嘉,陈雪峰. 小波有限元理论研究及工程应用的进展[J]. 机械工程学报,2005,41(3): 1-11.

HE Zhengjia, CHEN Xuefeng. Advances in theory study and engineering application of wavelet finite element[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(3): 1-11.

- [6] 陈雪峰,杨胜军,何正嘉,等. 小波有限元的研究及工程应用[J]. 西安交通大学学报,2003,37(1): 1-4.
CHEN Xuefeng, YANG Shengjun, HE Zhengjia, et al. Study of wavelet finite element method and its engineering application [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2003, 37(1): 1-4.
- [7] 向家伟,陈雪峰,李兵,等. 基于区间B样条小波有限元的裂纹故障诊断[J]. 机械强度,2005(2): 163-167.
XIANG Jiawei, CHEN Xuefeng, LI bing, et al. Crack fault quantitative diagnosis based on finite element of b-spline wavelet on the interval[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005(2): 163-167.
- [8] 何正嘉,陈雪峰. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京:科学出版社,2006: 120-169.
- [9] 薛守义. 有限单元法[M]. 北京:中国建材工业出版社,2005: 205-221.
- [10] 林金木. 有限单元法变分原理与应用[M]. 长沙:湖南大学出版社,2003: 98-118.
- [11] 王省福. 样条函数及其应用[M]. 西安:西北工业大学出版社,1989: 34-63.
- [12] 孙延奎. 小波分析及其应用[M]. 北京:机械工业出版社,2005: 262-265.
- [13] 黄义,何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京:科学出版社,2005: 26-36.
- [14] 付宝连. 弹性力学中的能量原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,2004: 109-172.

(中文编辑:秦瑜 英文编辑:刘斌)