

# 基于 Morgenstern-Price 法边坡三维稳定性分析

陈昌富<sup>1</sup>, 朱剑锋<sup>1,2</sup>

(1. 湖南大学 岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082; 2. 浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 工程中边坡滑裂面通常都是三维空间上的一个曲面, 采用传统的二维稳定性分析方法对其进行分析与实际不符。Morgenstern-Price 极限平衡条分法(M-P 法)是最严密的边坡二维稳定性分析方法, 将其拓展并引入边坡三维稳定性分析中。通过类似于 M-P 法的条间力假定, 建立一种新的边坡三维稳定性分析方法——基于 M-P 法边坡三维极限平衡分析法。给出 2 个验证算例, 与现有几种方法对比计算结果表明: 该法不仅计算结果更可靠, 而且力学模型更为严谨, 计算公式简便且易于编程, 可在边坡工程设计及滑坡治理中推广应用。

**关键词:** 边坡工程; 边坡稳定性; 极限平衡法; 三维分析; Morgenstern-Price 法

**中图分类号:** P 64

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2010)07 - 1473 - 08

## A THREE-DIMENSIONAL SLOPE STABILITY ANALYSIS PROCEDURE BASED ON MORGENSTERN-PRICE METHOD

CHEN Changfu<sup>1</sup>, ZHU Jianfeng<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** In most cases, the slip surface is a 3D surface in practical engineering. Therefore, it is not in accord with the practical condition to study the slope stability by using the traditional 2D analysis method. The Morgenstern-Price limit equilibrium method, which is the most rigorous method of 2D slope stability analysis, is developed and introduced to the 3D slope stability analysis. Through the assumptions similar to Morgenstern-Price method on slice forces, a new approach to three-dimensional slope stability analysis, the three-dimensional limit equilibrium method based on Morgenstern-Price method, is established. Two examples are given to verify the proposed method. Comparing with several other 3D slope stability analysis methods, the proposed method is more reliable and the proposed mechanical model is more rigorous. Furthermore, the proposed calculation formula is simple and easily to be programmed. The proposed 3D slope stability analysis method can be widely used by geotechnical engineers in the design of slopes and treatment of landsides.

**Key words:** slope engineering; slope stability; limit equilibrium method; three-dimensional analysis; Morgenstern-Price(M-P) method

## 1 引言

目前边坡稳定性分析, 一般简化为二维平面应

变问题并采用二维极限平衡法来处理。虽然在一般情况下二维处理能够满足工程要求, 但在实际工程中, 边坡破坏体却往往为多种岩土体的空间组合体, 破坏面呈现复杂几何形状, 破坏体本身所承受的外

**收稿日期:** 2010 - 03 - 05; **修回日期:** 2010 - 03 - 30

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50878082); 湖南省自然科学基金资助项目(09JJ3104); 交通部西部项目(200631880237)

**作者简介:** 陈昌富(1963 -), 男, 博士, 1985年毕业于中南工业大学地质工程专业, 现任教授、博士生导师, 主要从事边坡与支挡工程、特殊性岩土地基与基础工程方面的研究工作。E-mail: cfchen@163.com

力也不对称。考虑到边坡的这些空间复杂性，严格地说，边坡稳定应该进行三维分析，以便更可靠地评价边坡稳定性。

为此，国内外许多学者基于二维极限平衡条分法，采用不同的假定，提出了诸如：三维普通条分法<sup>[1]</sup>、三维简化 Bishop 法<sup>[2, 3]</sup>、三维简化 Janbu 法<sup>[4~6]</sup>、三维 Spencer 法<sup>[7, 8]</sup>、三维剩余推力法<sup>[9]</sup>以及其他三维边坡安全系数计算方法<sup>[10, 11]</sup>，并取得了一些成果。但三维普通条分法适用于破坏面对称的边坡，且会出现二维比三维的安全系数值大的情况；三维简化 Bishop 法比较适合于滑裂面为旋转面的情况；Hunger 提出的三维简化 Janbu 法由于忽略了所有条间剪力，所以不适合计算条间抗剪强度比较大而底滑面抗剪强度相对较小的情况<sup>[12]</sup>；X. Zhang<sup>[7]</sup>通过假定条柱底部端部力  $P$  反映三维效应，削弱了该法的理论基础，同样该法只适用于滑裂面对称的边坡<sup>[12]</sup>；三维剩余推力法硬性规定了条间合力方向，在某些情况下计算结果不收敛。

为了得到一种计算简便且力学模型严密的三维极限平衡分析方法，本文尝试将二维领域最精确严密、收敛性较好的 Morgenstern-Price 法<sup>[13, 14]</sup>(以下简称二维 M-P 法)进行拓展，根据滑坡体三个方向的静力平衡条件和沿主滑方向的力矩平衡条件，分别推导出三维边坡安全系数  $F_{3S}$ 、比例系数  $\lambda$  以及条底剪力与主滑平面夹角的代数表达式，建立一种新的边坡稳定性分析三维极限平衡法——三维 Morgenstern-Price 法(以下简称三维 M-P 法)，该法计算公式简洁，无需求解方程组，通过简单迭代便可迅速得到稳定收敛的三维安全系数，极大地方便了边坡工程技术人员的应用。

## 2 三维 M-P 法基本原理

### 2.1 基本假定

坐标系的选取及条柱的划分如图 1 所示，单一条柱受力分析见图 2。

为了方便安全系数计算公式的建立，本文做如下假定：

(1) 对典型条块  $(i, j)$  作用在行界面(平行于  $YOZ$  平面的界面，即图 2 中的  $ABFE$  和  $DCGH$  平面)的条间剪力  $V_{(i, j)}$  与条间力  $E_{(i, j)}$  满足关系式：

$$V_{(i, j)} = \lambda_j f_{(i, j)} E_{(i, j)} \quad (1)$$

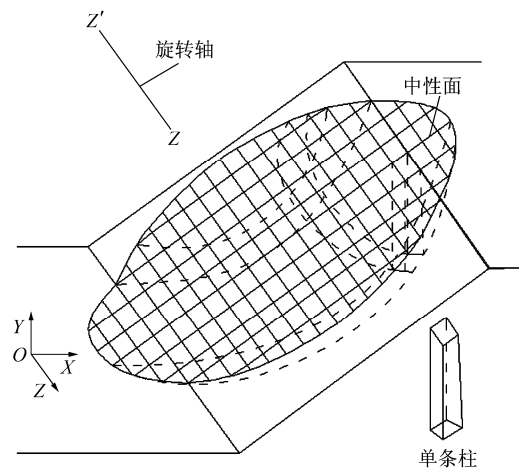


图 1 坐标系及条柱划分

Fig.1 Coordinate system and individual columns

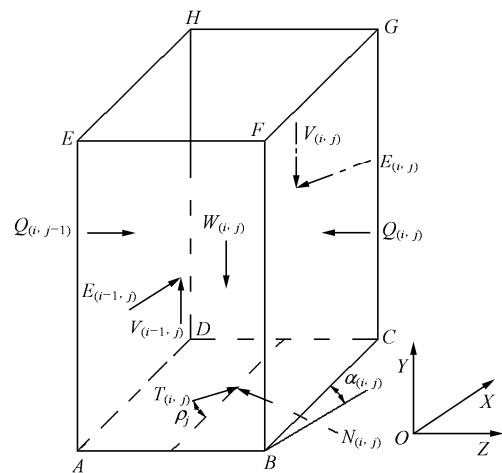


图 2 单一条块受力示意图

Fig.2 Forces acting on a single slice

式中： $\lambda_j$  为比例系数； $f_{(i, j)}$  为条间力函数。这一假定类似于二维 M-P 法。

(2) 作用在列界面(平行于  $XOY$  平面的界面，图 2 中的  $ADHE$  和  $BCGF$  平面)的作用力  $Q_{(i, j)}$  为水平方向，且与  $Z$  轴平行。

(3) 作用在底滑面的剪切力  $T_{(i, j)}$  与  $XOY$  平面的夹角为  $\rho_j$ 。规定剪切力的  $Z$  轴分量为正时， $\rho_j$  为正值。假定同一列条柱( $Z$  为常量)的  $\rho_j$  值相同，对形心  $Z$  坐标不同的条柱，假定  $\rho_j$  一个分布形状<sup>[8]</sup>：

①  $\rho_j = \kappa = \text{常量}$ ，如图 3(a)所示；

② 在  $XOY$  平面的左、右两侧假定  $\rho_j$  的方向相反，并呈线性分布，如图 3(b)所示，假定此分布形状为  $g(Z)$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \rho_{Rj} &= \kappa Z_{Rj} & (Z_{Rj} \geq 0) \\ \rho_{Lj} &= -\eta \kappa Z_{Lj} & (Z_{Lj} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

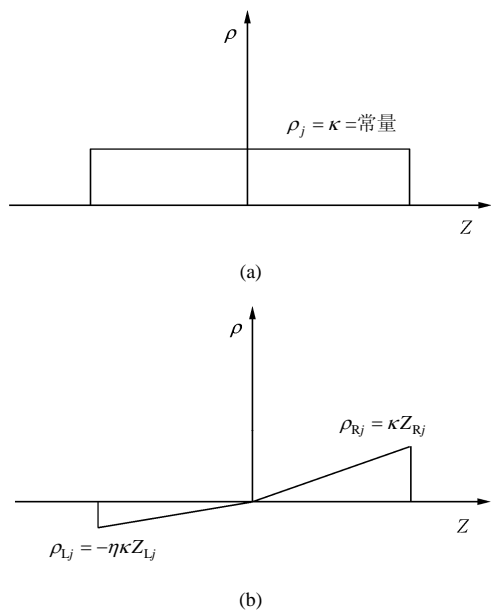


图 3 底滑面的剪力  $T_{(i,j)}$  与  $XOY$  平面的夹角  $\rho_j$  的分布形状  
Fig.3 Distribution of the angle  $\rho_j$  between the shear force  $T_{(i,j)}$  applied on the column base and  $XOY$  plane

式中:  $Z_{Lj}$  和  $Z_{Rj}$  分别为左、右列条柱形心的  $Z$  坐标。

假定②中包含一个系数  $\eta$ , 该值反映左、右侧  $\rho_j$  的变化不对称的特性, 当滑体的几何形状和物理指标完全对称时, 相应的假定①的  $\kappa = 0$ , 而假定②的  $\eta = 1$ 。

设  $n_{X(i,j)}, n_{Y(i,j)}, n_{Z(i,j)}$  为底滑面法线的方向导数,  $m_{X(i,j)}, m_{Y(i,j)}, m_{Z(i,j)}$  为切向力  $T_{(i,j)}$  的方向导数, 若已知  $\rho_j$ , 则切向力  $T_{(i,j)}$  的方向导数可由下式求得

$$m_{Z(i,j)} = \sin \rho_j \quad (3)$$

根据:

$$\left. \begin{aligned} m_{X(i,j)}^2 + m_{Y(i,j)}^2 + m_{Z(i,j)}^2 &= 1 \\ m_{X(i,j)}n_{X(i,j)} + m_{Y(i,j)}n_{Y(i,j)} + m_{Z(i,j)}n_{Z(i,j)} &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

联立式 (3) 和 (4) 可以求得  $m_{X(i,j)}, m_{Y(i,j)}$  (舍弃  $m_{X(i,j)} < 0$  的情况)。

### 2.2 三维 M-P 法的安全系数计算公式推导

基于节 2.1 的假定, 以下推导三维 M-P 法安全系数计算公式。

(1) 由 X 方向的力平衡得

$$n_{X(i,j)}N_{(i,j)} + E_{(i-1,j)} + m_{X(i,j)}T_{(i,j)} - E_{(i,j)} = 0 \quad (5)$$

(2) 由 Y 方向的力平衡得

$$\begin{aligned} \lambda_j f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)} - W_{(i,j)} + T_{(i,j)} m_{Y(i,j)} + N_{(i,j)} n_{Y(i,j)} - \\ \lambda_j f_{(i,j)} E_{(i,j)} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $N_{(i,j)}$  为作用在典型条块底面上的正压力,  $W_{(i,j)}$  为条块重力。

(3) 由极限平衡条件, 可得

$$T_{(i,j)} = \frac{(N_{(i,j)} - u_{(i,j)} A_{(i,j)}) \tan \varphi_{(i,j)} + c_{(i,j)} A_{(i,j)}}{F_{S,j}} \quad (7)$$

式中:  $u_{(i,j)}$  为孔隙水压力,  $A_{(i,j)}$  为条块底面面积,  $\varphi_{(i,j)}$  为内摩擦角,  $c_{(i,j)}$  为黏聚力,  $F_{S,j}$  为第  $j$  列的安全系数。

将式(7)分别代入式(5)和(6), 联立消去  $N_{(i,j)}$  得

$$\begin{aligned} (n_{X(i,j)} + m_{X(i,j)} \tan \varphi_{(i,j)} / F_{S,j}) N_{(i,j)} + \\ E_{(i-1,j)} - E_{(i,j)} + c_{(i,j)} A_{(i,j)} m_{X(i,j)} / F_{S,j} - \\ u_{(i,j)} A_{(i,j)} m_{X(i,j)} \tan \varphi_{(i,j)} / F_{S,j} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (n_{Y(i,j)} + m_{Y(i,j)} \tan \varphi_{(i,j)} / F_{S,j}) N_{(i,j)} + \\ \lambda_j f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)} - \lambda_j f_{(i,j)} E_{(i,j)} + c_{(i,j)} A_{(i,j)} m_{Y(i,j)} / \\ F_{S,j} - u_{(i,j)} A_{(i,j)} m_{Y(i,j)} \tan \varphi_{(i,j)} / F_{S,j} - W_{(i,j)} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

联立式(8)和(9)得

$$E_{(i,j)} \phi_{(i,j)} = \psi_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)} \phi_{(i-1,j)} - F_{S,j} P_{(i,j)} + R_{(i,j)} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j)} = (\lambda_j f_{(i,j)} m_{X(i,j)} - m_{Y(i,j)}) \tan \varphi_{(i,j)} + \\ (\lambda_j f_{(i,j)} n_{X(i,j)} - n_{Y(i,j)}) F_{S,j} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \phi_{(i-1,j)} = (\lambda_j f_{(i-1,j)} m_{X(i-1,j)} - m_{Y(i-1,j)}) \tan \varphi_{(i-1,j)} + \\ (\lambda_j f_{(i-1,j)} n_{X(i-1,j)} - n_{Y(i-1,j)}) F_{S,j} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \psi_{(i-1,j)} = [(\lambda_j f_{(i-1,j)} m_{X(i,j)} - m_{Y(i,j)}) \tan \varphi_{(i,j)} + \\ (f_{(i-1,j)} n_{X(i,j)} - n_{Y(i,j)}) F_{S,j}] / \phi_{(i-1,j)} \end{aligned} \quad (13)$$

记

$$P_{(i,j)} = -W_{(i,j)} n_{X(i,j)} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} R_{(i,j)} = W_{(i,j)} m_{X(i,j)} - (m_{X(i,j)} n_{Y(i,j)} - \\ m_{Y(i,j)} n_{X(i,j)}) u_{(i,j)} A_{(i,j)} \tan \varphi_{(i,j)} + \\ (m_{X(i,j)} n_{Y(i,j)} - m_{Y(i,j)} n_{X(i,j)}) c_{(i,j)} A_{(i,j)} \end{aligned} \quad (15)$$

对于天然边坡，根据端部条件： $E_{(0, j)} = 0$ ， $E_{(L, j)} = 0$ ，再由式(11)~(15)得每一列的安全系数为

$$F_{S, j} = \frac{\sum_{i=1}^{L-1} R_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + R_{(L, j)}}{\sum_{i=1}^{L-1} P_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + P_{(L, j)}} \quad (i=1, 2, \dots, L) \quad (16)$$

令每一列的安全系数  $F_{S, j}$  均相等且等于边坡整体安全系数  $F_{3S}$  得

$$\left( \sum_{i=1}^{L-1} P_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + P_{(L, j)} \right) F_{3S} = \sum_{i=1}^{L-1} R_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + R_{(L, j)} \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (17)$$

将式(17)中的  $M$  个方程组进行求和得

$$F_{3S} = \frac{\sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^{L-1} R_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + R_{(L, j)} \right)}{\sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^{L-1} P_{(i, j)} \prod_{k=i}^{L-1} \psi_{(k, j)} + P_{(L, j)} \right)} \quad (18)$$

(4) 建立  $Z$  方向的整体平衡方程式：

$$N_{(i, j)} n_{Z(i, j)} + T_{(i, j)} m_{Z(i, j)} = 0 \quad (19)$$

将式(7)代入式(19)得

$$[(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}] m_{Z(i, j)} = -F_{3S} N_{(i, j)} n_{Z(i, j)} \quad (20)$$

由于假定每一列的  $\rho_j$  相同，故每一列有相同的  $m_{Z(i, j)}$ ，令  $m_{Zj} = m_{Z(i, j)}$ ，根据式(20)，对第  $j$  列的所有行求和得

$$m_{Zj} \sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}] = -F_{3S} \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)} \quad (21)$$

若  $\rho_j$  满足节 2.1 中假定(3)中的①，即  $\rho_j = \kappa =$  常量，则根据式(21)，对所有列求和得

$$m_{Z(i, j)} = m_{Zj} = m_Z = \frac{-F_{3S} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)}}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}]} \quad (22)$$

$$\rho = \sin^{-1} m_Z \quad (23)$$

若假定  $\rho_j$  满足式(2)，现假定  $Z \geq 0$  的条块从  $M_1$  开始到第  $M$  块结束，共有  $M - M_1 + 1$  个条柱，每一个条柱形心的  $Z$  坐标为  $Z_{Rj}$ 。式(21)即为

$$m_{Zj} = \frac{-F_{3S} \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)}}{\sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}]} \quad (24)$$

联立式(2)和(24)得

$$\kappa Z_{Rj} = \sin^{-1} m_{Zj} = \sin^{-1} \left( \frac{-F_{3S} \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)}}{\sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}]} \right) \quad (25)$$

根据式(25)对  $M - M_1 + 1$  列求和得

$$\kappa = \left\{ \sum_{j=M_1}^M \sin^{-1} \left( \frac{-F_{3S} \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)}}{\sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}]} \right) \right\} / \sum_{j=M_1}^M Z_{Rj} \quad (26)$$

相应地  $Z < 0$  的条块共有  $M_1$  个条柱，每一个条柱形心的  $Z$  坐标为  $Z_{Lj}$ ，按照求  $\kappa$  的步骤，同样可得

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^{M_1} \sin^{-1} \left( \frac{-F_{3S} \sum_{i=1}^L N_{(i, j)} n_{Z(i, j)}}{\sum_{i=1}^L [(N_{(i, j)} - u_{(i, j)} A_{(i, j)}) \tan \varphi_{(i, j)} + c_{(i, j)} A_{(i, j)}]} \right)}{\kappa \sum_{j=1}^{M_1} Z_{Lj}} \quad (27)$$

这样便可确定  $\rho_j$  的分布形式，从而根据式(3)和(4)便可确定切向力  $T_{(i, j)}$  的方向导数 ( $m_{X(i, j)}$ ， $m_{Y(i, j)}$ ， $m_{Z(i, j)}$ )。

(5) 如图 4 所示，设第  $(i, j)$  条块底面在  $Y$  向的

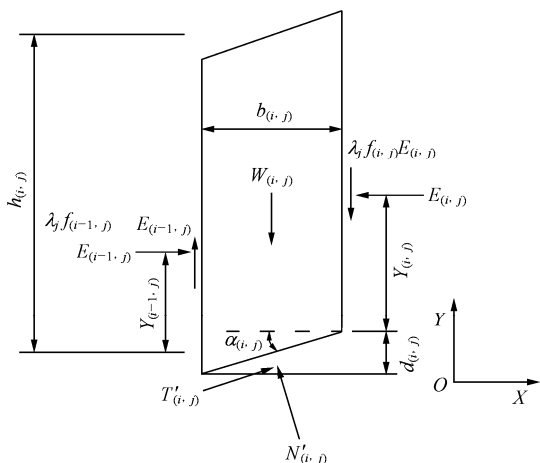


图 4 平面受力示意图

Fig.4 Sketch of plane forces acting on a single slice

平均投影长度为  $d_{(i,j)}$ , 在  $X$  向的平均投影长度为  $b_{(i,j)}$ 。条柱的平均高度为  $h_{(i,j)}$ , 建立经过每一条块底面中心且平行  $Z$  轴的力矩平衡方程式:

$$E_{(i,j)} \left( Y_{(i,j)} + \frac{d_{(i,j)}}{2} \right) = E_{(i-1,j)} \left( Y_{(i-1,j)} - \frac{d_{(i,j)}}{2} \right) + \lambda_j \frac{b_{(i,j)}}{2} (f_{(i,j)} E_{(i,j)} + f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)}) \quad (28)$$

令  $M'_{(i,j)} = E_{(i,j)} Y_{(i,j)}$ ,  $M'_{(i-1,j)} = E_{(i-1,j)} Y_{(i-1,j)}$ , 代入式(28)得

$$M'_{(i,j)} = M'_{(i-1,j)} + \lambda_j \frac{b_{(i,j)}}{2} (f_{(i,j)} E_{(i,j)} + f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)}) - \frac{d_{(i,j)}}{2} (E_{(i,j)} + E_{(i-1,j)}) \quad (29)$$

由  $M'_{(0,j)} = 0$ ,  $M'_{(L,j)} = 0$ , 根据式(29)可得

$$\lambda_j \sum_{i=1}^L b_{(i,j)} (f_{(i,j)} E_{(i,j)} + f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)}) = \sum_{i=1}^L d_{(i,j)} (E_{(i,j)} + E_{(i-1,j)}) \quad (30)$$

令每一列的  $\lambda_j$  均相等且等于  $\lambda$  得

$$\left( \sum_{i=1}^L b_{(i,j)} (f_{(i,j)} E_{(i,j)} + f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)}) \right) \lambda = \sum_{i=1}^L d_{(i,j)} (E_{(i,j)} + E_{(i-1,j)}) \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (31)$$

将式(31)中的  $M$  个方程组进行求和得

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L d_{(i,j)} (E_{(i,j)} + E_{(i-1,j)})}{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L b_{(i,j)} (f_{(i,j)} E_{(i,j)} + f_{(i-1,j)} E_{(i-1,j)})} \quad (32)$$

联立式(18), (22), (23)(或式(24)~(27))以及式(32)可求得  $F_{3S}$ ,  $\lambda$  和  $\rho$ 。

条间力函数  $f_{(i,j)}(s)$  的计算公式<sup>[15]</sup>如下:

$$f_{(i,j)}(s) = \sin^{A_j} [B_j(s)\pi] \quad (33)$$

其中,

$$B_j(s) = \begin{cases} \frac{1}{2s_{ff}} s_{(i,j)} & (0 \leq s_{(i,j)} \leq s_{ff}) \\ \frac{1-2s_{ff}+s_{(i,j)}}{2(1-s_{ff})} & (s_{ff} \leq s_{(i,j)} \leq 1) \end{cases} \quad (34)$$

式中:  $A_j$  为第  $j$  列条间力函数形状的系数,  $B_j(s)$  为第  $j$  列峰值点位置的函数,  $s_{(i,j)}$  为第  $(i,j)$  条块归一化后的水平坐标,  $s_{ff}$  为第  $j$  列条柱的峰值点。

### 3 三维 M-P 法的实现

根据节 2 所建立的三维 M-P 法安全系数计算公式, 便可对三维边坡的稳定性进行分析, 其具体步骤如下:

- (1) 给定滑动体的旋转中心和长短轴以及其他力学强度参数(如  $\gamma$ ,  $c$  和  $\phi$  等), 自动划分条柱为  $L$  行、 $M$  列;
- (2) 给定初始的  $F_3$ ,  $\lambda_0$ ,  $\rho_0$  或  $\eta_0$ ,  $\kappa_0$ , 计算相应的几何参数和力学参数;
- (3) 计算所有条柱的重力  $W_{(i,j)}$ ,  $R_{(i,j)}$  和  $P_{(i,j)}$  ( $i = 1, 2, \dots, L; j = 1, 2, \dots, M$ );
- (4) 将  $F_3$ ,  $\lambda_0$  代入式(11)~(13)计算  $\psi_{(i-1,j)}$ ,  $\phi_{(i,j)}$ ;
- (5) 将  $\psi_{(i-1,j)}$ ,  $\phi_{(i,j)}$  代入式(18)计算  $F_{3S}$ ;
- (6) 将求得的  $F_{3S}$  代入式(3)和式(5)联立可得  $N_{(i,j)}$ , 将  $N_{(i,j)}$  与  $F_{3S}$  代入式(22), (23)(或式(24)~(27))计算  $\rho$  或  $\eta$ ,  $\kappa$ ;
- (7) 将求得的  $F_{3S}$  代入式(10)求得  $E_{(i,j)}$ ;
- (8) 将  $E_{(i,j)}$  代入式(32)求得  $\lambda$ ;
- (9) 判断是否满足  $|F_{3S} - F_3| \leq \varepsilon_1$ ,  $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_2$  和  $|\rho - \rho_0| \leq \varepsilon_3$  或  $\sqrt{(\eta - \eta_0)^2 + (\kappa - \kappa_0)^2} \leq \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  和  $\varepsilon_3$  为预先给定的计算精度)。若满足, 则此时的  $F_{3S}$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  或  $\eta$ ,  $\kappa$  即为所求; 否则令  $F_3 = F_{3S}$ ,  $\lambda_0 = \lambda$  和  $\rho = \rho_0$  或  $\eta = \eta_0$ ,  $\kappa = \kappa_0$  返回步(4)重新计算, 直到满足要求为止。

由上述计算步骤可知, 本文建立的安全系数计算公式简单、实用, 无需求解方程组, 只需几步迭代便可求解出边坡三维安全系数, 一般工程技术人

员可自行编制程序，工程应用前景广。

### 4 算例与讨论

#### 4.1 算例 1

该算例为一无水状态下的均质重力土坡，坡高 40 m，坡度 45°(见图 5)，土体重度  $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$ ，边坡力学强度指标  $c = 30 \text{ kPa}$ ， $\phi = 30^\circ$ 。

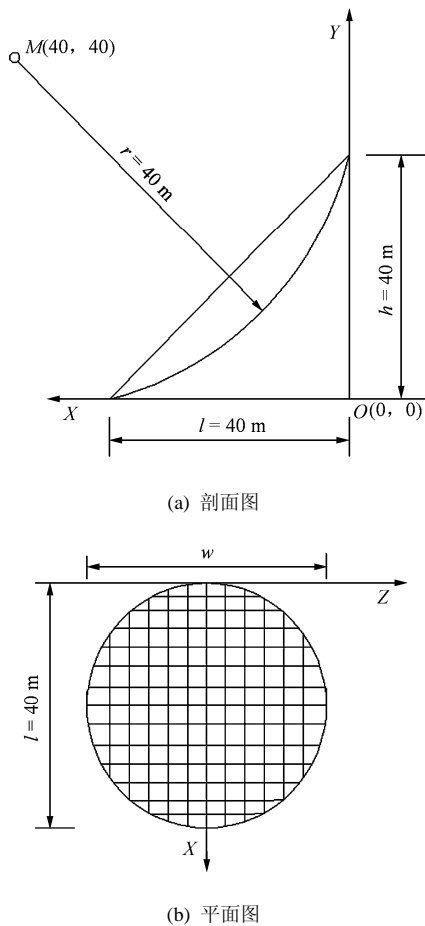


图 5 计算模型

Fig.5 Calculation model

现假定滑面为旋转椭球面，滑体横向宽度为  $w$ 。设滑面方程为  $\frac{(X - X_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_0)^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$ ，其中  $(x_0, y_0, 0)$  为球心坐标， $a, b$  为 2 个旋转半径。假定滑面通过坡脚和坡顶，主滑面的滑弧半径为 40 m，故在滑面方程中  $a = X_0 = Y_0 = 40 \text{ m}$ 。当滑体宽度为  $w$  时，由图 5 可知，椭球通过点  $(20, w/2, 20)$ ，代入椭球方程，可得  $2b = \sqrt{2}w$ ，所以当给定宽度  $w$  后，滑动面方程即可确定。

为验证本文所建立三维 M-P 法的可行性，分别取不同  $w$  值( $w = 40, 80, 120, 240, 320 \text{ m}$ )对滑体

进行稳定性验算，并与其他几种三维极限平衡法的计算结果进行了对比，计算结果见表 1，将上述计算结果绘制成的滑体宽长比对安全系数的影响曲线见图 6。

表 1 三维极限平衡法计算结果

Table 1 Calculated results of the slope stability with three-dimensional limit equilibrium method

宽长比 $(\frac{w}{l})$	三维普通条分法 <sup>[1]</sup>	三维简化 Bishop 法 <sup>[2]</sup>	三维简化 Janbu 法 <sup>[4]</sup>	三维简化 Janbu 法 <sup>[5]</sup>	三维 Spencer 法 <sup>[7]</sup>	改进的三维安全系数法 <sup>[16]</sup>	三维不平衡推力法 <sup>[9]</sup>	本文三维 M-P 法
1	1.15	1.30	1.25	1.25	1.34	1.48	1.25	1.37
2	1.14	1.22	1.17	1.16	1.24	1.34	1.19	1.26
3	1.14	1.20	1.16	1.15	1.22	1.29	1.18	1.23
6	1.15	1.19	1.14	1.13	1.21	1.26	1.17	1.22
8	1.15	1.19	1.14	1.13	1.21	1.26	1.17	1.21

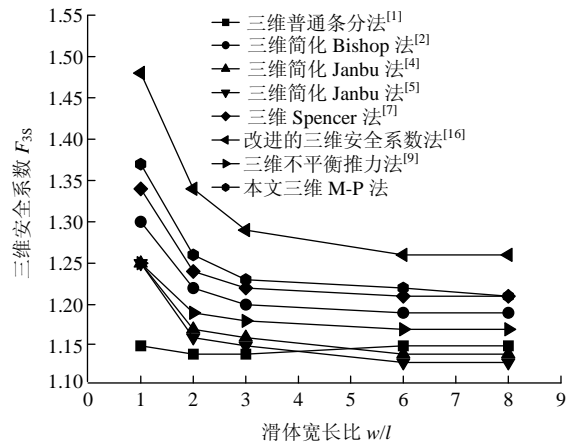


图 6 滑体宽长比对安全系数的影响

Fig.6 Influence of the ratio of width to length of slip body on safety factor

从图 6 可以看出，无论采用何种方法，当滑体的宽度与长度远远大于其沿滑动方向的长度时，稳定系数逐渐变小，此时，边坡稳定问题接近于二维平面问题。

从由表 1 计算结果可知，三维普通条分法由于没有考虑侧向力，稳定系数偏小。三维简化 Bishop 法<sup>[2]</sup>和三维简化 Janbu 法<sup>[4]</sup>以及国内学者冯树仁<sup>[5]</sup>的简化 Janbu 法，由于三者都考虑了条间力对稳定系数的影响，所得的稳定系数较三维普通条分法有较大提高。由于三者的基本原理相同，只是求解过程不同，因此 3 种方法所求得的安全系数相差不多，其中，三维简化 Bishop 法<sup>[2]</sup>考虑了力矩平衡，其所得的稳定系数较后两者偏大。

而李同录等<sup>[16]</sup>提出的改进三维安全系数法由于假定条间力也处于极限平衡状态, 因此其计算结果较其他方法得出的三维安全系数都偏大。陈胜宏和万娜<sup>[9]</sup>提出的三维不平衡推力法计算结果与三维简化 Bishop 法<sup>[2]</sup>和三维简化 Janbu 法<sup>[4, 5]</sup>比较接近, 但该法的收敛性问题还需探讨。

从表 1 还可以看出, 在同等条件下, 采用本文提出的三维 M-P 法计算出的安全系数(除李同录等<sup>[16]</sup>的改进三维安全系数法外)均高于其他方法的计算结果。这是因为本文方法既满足 3 个方向的力平衡条件又满足沿主滑方向的力矩平衡, 理论模型更为严密, 所以计算出的三维安全系数要比其他方法的高。

另外, 李同录等<sup>[16]</sup>改进三维安全系数法由于假定条间力也处于极限平衡状态, 所以该法计算出的安全系数要高于本文方法的计算结果, 但就计算模型而言, 本文三维 M-P 法更严谨一些。

### 4.2 算例 2

X. Zhang<sup>[7]</sup>曾对一系列具有简单体形的椭球滑裂面三维安全系数进行了计算, 选取其中一套参数如图 7 所示。边坡土体重度  $\gamma = 19.2 \text{ kN/m}^3$ , 边坡力学强度指标  $c = 29.3 \text{ kPa}$ ,  $\varphi = 20^\circ$ 。按原例的要求, 假定滑面为旋转椭球面, 对称轴平面用一圆弧模拟滑裂面, 在 Z 方向, 则以椭圆面形成滑面; 设滑面方程为  $\frac{(X - X_0)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_0)^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$ , 其中,  $X_0 = 5.102 \text{ m}$ ,  $Y_0 = 19.165 \text{ m}$ ,  $a = 24.4 \text{ m}$ ,  $b = 73.1 \text{ m}$ 。

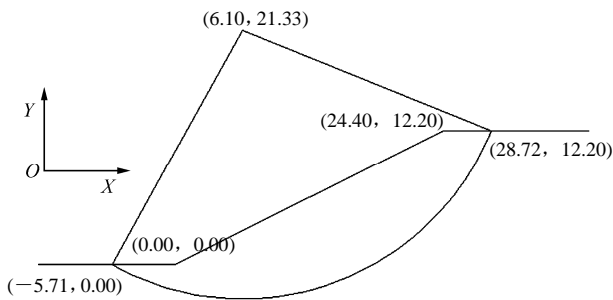


图 7 计算模型的剖面图(单位: m)  
Fig.7 Section of calculation model(unit: m)

现对于节 2.1 介绍  $\rho$  的两种分布形式, 分别采用本文三维 M-P 法计算该滑动面的安全系数, 并与 X. Zhang<sup>[7]</sup>, 陈祖煜等<sup>[8]</sup>的计算结果进行了对比, 计算结果见表 2。

从表 2 的计算结果可以看出, 无论  $\rho$  服从何种分布形式, 本文计算出的三维安全系数均接近于 X. Zhang<sup>[7]</sup>和陈祖煜等<sup>[8]</sup>的计算结果, 并且稍稍偏大。

表 2 X. Zhang<sup>[7]</sup>算例不同三维极限平衡法计算结果  
Table 2 Calculated results of the slope stability offered by X. Zhang<sup>[7]</sup> with different three-dimensional limit equilibrium methods

计算策略	$\rho$ 分布形式	安全系数计算模型	计算结果
X. Zhang <sup>[7]</sup>	-	三维 Spencer 法 1	2.122
陈祖煜等 <sup>[8]</sup>	常数	三维 Spencer 法 2	2.187
	线性分布	三维 Spencer 法 2	2.188
本文	常数	三维 M-P 法	2.210
	线性分布	三维 M-P 法	2.208

究其原因本文方法是由二维极限平衡法中最严格的 M-P 法拓展得到的, 理论模型较 X. Zhang<sup>[7]</sup>和陈祖煜等<sup>[8]</sup>更为严密, 由此可见, 本文方法是切实可行的。

由上述 2 个算例可知, 与文中所列其他三维极限平衡法相比, 本文方法满足滑坡体 3 个方向的静力平衡条件和沿主滑方向力矩平衡条件, 所得结果更加合理。但本文计算未考虑其他 2 个方向的力矩平衡条件, 因此, 计算所得安全系数仍偏于保守。另外, 三维非线性有限元法能给出边坡中的应力场和位移场, 将非线性有限元和极限平衡法有机结合在一起, 充分考虑变形和土体弹塑性应力调整对边坡稳定的影响, 则会得到更符合实际情况的计算结果, 有关该方面的计算程序有待进一步开发。

## 5 结 论

(1) 本文将二维 Morgenstern-Price 法进行拓展, 提出了一种新的边坡稳定性分析三维极限平衡法——三维 Morgenstern-Price 法, 该法满足 3 个方向的静力平衡条件和一个绕滑动主轴的力矩平衡条件, 计算公式简洁, 无需求解方程组, 通过简单迭代便可迅速得到稳性收敛的三维安全系数, 可在实际工程中大力推广应用。

(2) 依次变换滑体宽度  $w$ , 采用本文三维 M-P 法与其他三维极限平衡法对固定滑裂面的边坡稳定性安全系数进行了计算, 结果表明: 随着滑体宽度  $w$  的增大, 各种算法得到三维安全系数  $F_{3S}$  逐渐减小并最终达到某一稳定值, 此时边坡稳定性问题就转化为二维平面问题。

(3) 本文仅将提出的三维 M-P 法应用于滑裂面

规则且固定的边坡三维稳定性分析,但对于滑裂面为非规则空间曲面的情况,只要给定滑面控制点坐标,然后将滑面离散化,便可采用本文三维 M-P 法进行非对称空间滑面的三维安全系数计算。严格地说,边坡三维稳定性分析应以最小安全系数  $F_{3Smin}$  为目标函数,通过优化算法搜索得到边坡的三维空间最危险临界滑面。这种优化搜索计算将非常复杂,笔者下一步将对其作较深入研究。

### 参考文献(References):

- [1] HOVLAND H J. Three-dimensional slope stability analysis method[J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, 1997, 103(9): 971 - 986.
- [2] HUNGR O. An extension of Bishop's simplified method of slope stability analysis to three dimensions[J]. Geotechnique, 1987, 37(1): 113 - 117.
- [3] HUANG C C, TSAI C C. New method for 3D and asymmetric slope stability analysis[J]. Journal of Geotechnical and Environmental Engineering, 2000, 126(10): 917 - 927.
- [4] HUNGR O, SALGADO F M, BYRNE P M. Evaluation of a three-dimensional method of slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1989, 26(4): 679 - 686.
- [5] 冯树仁, 丰定祥, 葛修润, 等. 边坡稳定性的三维极限平衡分析方法及应用[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(6): 657 - 661.(FENG Shuren, FENG Dingxiang, GE Xiurun, et al. 3D limit equilibrium method for slope stability and its application[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(6): 657 - 661.(in Chinese))
- [6] 李亮, 迟世春, 郑榕明. 基于椭球滑动体假定和三维简化 Janbu 法的边坡稳定分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(9): 2 439 - 2 445.(LI Liang, CHI Shichun, ZHENG Rongming. Three-dimensional slope stability analysis based on ellipsoidal sliding body and simplified Janbu method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(9): 2 439 - 2 445.(in Chinese))
- [7] ZHANG X. Three-dimensional stability analysis of concave slopes in plan view[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1988, 114(6): 658 - 671.
- [8] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡方法[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(5): 525 - 529.(CHEN Zuyu, MI Hongliang, WANG Xiaogang. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(5): 525 - 529.(in Chinese))
- [9] 陈胜宏, 万娜. 边坡稳定分析的三维剩余推力法[J]. 武汉大学学报(工学版), 2005, 38(3): 69 - 73.(CHEN Shenghong, WAN Na. Study of three-dimensional residual thrust method for slope stability analysis[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2005, 38(3): 69 - 73.(in Chinese))
- [10] 朱大勇, 丁秀丽, 邓建辉. 基于力平衡的三维边坡安全系数显式解及工程应用[J]. 岩土力学, 2008, 29(8): 2 011 - 2 015.(ZHU Dayong, DING Xiuli, DENG Jianhui. Explicit solution to 3D safety factor of slope based on force equilibrium and its application to engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(8): 2 011 - 2 015.(in Chinese))
- [11] 朱大勇, 丁秀丽, 刘华丽, 等. 对称边坡三维稳定性计算方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(1): 22 - 27.(ZHU Dayong, DING Xiuli, LIU Huali, et al. Method of three-dimensional stability analysis of a symmetrical slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(1): 22 - 27.(in Chinese))
- [12] 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.(CHEN Zuyu. The theory, method and program of stability analysis for soil slopes[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003.(in Chinese))
- [13] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of the stability of general slip surface[J]. Geotechnique, 1965, 15(1): 79 - 93.
- [14] 朱大勇, 李焯芬, 黄茂松, 等. 对 3 种著名边坡稳定性计算方法的改进[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(2): 183 - 194.(ZHU Dayong, LEE C F, HUANG Maosong, et al. Modifications to three well-known methods of slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(2): 183 - 194.(in Chinese))
- [15] 陈昌富. 仿生算法及其在边坡和基坑工程中的应用[博士学位论文][D]. 长沙: 湖南大学, 1999.(CHEN Changfu. Bionic algorithm and its application to slope and excavation engineering[Ph. D. Thesis][D]. Changsha: Hunan University, 1999.(in Chinese))
- [16] 李同录, 王艳霞, 邓宏科. 一种改进的三维边坡稳定性分析方法[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(5): 611 - 614.(LI Tonglu, WANG Yanxia, DENG Hongke. An improved method for three-dimensional slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(5): 611 - 614.(in Chinese))