

文章编号:0559-9350(2010)06-0640-06

有限差分异质多尺度方法求解非饱和土壤水流问题的 计算效率(I):数值方法

陈福来,任理

(中国农业大学 资源与环境学院,教育部植物-土壤相互作用重点实验室,北京 100094)

摘要:应用有限差分异质多尺度方法(FDHMM)求解以 van Genuchten-Mualem 模型或 Gardner-Basha 模型为本构关系的 Richards 方程。Richards 方程中的水力参数是非均质的。基于一种“异质”的离散格式,FDHMM 在小的代表性的空间区域内求解细尺度问题,这是通过在不同的网格水平上使用不同的差分格式处理原始方程来实现的。在应用 FDHMM 求解 Richards 方程时,对于局部微观模型的求解,既考虑 Dirichlet 边界也考虑周期边界。为了确保所讨论的方法的有效性,在宏观水流通量的估计中运用了一些前人提出的假设和结论。最后,给出了应用 FDHMM 求解 Richards 方程宏观演替的离散格式。

关键词:多孔介质;非饱和水流;有限差分异质多尺度方法

中图分类号:TV131.2

文献标识码:A

1 研究背景

近几十年来,对非饱和土壤和岩层中的非稳定流和溶质运移问题的模拟越来越受到人们的关注。尽管使用随机模拟方法提高了模拟地下水非均质性能,但由于现有计算机自身资源的限制,使用基于细网格剖分的经典有限元方法或有限差分方法很难直接模拟实际情形。最近,有学者提出了几种不同但相关的处理含有振动系数问题的多尺度方法,如:多尺度有限元方法(MSFEM)、异质多尺度方法(HMM)和数值均匀化方法。

近年来,这些多尺度方法已被发展和应用到非线性问题或非均质多孔介质中非饱和水流和溶质运移问题^[1-6]。非均质多孔介质中的非饱和水流运动的数值模型一般都是基于知名的 Richards 方程。本文应用有限差分异质多尺度方法(FDHMM)求解以 van Genuchten-Mualem 模型或 Gardner-Basha 模型为本构关系的 Richards 方程,着重讨论该方法在模拟非饱和土壤水流问题时的计算精度、计算时间和内存花费等问题。

迄今为止,仍广泛使用基于有限差分格式编写的水流和溶质运移模型。如模板化的有限差分地下水水流模型 MODFLOW,就是最流行的地下水模拟程序之一。考虑到有限差分法在数值模拟中的重要作用,Abdulle 和 E^[7]基于 HMM 的理论框架提出了 FDHMM。在 FDHMM 中,Abdulle 和 E^[7]提出了一种“异质”的离散格式,这种格式仅仅在小的代表性的空间区域内求解细尺度问题,也就是 FDHMM 在不同的网格水平上使用不同的差分格式来处理原始方程,与直接求解原始方程相比,这种处理方式使 FDHMM 明显地节省计算费用。然而,FDHMM 是为处理线性抛物问题而提出来的,对于非均质非饱和多孔介质的水流运动这类更加复杂的非线性问题,需要对该方法的适用性进行更多的研究。与已有的

收稿日期:2008-05-19

基金项目:国家重点基础研究发展规划项目(2006CB403406);国家自然科学基金项目(50779064)

作者简介:陈福来(1971-),男,湖南郴州人,副教授,博士,主要从事土壤物理的研究。E-mail:eflmath@yahoo.com.cn

研究^[6]不同,这里将侧重对应用 FDHMM 求解非饱和土壤水流问题的计算效率进行更详细的探讨。为此,首先构建求解非饱和土壤水流问题的 FDHMM 的数值格式,接着对其计算效率进行详细的数值实验。该数值格式在单胞的边界条件、非饱和水力传导度张量、求解线性方程组等方面较原格式有所改进。

2 控制方程和本构关系

令 ψ 和 θ 分别表示压力水头和体积含水量。Richards 方程有 3 种标准形式:基于 ψ 的形式,基于 θ 的形式和混合形式。很多算例表明使用基于 ψ 形式的 Richards 方程和时间方向采用向后的 Euler 方法离散而获得的数值解可能产生较大的质量守恒误差,使用混合形式的 Richards 方程的数值格式既克服了 ψ 形式带来的质量守恒方面的困难,又保持了 ψ 形式所具有的优势^[8-9]。于是,使用混合形式的 Richards 方程作为本文多孔介质中缺乏源汇项的非稳定非饱和水流的模型,控制方程如下

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} - \nabla \cdot [K(X, \psi) \nabla(\psi - z)] = 0, \quad (1)$$

式中: $K(X, \psi)$ 为非饱和水力传导度 (md^{-1}); $X = (x, z)$ 表示空间坐标 (m); z 表示正向下的垂直坐标 (m); t 为时间 (d)。

非饱和水流运动的水力特征主要由水力传导度和水分特征曲线表示,这里,选择具有代表性的 van Genuchten-Mualem 模型和 Gardner-Basha 模型来展开研究。

van Genuchten-Mualem 模型^[10]由 van Genuchten 水分特征曲线函数和 Mualem 关系式组成,定义如下

$$\begin{cases} \theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) [1 + (\alpha_v |\psi|)^{n'}]^{-m'}, \\ K(X, \psi) = k_s(X) k_r(\psi) = k_s(X) \frac{\{1 - (\alpha_v |\psi|)^{n'-1} [1 + (\alpha_v |\psi|)^{n'}]^{-m'}\}^2}{[1 + (\alpha_v |\psi|)^{n'}]^{m'/2}}, \\ m' = 1 - \frac{1}{n'}, \end{cases} \quad (2)$$

式中: θ_r 为残余体积含水量 ($\text{m}^3 \text{m}^{-3}$); θ_s 为饱和体积含水量 ($\text{m}^3 \text{m}^{-3}$); m' 和 n' 为水分特征曲线形状的参数; k_s 为饱和水力传导度 (md^{-1}); α_v 为与平均孔径尺度有关的多孔介质的参数 (m^{-1})。 $C(\psi) \equiv d\theta/d\psi$ 为比水容量 (m^{-1}),它在 van Genuchten-Mualem 模型中的表达式为

$$C(\psi) = (\theta(\psi) - \theta_r) \frac{(n' - 1) \alpha_v (\alpha_v |\psi|)^{n'-1}}{1 + (\alpha_v |\psi|)^{n'}}. \quad (3)$$

结合 Gardner 水分特征曲线函数, Basha^[11]提出了 Gardner-Basha 模型,又叫指数模型。Gardner-Basha 模型有如下的关系式

$$\begin{cases} \theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{-\beta |\psi|}, \\ K(X, \psi) = k_s(X) k_r(\psi) = K_s(X) e^{-\alpha_c |\psi|}, \end{cases} \quad (4)$$

式中: α_c 和 β 为多孔介质的参数 (m^{-1})。在随后的算例中,应用这个模型时残余体积含水量 θ_r 的值假定为 0。根据 Gardner-Basha 模型,比水容量 $C(\psi)$ 有如下的表达式

$$C(\psi) = \beta (\theta_s - \theta_r) e^{-\beta |\psi|}. \quad (5)$$

3 原理和算法

概括地说来,FDHMM 的理论框架主要由两部分组成。第一部分是一个总的宏观格式,在粗网格(感兴趣的网格)上演替含有未知数据的宏观方程,这些未知数据是需要通过微观模型的解来重新获得。第二部分是一个微观格式,在该微观格式中原始方程的求解是在一个稀疏(非均质)的空间域内进

行的。实现这个算法分成 4 步：(1) 重构单胞问题；(2) 微观演替；(3) 估计宏观水流量；(4) 宏观演替。宏观演替是在粗网格上求解宏观方程

$$\frac{\partial \Theta(\Psi)}{\partial t} = -\nabla \cdot F, \quad (6)$$

式中： Θ 为宏观体积含水量 ($\text{m}^3 \text{m}^{-3}$)， Ψ 为相应于 ψ 的宏观压力水头 (m)，即在粗结点处，有 $\Psi(x) = \psi(x)$ ， F 为宏观水流量张量 (md^{-1})。

下面具体地讨论 FDHMM 的算法。本文的离散格式也是以网格为中心的有限差分离散。为简单起见，假定研究区域 Ω 是一个正方形，并且一致剖分它为 $N \times N$ 粗网格， (x_i, y_j) ， $i, j = 1, 2, \dots, N+1$ 表示网格结点坐标， $H = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j$ 表示正方形网格单元的边长。

3.1 重构单胞问题 先在粗网格上确定好控制体 (单胞) 的位置。令控制体是一个长度为 δ 的正方形且中心位于除两个都是外结点之外的任意两个相邻结点的连线的中点上。这样，在每个内结点 (i, j) 都围绕着 4 个控制体 $I_{i\pm 1/2, j}^\delta, I_{i, j\pm 1/2}^\delta$ (见图 1)。令 $d_- = \frac{H - \delta}{2}, d_+ = \frac{H + \delta}{2}$ ，则控制体 $I_{i\pm 1/2, j}^\delta, I_{i, j\pm 1/2}^\delta$ 定义如下

$$\begin{cases} I_{i\pm 1/2, j}^\delta = [x_i \pm d_\mp, x_i \pm d_\pm] \times [y_j - \frac{\delta}{2}, y_j + \frac{\delta}{2}], \\ I_{i, j\pm 1/2}^\delta = [x_i - \frac{\delta}{2}, x_i + \frac{\delta}{2}] \times [y_j \pm d_\mp, y_j \pm d_\pm]. \end{cases} \quad (7)$$

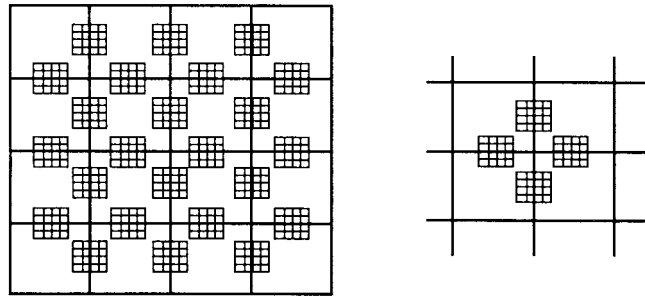


图 1 宏观和微观计算域的示意图 (左) 以及每个内粗结点 (i, j) 周围的控制体 $I_{i\pm 1/2, j}^\delta, I_{i, j\pm 1/2}^\delta$ (右)。

在随后的表述中将用 I^δ 表示控制体。每一个控制体 I^δ 被一致剖分成 $M \times M$ 细网格，网格结点是 (k, l) ，相应的坐标为 (ξ_k, η_l) ， $k, l = 1, 2, \dots, M+1$ 。 ξ_k, η_l 具体表示如下

$$\begin{cases} \xi_k = \frac{H - \delta}{2} + (k - 1) \frac{\delta}{M}, & k = 1, 2, \dots, M + 1, \\ \eta_l = \frac{H - \delta}{2} + (l - 1) \frac{\delta}{M}, & l = 1, 2, \dots, M + 1. \end{cases} \quad (8)$$

假定 $\Psi_{i, j}^n$ 已知， $\Psi_{i, j}^n$ 表 t^n 时刻宏观方程 (6) 在粗结点 (i, j) 的粗网格解。在每个控制体，根据这个粗网格解来重构单胞问题的初值和边界条件。

首先用分段线性重构来定义一个粗网格解的重构形式，重构值 $\psi^n(X)$ 具体表述如下

$$\begin{cases} \psi_{k, l}^n = \Psi_{i-1, j}^n + \xi_k \frac{\Psi_{i, j}^n - \Psi_{i-1, j}^n}{H}, & \text{对于 } I_{i-\frac{1}{2}, j}^\delta, \\ \psi_{k, l}^n = \Psi_{i, j}^n + \xi_k \frac{\Psi_{i+1, j}^n - \Psi_{i, j}^n}{H}, & \text{对于 } I_{i+\frac{1}{2}, j}^\delta, \\ \psi_{k, l}^n = \Psi_{i, j-1}^n + \eta_l \frac{\Psi_{i, j}^n - \Psi_{i, j-1}^n}{H}, & \text{对于 } I_{i, j-\frac{1}{2}}^\delta, \\ \psi_{k, l}^n = \Psi_{i, j}^n + \eta_l \frac{\Psi_{i, j+1}^n - \Psi_{i, j}^n}{H}, & \text{对于 } I_{i, j+\frac{1}{2}}^\delta. \end{cases} \quad (9)$$

式中： $\psi_{k, l}^n$ ， $k, l = 1, 2, \dots, M+1$ 为 t^n 时刻粗网格解在细结点 (k, l) 的重构值。式 (9) 意味着控制体

$I_{i \pm 1/2}^\delta$ 中的 $\psi_{k,j}^n$ 是沿着 x 方向重构的, 控制体 $I_{i \pm 1/2}^\delta$ 中的 $\psi_{k,j}^n$ 是沿着 z 方向重构的。

对于在时间段 $[t^n, t^{n+1}]$ 内的单胞问题, 初值 $\psi(X, t^n)$ 定义如下

$$\psi(X, t^n) = \psi^n(X), \quad X \in I^\delta \quad (10)$$

FDHMM 的一个关键因素是微观模型的公式表达, 特别是边界条件的构造。这里讨论两类边界条件: 周期边界条件和 Dirichlet 边界条件。对于周期边界条件, 局部微观问题采用如下形式的边界条件

$$\psi(X, t) - \psi^n(X) \text{ 是周期的, 周期为 } I^\delta, \quad (11)$$

式(11)具体表达如下

$$\begin{cases} \psi_{k,\rho} = \psi_{k,M} + \psi_{k,\rho}^n - \psi_{k,M}^n, & k = 1, \dots, M+1, \\ \psi_{M+2,l} = \psi_{2,l} + \psi_{M+2,l}^n - \psi_{2,l}^n, & l = 1, \dots, M+1, \end{cases} \quad (12)$$

对 $\psi_{0,j}$ 和 $\psi_{k,M+2}$ 有类似的表达式。

Dirichlet 边界条件有如下的形式

$$\psi(X, t) = \psi^n(X), \quad (X, t) \in \partial I^\delta \times (t^n, t^{n+1}) \quad (13)$$

式(13)具体表达如下

$$\begin{cases} \psi_{k,l} = \psi_{k,l}^n, & \psi_{k,M+1} = \psi_{k,M+1}^n, & k = 1, 2, \dots, M+1, \\ \psi_{1,j} = \psi_{1,j}^n, & \psi_{M+1,j} = \psi_{M+1,j}^n, & l = 1, 2, \dots, M+1. \end{cases} \quad (14)$$

3.2 微观演替 定义了初边值条件后, 在每个控制体或者求解具有初始条件(10)和边界条件(11)的原始方程(1), 或者求解具有初始条件(10)和边界条件(13)的原始方程(1)。

对于确定宏观和微观时间步的问题, Abdulle 和 E^[7] 在一个比宏观时间步更小的时间段内使用微观时间步求解微观单胞问题来处理线性问题, 微观时间步取得远远小于宏观时间步。然而, 由于非饱和和水流问题的非线性特性导致的复杂性, 一个较大的宏观时间步可能导致算法无效。为了确保算法的有效性, 采用一个小的宏观时间步, 并且假定微观时间步也等于宏观时间步。假定方程(1)的时间离散采用向后的 Euler 方法, 则(1)的标准完全隐式有限差分格式为

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{k,j}^{n+1,m+1} - \theta_{k,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta \xi} \left[K_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \frac{\psi_{k+1,j}^{n+1,m+1} - \psi_{k,j}^{n+1,m+1}}{\Delta \xi} - K_{k-\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \frac{\psi_{k,j}^{n+1,m+1} - \psi_{k-1,j}^{n+1,m+1}}{\Delta \xi} \right] \\ & - \frac{1}{\Delta \eta} \left[K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} \frac{\psi_{k,j+1}^{n+1,m+1} - \psi_{k,j}^{n+1,m+1}}{\Delta \eta} - K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m} \frac{\psi_{k,j}^{n+1,m+1} - \psi_{k,j-1}^{n+1,m+1}}{\Delta \eta} \right] + \frac{1}{\Delta \eta} [K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} + K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m}] = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

这里, $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 表示时间步长, $\Delta \xi, \Delta \eta$ 是控制体的细网格在 x 和 z 方向的尺度, n 和 m 分别表示时间和迭代指标, $\psi_{k,j}^{n+1,\rho} = \psi_{k,j}^n, K_{k+1/2,j} = (K_{k+1,j} \cdot K_{k,j})^{1/2}$ 表示 $K_{k+1,j}$ 和 $K_{k,j}$ 之间的几何平均值, $K_{k-1/2,j}$ 和 $K_{k,j+1/2}$ 有类似的表达式。

求解式(15)的关键是体积含水量 $\theta_{k,j}^{n+1,m+1}$ 关于压力水头 ψ 在点 $\psi_{k,j}^{n+1,m}$ 处的截断的泰勒展开的表达式。假如舍去所有的高阶项, 则展开结果为

$$\theta_{k,j}^{n+1,m+1} \approx \theta_{k,j}^{n+1,m} + C_{k,j}^{n+1,m} (\psi_{k,j}^{n+1,m+1} - \psi_{k,j}^{n+1,m}). \quad (16)$$

把式(16)代入式(15), 令 $\Delta \xi = \Delta \eta = a$, 把所有的未知项移到左边, 所有的已知项移到右边得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2} K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m} \psi_{k,j-1}^{n+1,m+1} - \frac{1}{a^2} K_{k-\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \psi_{k-1,j}^{n+1,m+1} + \left[\frac{1}{\Delta t} C_{k,j}^{n+1,m} + \frac{1}{a^2} (K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m} + K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} + K_{k-\frac{1}{2},j}^{n+1,m} + K_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1,m}) \right] \psi_{k,j}^{n+1,m+1} \\ & - \frac{1}{a^2} K_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \psi_{k+1,j}^{n+1,m+1} - \frac{1}{a^2} K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} \psi_{k,j+1}^{n+1,m+1} = -\frac{1}{a} (K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} - K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m}) - \frac{1}{\Delta t} (\theta_{k,j}^{n+1,m} - \theta_{k,j}^n) + \frac{1}{\Delta t} C_{k,j}^{n+1,m} \psi_{k,j}^{n+1,m}. \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$\begin{cases} \tilde{K}_{k,j}^{n+1,m} = K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m} + K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} + K_{k-\frac{1}{2},j}^{n+1,m} + K_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1,m}, \\ R_{k,j}^{n+1,m} = -\frac{1}{a} (K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} - K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m}) - \frac{1}{\Delta t} (\theta_{k,j}^{n+1,m} - \theta_{k,j}^n) + \frac{1}{\Delta t} C_{k,j}^{n+1,m} \psi_{k,j}^{n+1,m}, \end{cases} \quad (18)$$

则方程(17)可简化为

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a^2} K_{k,j-\frac{1}{2}}^{n+1,m} \psi_{k,j-1}^{n+1,m+1} - \frac{1}{a^2} K_{k-\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \psi_{k-1,j}^{n+1,m+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} C_{k,j}^{n+1,m} + \frac{1}{a^2} \bar{K}_{k,j}^{n+1,m} \right) \psi_{k,j}^{n+1,m+1} \\
& - \frac{1}{a^2} K_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1,m} \psi_{k+1,j}^{n+1,m+1} - \frac{1}{a^2} K_{k,j+\frac{1}{2}}^{n+1,m} \psi_{k,j+1}^{n+1,m+1} = R_{k,j}^{n+1,m}.
\end{aligned} \quad (19)$$

为使用迭代求解非对称的线性方程(19),考虑使用多重网格法,这里直接调用一个多重网格法的程序包 MGD9V^[12]。

在算法中设定容误差 ε 为 10^{-6} ,如果下式成立则迭代停止。

$$|\psi_{k,j}^{n+1,m+1} - \psi_{k,j}^{n+1,m}| \leq \varepsilon. \quad (20)$$

3.3 宏观水流通量的估计 基于本文引言的讨论,这里应用 Yeh 等^[13]以及 Mantoglou 和 Gelhar^[14]给出的假定来估计宏观通量 F ,

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{|I^\delta|} \iint_{I^\delta} K(X, \psi) \nabla(\psi(X, \mu^{n+1}) - z) dX \\
&= -\frac{1}{|I^\delta|} \iint_{I^\delta} \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \end{pmatrix} dx dz \\
&= -\frac{1}{|I^\delta|} \iint_{I^\delta} \begin{pmatrix} K_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ K_{zz} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \end{pmatrix} dx dz = \begin{pmatrix} F^x \\ F^z \end{pmatrix},
\end{aligned} \quad (21)$$

式中: F^x 表示沿 x 方向估计的宏观通量; F^z 表示沿 z 方向估计的宏观通量。假定在细尺度的水平上,多孔介质的非饱和水力传导度不随方向的改变而改变,即 $K_{xx} = K_{zz}$ 。

对于宏观水流通量的估计,Abdulle 和 E^[7]提出一种行之有效的思想,即把每个控制体内微观水流通量的平均作为宏观水流通量。同时,E 等^[4]也指出,为了减少人为强加在单胞问题中的边界条件的影响,可以在控制体内取较小的单胞的微观水流通量的平均来估计宏观水流通量,即可以在区域 δ' ($\delta' < \delta$) 内估计宏观水流通量。这里,基于这些思想近似估计宏观通量如下:

$$\begin{aligned}
F^x &= -\frac{1}{|I^\delta|} \iint_{I^\delta} K_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dz \\
&\approx -\frac{a^2}{\delta'^2} \sum_{k=2}^{M-1} \sum_{l=2}^{M-1} K_{k+\frac{1}{2},l}^{n+1,m+1} \frac{\psi_{k+1,l}^{n+1,m+1} - \psi_{k,l}^{n+1,m+1}}{a}, \quad \text{对于 } I_{i\pm\frac{1}{2},j}^\delta, \\
F^z &= -\frac{1}{|I^\delta|} \iint_{I^\delta} K_{zz} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) dx dz \\
&\approx -\frac{a^2}{\delta'^2} \sum_{k=2}^{M-1} \sum_{l=2}^{M-1} K_{k,l+\frac{1}{2}}^{n+1,m+1} \left(\frac{\psi_{k,l+1}^{n+1,m+1} - \psi_{k,l}^{n+1,m+1}}{a} - 1 \right), \quad \text{对于 } I_{i,j\pm\frac{1}{2}}^\delta.
\end{aligned} \quad (22)$$

3.4 宏观演替 确定了宏观水流通量的估计值, Δt 时间段内在粗网格上演替宏观方程(6)。宏观演替通过式(6)的近似表达式来实现,

$$\Theta_{i,j}^{n+1} = \Theta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{H} (F_{i+\frac{1}{2},j}^x - F_{i-\frac{1}{2},j}^x + F_{i,j+\frac{1}{2}}^z - F_{i,j-\frac{1}{2}}^z). \quad (23)$$

根据点尺度的水分特征曲线函数,由粗结点 (i,j) 上最新的估计值 $\Theta_{i,j}^{n+1}$ 能估计出该结点处的宏观压力水头值 $\Psi_{i,j}^{n+1}$ 。对于 van Genuchten-Mualem 模型,有

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = -\frac{1}{\alpha_{vi,j}} \left[\left(\frac{\theta_s - \theta_r}{\Theta_{i,j}^{n+1} - \theta_r} \right)^{\frac{1}{m'}} - 1 \right]^{\frac{1}{n'}}. \quad (24)$$

对于 Gardner-Basha 模型,有

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\theta_s - \theta_r}{\Theta_{i,j}^{n+1} - \theta_r} \right). \quad (25)$$

这样,FDHMM 的算法就完成了。

4 结语

本文应用有限差分异质多尺度方法来求解具有混合形式的 Richards 方程,对方程所需的本构关系选择了具有代表性的 van Genuchten-Mualem 模型和 Gardner-Basha 模型。方法是基于一种“异质”的离散格式,由宏观格式和微观格式两部分组成。在微观模型中把周期边界和 Dirichlet 边界这两类边界条件作为局部边界条件,使用多重网格法来求解具有这两类边界条件的原始抛物问题。在宏观模型中基于饱和水力传导度张量在局部是对角且各向同性的假设,使用控制体中的微观水流通量的体积平均来估计宏观水流通量。为了减少局部边界条件的影响,可以在控制体内部取较小的单胞来估计宏观水流通量。宏观方程是一个包含宏观通量的并不明确的表达式,基于宏观水流通量的估计,简单而明确的宏观演替公式被给出。限于篇幅,将在该文的姊妹篇中给出对这里所构建的 FDHMM 数值格式的计算效率进行数值实验的研究结果。

参 考 文 献:

- [1] Efendiev Y, Pankov A. Numerical homogenization of nonlinear random parabolic operators [J]. *SIAM Multiscale Modeling Simulation*, 2004, 2(2): 237 – 268.
- [2] He X, Ren L. A multiscale finite element linearization scheme for the unsaturated flow problems in heterogeneous porous media [J]. *Water Resources Research*, 2006, 42, W08417, doi: 10.1029/2006WR004905.
- [3] Efendiev Y, Hou T Y, Ginting V. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications [J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2004, 2(4): 553 – 589.
- [4] E W, Ming P B, Zhang P W. Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems [J]. *Journal of the American Mathematical Society*, 2005, 18(1): 121 – 156.
- [5] Yue X, E W. Numerical methods for multiscale transport equations and application to two-phase porous media flow [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 210: 656 – 675.
- [6] Chen F, Ren L. Application of the finite difference heterogeneous multiscale method to the Richards' equation [J]. *Water Resources Research*, 2008, 44, W07413, doi: 10.1029/2007WR006275.
- [7] Abdulle A, E W. Finite difference heterogeneous multi-scale method for homogenization problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 191: 18 – 39.
- [8] Celia M A, Bouloutas E T, Zarba R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation [J]. *Water Resources Research*, 1990, 26(7): 1483 – 1496.
- [9] Allen M B, Murphy C. A finite element collocation method for variably saturated flows in porous media [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1985, 3: 229 – 239.
- [10] van Genuchten M T. A closed – form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils [J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, 44: 892 – 898.
- [11] Basha H A. Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface [J]. *Water Resources Research*, 1999, 35(1): 75 – 83.
- [12] de Zeeuw P M. Matrix-dependent prolongations and restrictions in a blackbox multigrid solver [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1990, 33: 1 – 27.
- [13] Yeh T C, Gelhar L W, Gutjahr A L. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils, 1. Statistically isotropic media [J]. *Water Resources Research*, 1985, 21(4): 447 – 456.
- [14] Mantoglou A, Gelhar L W. Stochastic modeling of large-scale transient unsaturated flow systems [J]. *Water Resources Research*, 1987, 23(1): 37 – 46.

(下转第 652 页)

Computational efficiency of finite difference heterogeneous multiscale method for unsaturated flow problems in random porous media

I . Numerical method

CHEN Fu-lai¹ , REN Li¹

(1. *China Agricultural University , Beijing 100094 , China*)

Abstract: The finite difference heterogeneous multiscale method (FDHMM) was extended to solve the Richards' equation with the van Genuchten-Mualem model or the Gardner-Basha model. Hydraulic parameters in the Richards' equation are heterogeneous. Based on a heterogeneous discretization approach the FDHMM can deal with the fine scale problems in small representative region in spatial domain , it relies on the use of two different schemes for original equation , and at different grid levels. Both the Dirichlet and the periodic boundary conditions were considered for solving the local microscopic model when the Richards' equation was solved by FDHMM. Some restrictions and conclusions presented by previous researchers were applied to estimate the macroscopic flux in order to assure the efficiency of the discussed method. Lastly , a discrete scheme of macroscopic evolution was given.

Key words: porous media; unsaturated flow; finite difference heterogeneous multiscale method

(责任编辑:吕斌秀)